QUINTA EDICIÓN

VIBRACIONES MECÁNICAS

SINGIRESU S. RAO

ALWAYS LEARNING

PEARSON

VIBRACIONES MECÁNICAS

VIBRACIONES MECÁNICAS

QUINTA EDICIÓN

Singiresu S. Rao
University of Miami

TRADUCCIÓN
Rodolfo Navarro Salas
Ingeniero Mecánico
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA
David Sepúlveda García
Escuela Superior de Ingeniería
Mecánica y Eléctrica
Unidad Profesional Azcapotzalco
Instituto Politécnico Nacional

Ricardo Rodríguez Figueroa
Departamento de Ingeniería Mecatrónica
Instituto Tecnológico de Coacalco

Gabriela del Valle Díaz Muñoz
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

RAO, SINGIRESU S.
Vibraciones mecánicas
Quinta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-0952-6

Área: Ingeniería

Formato 20 × 25.5 cm Páginas: 776

ISBN 9780132128193

Dirección general:	Laura Koestinger
Dirección de Educación Superior:	Mario Contreras
Editor:	Luis Miguel Cruz Castillo
	e-mail: luis.cruz@pearson.com
Editor de desarrollo:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción:	Juan José García Guzmán
Gerencia editorial Educación Superior Latinoamérica:	Marisa de Anta

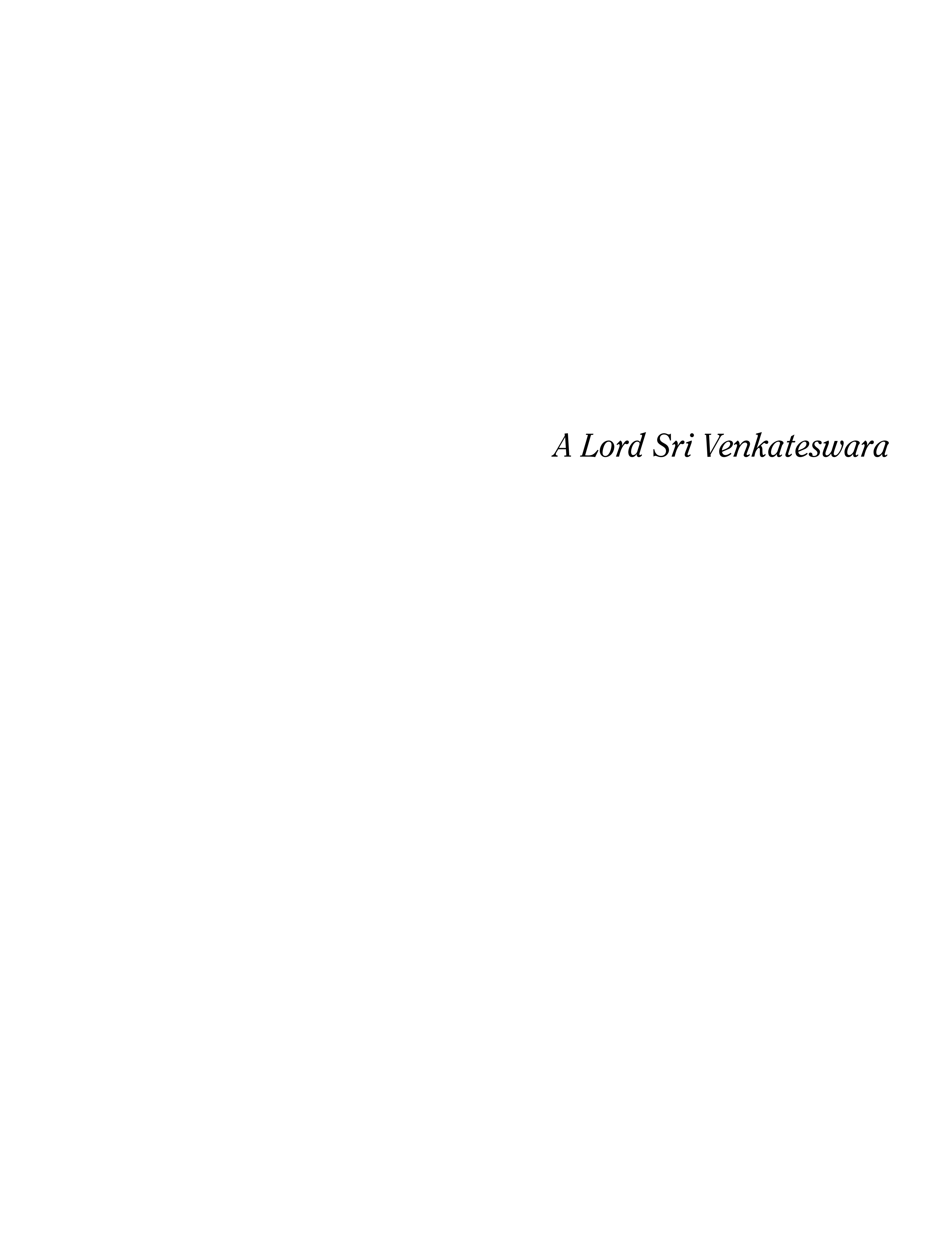
QUINTA EDICIÓN, 2012

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0952-6
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0953-3
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0954-0

Impreso en México. *Printed in Mexico*.

www.pearsoneducacion.net



A Lord Sri Venkateswara

CONTENIDO

CAPÍTULO 5

Sistemas de dos grados de libertad 430

CAPÍTULO 6

Sistemas de varios grados de libertad 508

CAPÍTULO 7

Determinación de frecuencias y modos naturales 602

CAPÍTULO 8

Control de la vibración 644

Los capítulos 9 al 12 y apéndices se encuentran (en español) en el sitio web de este libro.

CAPÍTULO 9

Sistemas continuos 9-1

CAPÍTULO 10

Medición de vibración y aplicaciones 10-1

CAPÍTULO 11

Métodos de integración numérica en el análisis de vibración 11-1

PREFACIO

Cambios en esta edición

Este libro presenta el tema de ingeniería de vibraciones a nivel de licenciatura. Las reacciones favorables de profesores y estudiantes a la cuarta edición me motivaron a preparar esta quinta edición. Conservé el estilo de las ediciones anteriores en la presentación de la teoría, los aspectos de cálculo y la aplicación de la vibración de la manera más sencilla posible, con especial énfasis en las técnicas de análisis por computadora. Se ofrecen amplias explicaciones de los fundamentos en las que se recalca la importancia y la interpretación física que acrecientan las experiencias adquiridas en cursos previos de mecánica y se utilizan numerosos ejemplos y problemas para ilustrar principios y conceptos.

En esta edición se modificaron algunos temas y se volvieron a escribir otros, se agregaron muchos más y se introdujeron nuevas características. La mayoría de esas adiciones y modificaciones fueron a sugerencia de los usuarios y revisores del texto. Entre los cambios importantes destacan los siguientes:

1. Al principio de cada capítulo se presenta un esquema y los objetivos de aprendizaje.
2. Al final de cada capítulo se ofrece un resumen de repaso.
3. La presentación de algunos temas se ha modificado para ofrecer una mayor cobertura y mejor claridad. Estos temas incluyen los componentes básicos de la vibración: elementos de resorte, elementos de amortiguación y elementos de masa o inercia, así como aislamiento y control activo de la vibración.
4. Muchos temas nuevos se presentan con detalles y ejemplos ilustrativos, entre ellos la respuesta de sistemas de primer orden y la constante de tiempo; representación gráfica de las raíces y soluciones características; variaciones de parámetros y la representación del lugar geométrico de las raíces; la estabilidad de los sistemas; el método de función de transferencia para problemas de vibración forzada; el método de la transformada de Laplace para solucionar problemas de vibración libre y forzada; el método de la función de transferencia de frecuencia; el diagrama de Bode para sistemas de un solo grado de libertad; la respuesta gradual y la descripción de la respuesta transitoria, y los impactos elásticos y no elásticos.
5. Se agregaron 128 ejemplos, 160 problemas, 70 preguntas de repaso y 107 ilustraciones.
6. Se eliminaron los ejemplos y problemas basados en los programas C++ y Fortran, que en la edición anterior se presentaban al final de cada capítulo.

Características sobresalientes del libro

- Cada tema de este libro es independiente; todos los conceptos se explican perfectamente y las derivaciones se presentan con todos sus detalles.
- A lo largo del texto se recalcan los aspectos de cálculo asistidos por computadora. En la última sección de cada capítulo encontrará ejemplos basados en MATLAB, así como varios programas MATLAB de uso general con ejemplos ilustrativos.
- Algunos temas se presentan de una forma un tanto no convencional; en particular en los capítulos 8, 10 y 11. La mayoría de los libros de texto abordan los puntos de los aisladores, los absorbedores y el balanceo en capítulos diferentes. Sin embargo, dado que uno de los objetivos principales del estudio de las vibraciones es controlar la respuesta a éstas, todos los temas relacionados con el control de la vibración se presentan en el capítulo 8. Los instrumentos de medición de vibración, junto con los excitadores de vibración, el procedimiento de análisis modal experimental y el monitoreo de la condición de máquinas, están juntos en el capítulo 10 (en el sitio web). Asimismo, todos los métodos de integración numérica aplicables a sistemas de uno y varios grados de libertad, al igual que los sistemas continuos, se encuentran en el capítulo 11 (en el sitio web).

Otras características sobresalientes son las siguientes:

- Más de 240 ejemplos ilustrativos para complementar la mayoría de los temas.
- Más de 980 preguntas de repaso para que los estudiantes revisen y prueben su comprensión del texto. Estas preguntas son de diferentes tipos: de opción múltiple, con respuestas breves, de verdadero o falso; de correspondencia de descripciones, y de completar espacios en blanco.
- Cada capítulo ofrece un extenso conjunto de problemas (más de 1150 en todo el libro) que resaltan varias aplicaciones del material explicado en el texto. (Las respuestas se proporcionan en el de soluciones para el profesor).
- Al final de algunos capítulos se presentan problemas del tipo proyecto de diseño (más de 30 a lo largo del texto), muchos sin solución única.
- Más de 25 programas MATLAB para ayudar a los estudiantes en la implementación numérica de los métodos estudiados en el texto.
- Información biográfica (al inicio de cada capítulo y en los apéndices) de alrededor de 20 científicos e ingenieros que contribuyeron al desarrollo de la teoría de vibraciones.

Los programas MATLAB y las respuestas a los problemas y a las preguntas de repaso que se presentan en el texto se encuentran disponibles para los profesores en el sitio web de este libro en **www.pearsoneducacion.net/rao**.

El Manual de soluciones de todos los problemas y sugerencias para diseñar proyectos está disponible para los profesores que adopten este libro como texto en sus cursos. Consulte a su representante de Pearson.

Unidades y notación

En los ejemplos y problemas de este libro hemos utilizado tanto unidades del Sistema Internacional (SI) como del Sistema Inglés. Después de los *Reconocimientos* aparece una lista de símbolos junto con las unidades asociadas en estos sistemas. En el Apéndice E se analiza brevemente la aplicación de las unidades SI en el campo de las vibraciones. Hemos utilizado flechas sobre los símbolos para indicar los vectores de columna y paréntesis rectangulares (corchetes) para indicar las matrices.

Organización del material

Este libro está organizado en 8 capítulos. Adicionalmente en el sitio web encontrará material en español sobre temas avanzados de vibraciones mecánicas (capítulos 9 a 12) y apéndices (también en español), así como un par de capítulos en inglés (13 y 14). Se asume que el lector tiene conocimientos básicos sobre estática, dinámica, resistencia de materiales y ecuaciones diferenciales. Aun cuando es deseable un cierto conocimiento de la teoría de matrices y la transformada de Laplace, en los apéndices C y D (en el sitio web) se hace un repaso general de estos temas.

El capítulo 1 inicia con una breve semblanza de la historia e importancia de las vibraciones, y aborda el modelado de sistemas prácticos para el análisis de la vibración junto con los diversos pasos implicados. Se describen las partes elementales de un sistema sometido a vibración, como son rigidez, amortiguamiento y masa (inercia). Se presentan los conceptos básicos y la terminología que se utiliza en el análisis de vibraciones. El capítulo 2 aborda la vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad sometidos a traslación y torsión viscosamente amortiguados y no amortiguados. Se analiza, además, la representación gráfica de las raíces características y las soluciones correspondientes, las variaciones de parámetro y las representaciones del lugar geométrico de las raíces. Aun cuando el método del lugar geométrico de las raíces se utiliza en sistemas de control, su uso en la vibración se ilustra en este capítulo. También se considera la respuesta bajo amortiguación histerética y de Coulomb. En el capítulo 3 se estudian las respuestas amortiguada y no amortiguada de sistemas de un solo grado de libertad a excitaciones armónicas. Se delinean los conceptos de fuerza y transmisibilidades de desplazamiento y su aplicación en sistemas prácticos. También se presenta el método de función de transferencia, la solución mediante la transformada de Laplace de problemas de vibración forzada, la respuesta de frecuencia y el diagrama de Bode.

El capítulo 4 se ocupa de la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad bajo una función forzada general. Los roles de la expansión de la serie de Fourier de una función periódica, la integral de convolución, la transformada de Laplace y los métodos numéricos se describen con ejemplos ilustrativos. También se analiza la especificación de la respuesta de un

sistema subamortiguado en función de tiempo pico, tiempo de elevación y tiempo de asentamiento. En el capítulo 5 se considera la vibración libre y forzada de sistemas de dos grados de libertad. Se analiza la vibración autoexcitada y la estabilidad del sistema. El método de la función de transferencia y la solución por medio de la transformada de Laplace también se presentan con ejemplos ilustrativos. En el capítulo 6 veremos la vibración de sistemas de varios grados de libertad y los métodos de análisis matriciales que se utilizan para presentar la teoría. En este mismo capítulo se describe el procedimiento de análisis modal para la solución de problemas de vibración forzada. Los diversos métodos para determinar frecuencias naturales y formas de modo de sistemas discretos se delinean en el capítulo 7. Los métodos de Dunkerley, Rayleigh, Holzer, Jacobi e iteraciones matriciales se explican aportando ejemplos numéricos. El capítulo 8 aborda los diversos aspectos de control de vibración, entre ellos los problemas de eliminación, aislamiento y absorción. El nomógrafo de vibración y los criterios de vibración, los cuales indican los niveles aceptables de vibración, también se presentan aquí. El balanceo de máquinas rotatorias y reciprocantes y la formación de remolinos de flechas se consideran. También se describen las técnicas de control activas para controlar la respuesta de sistemas vibratorios.

Material en español en el sitio web
Mientras que las ecuaciones de movimiento de sistemas discretos aparecen en la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias, las de los sistemas continuos y distribuidos aparecen en la forma de ecuaciones diferenciales parciales. El análisis de la vibración de sistemas continuos, como cuerdas, barras, flechas, vigas y membranas, se presenta en el capítulo 9. El método de separación de variables se presenta para la solución de ecuaciones diferenciales parciales asociadas con sistemas continuos. Los métodos de Rayleigh y Rayleigh-Ritz para encontrar las frecuencias naturales aproximadas también se describen con ejemplos. Los métodos experimentales que se utilizan para medir la respuesta de la vibración se consideran en el capítulo 10, y se describen técnicas de análisis de señales y el equipo de medición de vibración. También se presentan técnicas de monitoreo y diagnóstico de la condición de máquinas.

El capítulo 11 presenta varias técnicas de integración numéricas para determinar la respuesta dinámica de sistemas discretos y continuos. Se analizan e ilustran los métodos de diferencia central, los de Runge-Kutta, Houbolt, Wilson y Newmark. El análisis de elementos finitos, con aplicaciones que implican elementos unidimensionales, se aborda en el capítulo 12. Se utilizan elementos de barra, varilla y viga para el análisis estático y dinámico de armaduras, varillas sometidas a torsión y vigas. En este capítulo también se aborda el uso de matrices de masa concentrada y de masa consistente en el análisis de vibración. Los problemas de vibración no lineal regidos por ecuaciones diferenciales no lineales presentan fenómenos que no aparecen en los problemas linealizados correspondientes.

Los apéndices A y B se enfocan en las relaciones matemáticas y en la deflexión de vigas y placas. Los fundamentos de la teoría de matrices, la transformada de Laplace y las unidades SI se tratan en los apéndices C, D y E. Por último, el apéndice F ofrece una introducción a la programación con MATLAB.

Material en inglés en el sitio web
En el capítulo 13 se proporciona un tratamiento introductorio de vibración no lineal, con un análisis de oscilaciones subarmónicas y superarmónicas, ciclos límite, sistemas con coeficientes dependientes del tiempo y caos. La vibración aleatoria de sistemas de vibración lineal se considera en el capítulo 14. En este capítulo también se aplican los conceptos de proceso aleatorio, proceso estacionario, densidad espectral de potencia, así como autocorrelación y procesos de banda ancha y angosta, sin dejar de considerar la respuesta de vibración aleatoria de sistemas de uno y varios grados de libertad.

Temario típico

El libro proporciona opciones flexibles para diferentes tipos de cursos sobre vibración. Los capítulos 1 a 5, el capítulo 8, y partes del 6, constituyen un curso básico de vibración mecánica. Puede darse diferente énfasis y orientación al curso si se hace una cobertura adicional de diferentes capítulos como se indica a continuación:

- El capítulo 9 para sistemas continuos o distribuidos.
- Los capítulos 7 y 11 para soluciones numéricas.
- El capítulo 12 para análisis de elementos finitos.

Qué esperar de este curso

El material que se presenta en el texto ayuda a lograr algunos de los resultados especificados por la ABET (Accreditation Board for Engineering and Technology):

- Capacidad de aplicar el conocimiento de matemáticas, ciencia e ingeniería:
  El tema de vibración, tal como se presenta en el libro, aplica conocimientos de matemáticas (ecuaciones diferenciales, álgebra matricial, métodos vectoriales y números complejos) y ciencia (estática y dinámica) para resolver problemas de vibración de ingeniería.
- Capacidad de identificar, formular y resolver problemas de ingeniería:
  Numerosos problemas ilustrativos, problemas de práctica y proyectos de diseño ayudan al estudiante a identificar varios tipos de problemas de vibración prácticos y a desarrollar, analizar y resolver modelos matemáticos para hallar la respuesta e interpretar los resultados.
- Capacidad de utilizar las técnicas, habilidades y herramientas modernas necesarias para la práctica de ingeniería.
- La última sección de cada capítulo ilustra la aplicación del moderno software, MATLAB, para la solución de problemas de vibración. Los fundamentos de programación MATLAB se resumen en el apéndice F.
- El uso de la moderna técnica de análisis, el método del elemento finito, para la solución de problemas de vibración se aborda en un capítulo aparte (capítulo 12). El método de los elementos finitos es una técnica de amplio uso en la industria del modelado, análisis y solución de sistemas vibratorios complejos.
- Capacidad de diseñar y realizar experimentos, así como de analizar e interpretar datos:

  Los métodos experimentales y el análisis de datos relacionados con la vibración se presentan en el capítulo 10. También se analiza el equipo que se utiliza en la realización de experimentos de vibración, y se aborda el análisis de señales e identificación de los parámetros del sistema a partir de los datos.

RECONOCIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento a los muchos estudiantes, investigadores y profesores cuyos comentarios me han ayudado a mejorar el libro. Me siento sumamente agradecido con las siguientes personas por sus comentarios, sugerencias e ideas:

Ara Arabyan, University of Arizona; Daniel Granger, Polytechnic School of Montreal, Canadá; K.M. Rao, V.R.S. Engineering College Vijayawada, India; K. S. Shivakumar Aradhya, Gas Turbine Research Establishment, Bangalore, India; Donald G. Grant, University of Maine; Tom Thornton, Analista de Esfuerzo: Alejandro J. Rivas, Arizona State University; Qing Guo, University of Washington; James M. Widmann. California Polytechnic State University; G. Q. Cai, Florida Atlantic University; Richard Alexander, Texas A & M University; C. W. Bert, University of Oklahoma; Raymond M. Brach, University of Notre Dame; Alfonso Diaz-Jimenez, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Colombia; George Doyle, University of Dayton; Hamid Hamidzadeh, South Dakota State University; H. N. Hashemi, Northeastern University; Zhikun Hou, Worchester Polytechnic Institute; J. Richard Houghton, Tennessee Technological University; Faryar Jabbari, University of California, Irvine; Robert Jeffers, University of Connecticut; Richard Keltie, North Carolina State University; J. S. Lamancusa, Pennsylvania State University; Harry Law, Clemson University; Robert Leonard, Virginia Polytechnic Institute and State University; James Li, Columbia University; Sameer Madanshetty, Boston University; Masoud Mojtahed, Purdue University, Calumet; Faissal A. Moslehy, University of Central Florida; M. G. Prasad, Stevens Institute of Technology; Mohan D. Rao, Michigan Tech; Amir G. Rezaei, California State Polytechnic University; F. P. J. Rimrott, University of Toronto; Subhash Sinha, Auburn University; Daniel Stutts, University of Missouri-Rolla; Massoud Tavakoli, Georgia Institute of Technology; Theodore Terry, Lehigh University; David F. Thompson, University of Cincinnati; Chung Tsui, University of Maryland, College Park; Alexander Vakakis, University of Illinois, Urbana, Champaign; Chuck Van Karsen, Michigan Technological University; Aleksandra Vinogradov, Montana State University; K. W. Wang, Pennsylvania State University; Gloria J. Wiens, University of Florida, y William Webster, GMI Engineering and Management Institute.

Quiero dar las gracias a la Universidad de Purdue por permitirme utilizar el Boilermaker Special en el problema 2.104. Mis sinceras gracias al Dr. Qing Liu por ayudarme a escribir algunos de los programas MATLAB. Por último, deseo darle las gracias a mi esposa, Kamala, sin cuya paciencia, motivación y apoyo esta edición nunca se hubiera podido terminar.

SINGIRESU S. RAO
srao@miami.edu

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado	Sistema inglés	Sistema Internacional
$a, a_0, a_1, a_2, \ldots$	constantes, longitudes		
a_{ij}	coeficiente de flexibilidad	pulg/lb	m/N
$[a]$	matriz de flexibilidad	pulg/lb	m/N
A	área	pulg^2	m^2
$A, A_0, A_1, \ldots$	constantes		
$b, b_1, b_2, \ldots$	constantes, longitudes		
$B, B_1, B_2, \ldots$	constantes		
$\vec{B}$	peso de balanceo	Ib	N
$c, \underset{\sim}{c}$	coeficiente de amortiguación viscosa	lb-s/pulg	$\mathrm{N \cdot s/m}$
$c, c_0, c_1, c_2, \ldots$	constantes		
c	velocidad de onda	pulg/s	m/s
c_c	constante de amortiguación viscosa crítica	lb-s/pulg	$\mathrm{N \cdot s/m}$
c_i	constante de amortiguación del amortiguador i-ésimo	lb-s/pulg	$\mathrm{N \cdot s/m}$
c_{ij}	coeficiente de amortiguación	lb-s/pulg	$\mathrm{N \cdot s/m}$
$[c]$	matriz de amortiguación	lb-s/pulg	$\mathrm{N \cdot s/m}$
C, C_1, C_2, C_1', C_2'	constantes		
d	diámetro, dimensión	pulg	m
D	diámetro	pulg	m
$[D]$	matriz dinámica	s^2	s^2
e	base de logaritmos naturales		
e	excentricidad	pulg	m
$\vec{e}_x, \vec{e}_y$	vectores unitarios paralelos a las direcciones x y y		
E	Módulo de Young	lb/pulg^2	Pa
$E[x]$	valor esperado de x		
f	frecuencia lineal	Hz	Hz
f	fuerza por unidad de longitud	lb/pulg	N/m
$\underset{\sim}{f}, \boldsymbol{f}$	impulso unitario	lb-s	$\mathrm{N \cdot s}$
F, F_d	fuerza	Ib	N
F_0	amplitud de fuerza $F(t)$	Ib	N

Símbolo	Significado	Sistema inglés	Sistema Internacional
F_t, F_T	fuerza transmitida	Ib	N
F_t	fuerza que actúa en la masa *i*-ésima	Ib	N
$\vec{F}$	vector de fuerza	Ib	N
$\underset{\sim}{F}, \boldsymbol{F}$	impulso	lb-s	N · s
g	aceleración debida a la gravedad	pulg/s^2	m/s^2
$g(t)$	función de respuesta al impulso		
G	módulo de cortante	lb/pulg^2	N/m^2
h	constante de amortiguación de histéresis	lb/pulg	N/m
$H(i\omega)$	función de respuesta de frecuencia		
i	$\sqrt{-1}$		
I	momento de inercia de área	pulg^4	m^4
$[I]$	matriz identidad		
Im()	parte imaginaria de ()		
j	entero		
J	momento polar de inercia	pulg^4	m^4
$J, J_0, J_1, J_2, \ldots$	momento de inercia de masa	lb-pulg/s^2	kg · m^2
$k, \underset{\sim}{k}$	constante de resorte	lb/pulg	N/m
k_i	constante de resorte del resorte *i*-ésimo	lb/pulg	N/m
k_t	constante de resorte torsional	lb-pulg/rad	N-m/rad
k_{ij}	coeficiente de rigidez	lb/pulg	N/m
$[k]$	matriz de rigidez	lb/pulg	N/m
l, l_i	longitud	pulg	m
$m, \underset{\sim}{m}$	masa	lb-s^2/pulg	kg
m_i	masa *i*-ésima	lb-s^2/pulg	kg
m_{ij}	coeficiente de masa	lb-s^2/pulg	kg
$[m]$	matriz de masa	lb-s^2/pulg	kg
M	masa	lb-s^2/pulg	kg
M	momento de flexión	lb-pulg	N · m
$M_t, M_{t1}, M_{t2}, \ldots$	par de torsión	lb-pulg	N · m
M_{t0}	amplitud de $M_t(t)$	lb-pulg	N · m
n	un entero		
n	número de grados de libertad		
N	fuerza normal	Ib	N
N	total de escalones de tiempo		
p	presión	lb/pulg^2	N/m^2
$p(x)$	función de densidad de probabilidad de x		
$P(x)$	función de distribución de probabilidad de x		
P	fuerza, tensión	Ib	N
q_j	coordenada generalizada *j*-ésima		
$\vec{q}$	vector de desplazamientos generalizados		
$\dot{\vec{q}}$	vector de velocidades generalizadas		
Q_j	fuerza generalizada *j*-ésima		
r	relación de frecuencia $= \omega/\omega_n$		
$\vec{r}$	vector radio	pulg	m

Símbolo	Significado	Sistema inglés	Sistema Internacional
$Re(\ )$	parte real de ( )		
$R(\tau)$	función de autocorrelación		
R	resistencia eléctrica	ohm	ohm
R	función de disipación de Rayleigh	lb-pulg/s	$\mathrm{N \cdot m/s}$
R	cociente de Rayleigh	$1/\mathrm{s}^2$	$1/\mathrm{s}^2$
s	raíz de ecuación, variable de Laplace		
S_a, S_d, S_v	aceleración, desplazamiento, espectro de velocidad		
$S_x(\omega)$	espectro de x		
t	tiempo	s	s
t_i	estación de tiempo i-ésimo	s	s
T	par de torsión	lb-pulg	N-m
T	energía cinética	pulg-lb	J
T_i	energía cinética de la masa i-ésima	pulg-lb	J
T_d, T_f	desplazamiento, transmisibilidad de fuerza		
u_{ij}	un elemento de matriz $[U]$		
U, U_i	desplazamiento axial	pulg	m
U	energía potencial	pulg-lb	J
$\vec{U}$	peso desbalanceado	Ib	N
$[U]$	matriz triangular superior		
v, v_0	velocidad lineal	pulg/s	m/s
V	fuerza cortante	Ib	N
V	energía potencial	pulg-lb	J
V_i	energía potencial del resorte i-ésimo	pulg-lb	J
w, w_1, w_2, ω_i	deflexiones transversales	pulg	m
w_0	valor de w cuando $t = 0$	pulg	m
$\dot{w}_0$	valor de $\dot{w}$ cuando $t = 0$	pulg/s	m/s
w_n	modo *en*ésimo de vibración		
W	peso de una masa	Ib	N
W	energía total	pulg-lb	J
W	deflexión transversal	pulg	m
W_i	valor de W cuando $t = t_i$	pulg	m
$W(x)$	una función de x		
x, y, z	coordenadas cartesianas, desplazamientos	pulg	m
$x_0, x(0)$	valor de x cuando $t = 0$	pulg	m
$\dot{x}_0, \dot{x}(0)$	valor de $\dot{x}$ cuando $t = 0$	pulg/s	m/s
x_j	desplazamiento de la masa j-ésima	pulg	m
x_j	valor de x cuando $t = t_j$	pulg	m
$\dot{x}_j$	valor de $\dot{x}$ cuando $t = t_j$	pulg/s	m/s
x_h	parte homogénea de $x(t)$	pulg	m
x_p	parte particular de $x(t)$	pulg	m
$\vec{x}$	vector de desplazamientos	pulg	m
$\vec{x}_i$	valor de cuando $t = t_i$	pulg	m
$\dot{\vec{x}}_i$	valor de $\vec{x}$ cuando $t = t_i$	pulg/s	m/s
$\ddot{\vec{x}}_i$	valor de $\dot{\vec{x}}$ cuando $t = t_i$	$\mathrm{pulg/s}^2$	$\mathrm{m/s}^2$

Símbolo	Significado	Sistema inglés	Sistema Internacional
$\vec{x}^{(i)}(t)$	modo i-ésimo		
X	amplitud de $x(t)$	pulg	m
X_j	amplitud de $x_j(t)$	pulg	m
$\vec{X}^{(i)}$	vector modal i-ésimo	pulg	m
$X_i^{(j)}$	componente i-ésimo de modo j-ésimo	pulg	m
$[X]$	matriz modal	pulg	m
$\vec{X}_r$	aproximación r-ésima a un modo		
y	desplazamiento de base	pulg	m
Y	amplitud de $y(t)$	pulg	m
z	desplazamiento relativo, $x - y$	pulg	m
Z	amplitud de $z(t)$	pulg	m
$Z(i\omega)$	impedancia mecánica	lb/pulg	N/m
α	ángulo, constante		
β	ángulo, constante		
β	constante de amortiguamiento de histéresis		
γ	peso específico	lb/pulg^3	N/m^3
δ	decremento logarítmico		
$\delta_1, \delta_2, \ldots$	deflexiones	pulg	m
δ_{est}	deflexión estática	pulg	m
δ_{ij}	delta Kronecker		
Δ	determinante		
ΔF	incremento de F	Ib	N
Δx	incremento de x	pulg	m
Δt	incremento del tiempo t	s	s
ΔW	energía disipada en un ciclo	pulg-lb	J
ε	una pequeña cantidad		
ε	deformación		
ζ	relación de amortiguamiento		
θ	constante, desplazamiento angular		
θ_i	desplazamiento angular i-ésimo	rad	rad
θ_0	valor de θ cuando $t = 0$	rad	rad
$\dot{\theta}_0$	valor de $\dot{\theta}$ cuando $t = 0$	rad/s	rad/s
Θ	amplitud de $\theta\ (t)$	rad	rad
Θ_i	amplitud de $\theta_i(t)$	rad	rad
λ	valor eigen $= 1/\omega^2$	s^2	s^2
$[\lambda]$	matriz de transformación		
μ	viscosidad de un fluido	lb-s/pulg^2	kg/m · s
μ	coeficiente de fricción		
μ_x	valor esperado de x		
ρ	densidad de masa	lb-s^2/pulg^4	kg/m^3
η	factor de pérdida		
σ_x	desviación estándar de x		
σ	esfuerzo	lb/pulg^2	N/m^2
τ	periodo de oscilación, tiempo, constante de tiempo	s	s

Símbolo	Significado	Sistema inglés	Sistemas Internacional
τ	esfuerzo cortante	lb/pulg^2	N/m^2
ϕ	ángulo, ángulo de fase	rad	rad
ϕ_i	ángulo de fase en el modo i-ésimo	rad	rad
ω	frecuencia de oscilación	rad/s	rad/s
ω_i	frecuencia natural i-ésima	rad/s	rad/s
ω_n	frecuencia natural	rad/s	rad/s
ω_d	frecuencia de vibración amortiguada	rad/s	rad/s

Subíndices

Símbolo	Significado
cri	valor crítico
eq	valor equivalente
i	valor i-ésimo
L	plano izquierdo
máx	valor máximo
n	correspondiente a la frecuencia natural
R	plano derecho
0	valor específico o de referencia
t	torsional

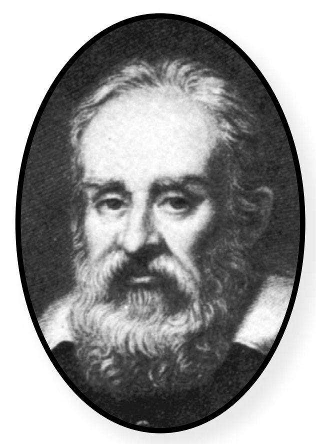
Operaciones

Símbolo	Significado
$(\dot{\ })$	$\frac{d(\ )}{dt}$
$(\ddot{\ })$	$\frac{d^2(\ )}{dt^2}$
$(\vec{\ })$	vector columna ( )
[ ]	matriz
$[\ ]^{-1}$	inversa de [ ]
$[\ ]^T$	transpuesta de [ ]
$\Delta(\ )$	incremento de ( )
$\mathscr{L}(\ )$	transformada de Laplace de ( )
$\mathscr{L}^{-1}(\ )$	transformada inversa de Laplace ( )

VIBRACIONES MECÁNICAS

CAPÍTULO 1

Fundamentos de vibración



Galileo Galilei
(1564-1642)

Este astrónomo italiano, filósofo y profesor de matemáticas en las universidades de Pisa y Padua, fue, en 1609, el primer hombre que apuntó un telescopio hacia el cielo. En 1590, escribió el primer tratado de dinámica moderna. Sus obras respecto a las oscilaciones de un péndulo simple y la vibración de las cuerdas son de importancia fundamental en la teoría de las vibraciones. [Cortesía de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics* (2a. ed. rev.), Dover Publications, Inc., Nueva York, 1948].

Esquema del capítulo

Este capítulo presenta el tema de las vibraciones en una forma relativamente sencilla. Empieza con una breve historia del tema y luego presenta un examen de la importancia de la vibración. Los conceptos básicos de grados de libertad y de sistemas continuos y discretos se ofrecen junto con una descripción de las partes elementales de los sistemas vibratorios. Se indican las diversas clasificaciones de vibración, a saber: vibración libre y forzada; vibración no amortiguada y amortiguada; vibración lineal y no lineal, y vibración determinística y aleatoria. Se delinean y presentan asimismo las definiciones y los conceptos esenciales de vibración.

Se describe el concepto de movimiento armónico y su representación por medio de vectores y números complejos. Se aportan las definiciones y terminología básicas como ciclo, amplitud, periodo, frecuencia, ángulo de fase y frecuencia natural, relacionadas con el movimiento armónico. Al final se describe el análisis armónico, que tiene que ver con la representación de cualquier función periódica en términos de funciones armónicas, utilizando la serie de Fourier. Asimismo, se analizan en detalle los conceptos de espectro de frecuencia, representaciones en el dominio del tiempo y frecuencia de funciones periódicas, así como las expansiones de mediano intervalo y el cálculo numérico de coeficientes de Fourier.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Describir brevemente la historia de la vibración.
- Indicar la importancia del estudio de la vibración.
- Proporcionar varias clasificaciones de la vibración.
- Enunciar los pasos implicados en el análisis de la vibración.
- Calcular los valores de constantes de resorte, masas y constantes de amortiguamiento.
- Definir el movimiento armónico y diferentes posibles representaciones de movimiento armónico.
- Sumar y restar movimientos armónicos.
- Realizar la expansión de la serie de Fourier de funciones periódicas dadas.
- Determinar los coeficientes de Fourier numéricamente, aplicando el programa MATLAB.

1.1 Comentarios preliminares

El tema de la vibración se presenta aquí en una forma relativamente sencilla. El capítulo empieza con una breve historia de la vibración y continúa con un examen de su importancia. Se perfilan los diversos pasos que intervienen en el análisis de la vibración de un sistema de ingeniería y se presentan las definiciones y conceptos esenciales de la vibración. Aquí aprendemos que todos los sistemas mecánicos y estructurales se pueden modelar como sistemas de masa-resorte-amortiguador. En algunos sistemas, como en un automóvil, la masa, el resorte y el amortiguador se pueden identificar como componentes separados (la masa en la forma del cuerpo, el resorte en la suspensión y el amortiguador en la forma de los amortiguadores). En algunos casos, la masa, el resorte y el amortiguador no aparecen como componentes distintos, pues son inherentes e integrales al sistema. Por ejemplo, en el ala de un avión, la masa está distribuida en toda el ala. Incluso, debido a su elasticidad, el ala experimenta una notable deformación durante el vuelo, de modo que puede modelarse como un resorte. Además, la deflexión del ala introduce un efecto de amortiguamiento producido por el movimiento relativo entre componentes como juntas, conexiones y soportes, al igual que la fricción interna producida por defectos microestructurales del material. En el capítulo se describe el modelado de elementos de resorte,

masa y amortiguamiento, sus características y la combinación de varios resortes, masas o elementos de amortiguamiento que aparecen en un sistema. De allí se deriva una presentación del concepto de análisis armónico, el cual puede utilizarse para el análisis de movimientos periódicos generales. En este capítulo no se pretende agotar los temas; los capítulos siguientes desarrollarán con más detalle muchas de las ideas.

1.2 Breve historia del estudio de la vibración

1.2.1 Orígenes del estudio de la vibración

El interés en la vibración surge cuando se crean los primeros instrumentos musicales, probablemente silbatos o tambores. Desde entonces, tanto músicos como filósofos han buscado las reglas y las leyes de la producción del sonido, las han utilizado para mejorar los instrumentos musicales, y las han pasado de generación en generación. Ya en el año 4000 a.C. [1.1], la música había alcanzado un alto nivel de desarrollo y era muy apreciada por chinos, hindúes, japoneses y, quizá, los egipcios. Estos pueblos antiguos observaron ciertas reglas definidas que de alguna manera estaban relacionadas con el arte de la música, aunque su conocimiento no llegó a nivel de ciencia.

Es probable que los instrumentos musicales de cuerda se hayan originado en el arco del cazador, arma favorecida por los ejércitos del antiguo Egipto. Uno de los instrumentos de cuerda más primitivos, la *nanga*, se parece a un arpa de tres o cuatro cuerdas, y cada cuerda produce sólo una nota; en el Museo Británico se encuentra un ejemplar que data de 1500 años a.C. Ahí mismo se exhibe un arpa de 11 cuerdas, decorada en oro y con caja de resonancia en forma de cabeza de toro, la cual se encontró en Ur en una tumba real que data de aproximadamente 2600 años a.C. En los muros de tumbas egipcias con una antigüedad de 3000 años a.C. se hallaron pinturas de instrumentos de cuerda semejantes a arpas.

Nuestro sistema musical actual tiene sus bases en la civilización griega antigua. Se considera que el filósofo y matemático griego Pitágoras (582-507 a.C.) fue la primera persona que investigó el sonido musical con una base científica (figura 1.1). Entre otras cosas, Pitágoras realizó experimentos con una sola cuerda por medio de un aparato sencillo llamado monocordio. En el ejemplo que se muestra en la figura 1.2, los puentes de madera 1 y 3 están fijos. El puente 2 es movible en tanto que la tensión en la cuerda se mantiene constante mediante el peso colgante. Pitágoras observó que si se someten a la misma tensión dos cuerdas similares de diferentes longitudes, la más corta emite una nota más alta; además, si la cuerda más corta es de la mitad de la longitud de la más larga, la más corta emitirá una nota una octava arriba de la otra. Pitágoras no dejó ningún documento de su

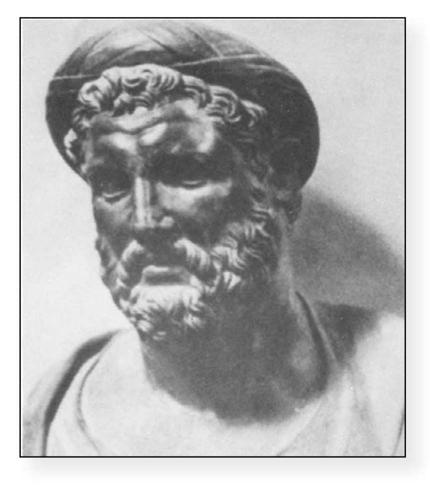


Figura 1.1 Pitágoras. (Reimpreso con permiso de I.E. Navia, *Pitágoras: An Annotated Bibliography*, Garland Publishing, Inc., Nueva York, 1990).

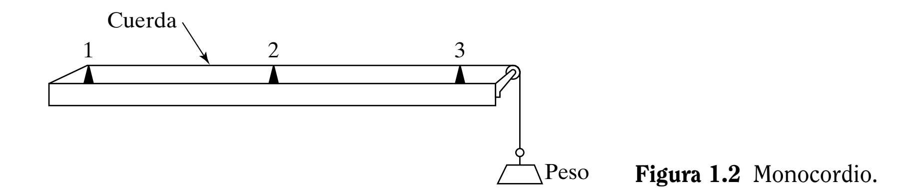


Figura 1.2 Monocordio.

trabajo (figura 1.3), pero ha sido descrito por otros. Aunque en el tiempo de Pitágoras se desarrolló el concepto de tono, la relación entre el tono y la frecuencia no se entendió sino hasta el tiempo de Galileo, en el siglo XVI.

Hacia 350 a.C, Aristóteles escribió tratados sobre música y sonido e hizo observaciones como "La voz es más dulce que el sonido de los instrumentos", y "El sonido de la flauta es más dulce que el de la lira". En 320 a.C., Aristógenes, alumno de Aristóteles y músico, escribió una obra en tres volúmenes titulada *Elementos de armonía*. Estos libros son quizá los más antiguos de que se disponga sobre la música y escritos por los investigadores mismos. Alrededor de 300 a.C., en un libro llamado *Introducción a la armonía*, Euclides escribió brevemente sobre la música pero sin hacer referencia alguna a la naturaleza física del sonido. Los griegos no lograron más avances en el conocimiento científico del sonido.

Parece que los romanos recibieron todo su conocimiento musical por parte de los griegos, excepto Vitruvio, famoso arquitecto romano que escribió alrededor del año 20 a.C. sobre las propiedades acústicas de los teatros. Su tratado *De Architectura Libri Decem* (*Diez libros sobre arquitectura*), estuvo perdido durante muchos años, y se habría de redescubrir sólo hasta el siglo XV. Al parecer, durante casi 16 siglos no hubo después del trabajo de Vitruvio ningún desarrollo en las teorías del sonido y la vibración.

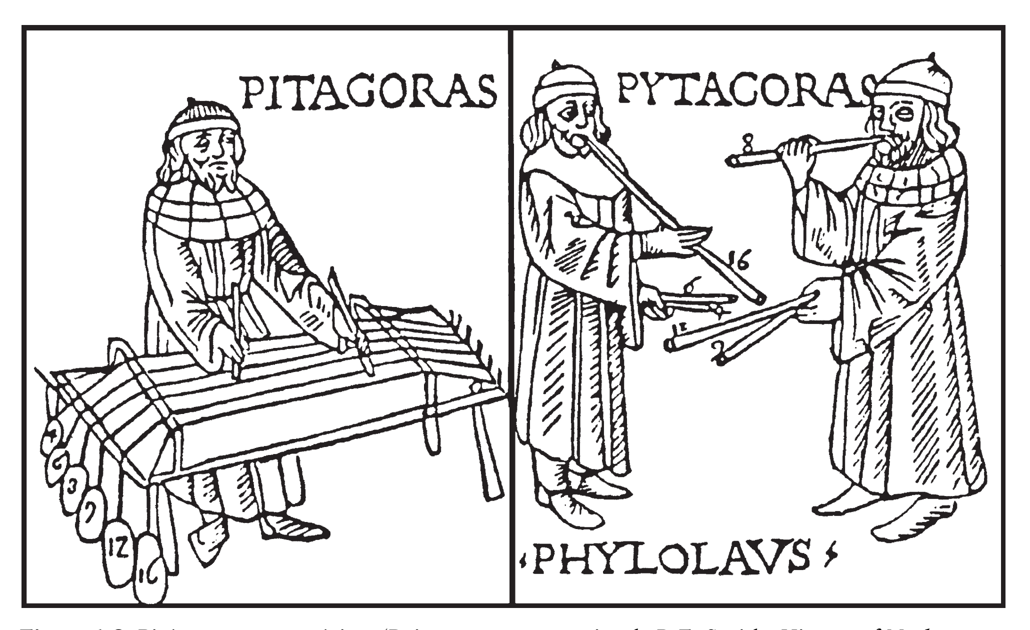


Figura 1.3 Pitágoras como músico. (Reimpreso con permiso de D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. I, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1958).

En la antigüedad, China experimentaba muchos sismos. Zhang Heng, que se desempeñó como historiador y astrónomo en el siglo II, percibió la necesidad de desarrollar un instrumento para medir los sismos con precisión. En el año 132 inventó el primer sismógrafo del mundo [1.3, 1.4], el cual estaba hecho de fino bronce fundido, con un diámetro de ocho chi (un chi equivale a 0.237 metros) y tenía la forma de una jarra de vino (figura 1.4). Dentro de la jarra había un mecanismo que consistía en un péndulo rodeado por un grupo de ocho palancas que apuntaban en ocho direcciones. En la parte externa del sismógrafo había ocho figuras de dragón, cada una con una bola de bronce en las fauces. Debajo de cada dragón había una rana con la boca abierta hacia arriba. Un sismo fuerte en cualquier dirección inclinaría el péndulo en esa dirección y activaría la palanca en la cabeza del dragón. Esto abría la boca del d ragón y la bola de bronce se soltaba y caía en la boca de la rana con un sonido metálico. Así, el sismógrafo permitía al personal de vigilancia saber tanto el tiempo como la dirección de la ocurrencia del sismo.

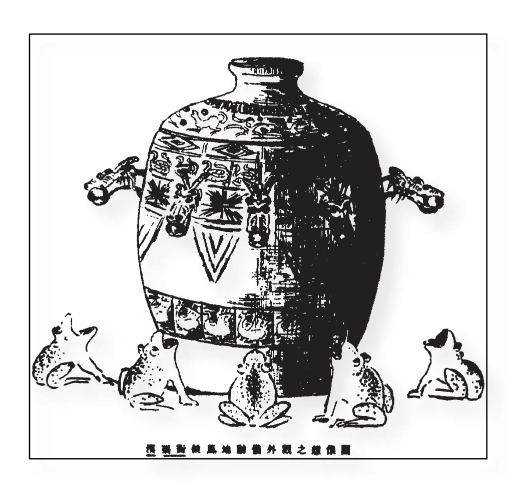


Figura 1.4 El primer sismógrafo del mundo inventado en China en el año 132 de nuestra era. (Reimpreso con permiso de R. Taton (ed.), *History of Science,* Basic Books, Inc., Nueva York, 1957).

1.2.2 De Galileo a Rayleigh

Se considera que Galileo Galilei (1564-1642) es el fundador de la ciencia experimental moderna. De hecho, a menudo al siglo XVII se le considera como el "siglo del genio" puesto que los cimientos de la filosofía y la ciencia modernas se sentaron durante ese periodo. Lo que motivó a Galileo a estudiar el comportamiento de un péndulo simple fue la observación de los movimientos de vaivén de una lámpara en una iglesia de Pisa. Un día, mientras se aburría durante un sermón, Galileo miraba hacia el techo de la iglesia. Una lámpara oscilante captó su atención. Comenzó a medir el periodo de los movimientos de péndulo de la lámpara con su pulso, y para su sorpresa se dio cuenta de que el tiempo era independiente de la amplitud de las oscilaciones. Esto lo llevó a realizar más experimentos con el péndulo simple. En su obra *Discorsi e dimostrazione matematiche in torno a due nuove scienze* (*Diálogos sobre dos nuevas ciencias*), publicada en 1638, Galileo analizó los cuerpos vibratorios. Describió la dependencia de la frecuencia de la vibración en la longitud de un péndulo simple, junto con el fenómeno de vibraciones simpáticas (resonancia). Los escritos de Galileo también indican que entendía con claridad la relación entre la frecuencia, la longitud, la tensión y la densidad de una cuerda vibratoria tensa [1.5]. Sin embargo, el primer informe correcto publicado de la vibración de cuerdas lo proporcionó el matemático y teólogo francés Mario Mersenne (1588-1648) en su libro *Harmonie universelle* (*Armonía universal*), publicado en 1636. Mersenne también midió, por primera vez, la frecuencia de vibración de una cuerda larga y a partir de ello pronosticó la frecuencia de una cuerda más corta de la misma densidad y tensión. Muchos consideran a Mersenne como el padre la acústica. A menudo se le acredita el descubrimiento de las leyes de las cuerdas vibratorias porque publicó los resultados en 1636, dos años antes que Galileo. Sin embargo, el

crédito le pertenece a Galileo, puesto que escribió las leyes muchos años atrás y su publicación fue prohibida por órdenes del Inquisidor de Roma hasta 1638.

Inspirada en el trabajo de Galileo, en 1657 se fundó la Academia del Cimento en Florencia; a ésta le siguieron las formaciones de la Royal Society of London en 1662, y la Paris Academie des Sciences en 1666. Más tarde, Robert Hooke (1635-1703) también realizó experimentos para determinar una relación entre el tono y la frecuencia de vibración de una cuerda. Sin embargo, Joseph Sauveur (1653-1716) investigó a fondo estos experimentos y acuñó la palabra "acústica" para la ciencia del sonido [1.6]. Sauveur en Francia y John Wallis (1616-1703) en Inglaterra observaron, de manera independiente, el fenómeno de las formas de modo, y encontraron que una cuerda tensa que vibra puede no tener movimiento en ciertos puntos, y un movimiento violento en puntos intermedios. Sauveur llamó *nodos* a los primeros puntos y *bucles* a los segundos. Se encontró que tales vibraciones tenían frecuencias más altas que la asociada con la vibración simple de la cuerda sin nodos. De hecho, se encontró que las altas frecuencias son múltiplos integrales de la frecuencia de vibración simple, y Sauveur llamó armónicos a las altas frecuencias y frecuencia fundamental a la frecuencia de una vibración simple. Sauveur también encontró que una cuerda puede vibrar sin varios de sus armónicos presentes al mismo tiempo. Además, observó el fenómeno del pulso cuando dos tubos de órgano de tonos levemente diferentes se hacen sonar juntos. En 1700, Sauveur calculó, mediante un método un tanto dudoso, la frecuencia de una cuerda tensada a partir de la comba medida de su punto medio.

Sir Isaac Newton (1642-1727) publicó en 1686 su obra monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Principios matemáticos de filosofía natural*), que describe la ley de la gravitación universal, así como las tres leyes del movimiento y otros descubrimientos. La segunda ley del movimiento de Newton es un lugar común en libros sobre vibraciones para derivar las ecuaciones de movimiento de un cuerpo que vibra. Brook Taylor (1685-1731), matemático inglés, halló en 1713 la solución teórica (dinámica) del problema de la cuerda vibratoria, y a su vez presentó el famoso teorema de Taylor sobre una serie infinita. La frecuencia natural de la vibración obtenida con la ecuación de movimiento derivada por Taylor concuerda con los valores experimentales observados por Galileo y Mersenne. El procedimiento adoptado por Taylor fue perfeccionado con la introducción de derivadas parciales en las ecuaciones de movimiento por Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D'Alembert (1717-1783) y Leonard Euler (1707-1783).

La posibilidad de que una cuerda vibre con varios de sus armónicos presentes al mismo tiempo (si el desplazamiento de cualquier punto en cualquier instante es igual a la suma algebraica de los desplazamientos de cada armónico) se comprobó con las ecuaciones dinámicas de Daniel Bernoulli en sus memorias, publicadas por la Academia Berlinesa en 1755 [1.7]. Esta característica se conoce como el principio de la coexistencia de pequeñas oscilaciones lo cual, en terminología actual, es el principio de superposición. Se comprobó que este principio es más valioso en el desarrollo de la teoría de vibraciones y condujo a la posibilidad de expresar cualquier función arbitraria (es decir, cualquier forma inicial de la cuerda) utilizando una serie infinita de senos y cosenos. Debido a esta implicación, D'Alembert y Euler dudaron de la validez de este principio. Sin embargo, J. B. J. Fourier (1768-1830) en su obra *Analytical Theory of Heat* en 1822 comprobó la validez de este tipo de expansión.

Joseph Lagrange (1736-1813) presentó la solución analítica de la cuerda vibratoria en sus memorias publicadas por la Academia de Turín en 1759. En su estudio, Lagrange supuso que la cuerda se componía de una infinidad de partículas de masa idéntica equidistantes, y estableció la existencia de varias frecuencias independientes iguales a la cantidad de partículas de masa. Cuando se permitió que la cantidad de partículas fuera infinita se encontró que las frecuencias resultantes eran las mismas que las frecuencias armónicas de la cuerda tensa. El método de establecer la ecuación diferencial del movimiento de una cuerda (llamada ecuación de onda), presentado en la mayoría de los libros actuales sobre teoría de la vibración, lo desarrolló por primera vez D'Alembert en sus memorias publicadas por la Academia de Berlín en 1750. La vibración de vigas delgadas apoyadas

y sujetas de diferentes maneras fue un estudio hecho por primera vez por Euler en 1744 y Daniel Bernoulli en 1751. Su método se conoce como teoría de vigas delgadas o de Euler-Bernoulli.

Charles Coulomb realizó estudios tanto teóricos como experimentales en 1784 sobre las oscilaciones torsionales de un cilindro de metal suspendido de un cable (figura 1.5). Al suponer que el par de torsión resistente del alambre torcido es proporcional al ángulo de torsión, dedujo la ecuación de movimiento para la vibración torsional del cilindro suspendido. Integrando la ecuación de movimiento, encontró que el periodo de oscilación es independiente del ángulo de torsión.

Hay un interesante relato en cuanto al desarrollo de la teoría de vibración de placas [1.8]. En 1802, el científico alemán E. F. F. Chladni (1756-1824) desarrolló el método de colocar arena sobre una placa vibratoria para hallar sus formas de modo y observó la belleza y complejidad de los patrones modales de las placas vibratorias. En 1809 la Academia Francesa invitó a Chladni a que hiciera una demostración de estos experimentos. Napoleón Bonaparte, quien asistió a la reunión, se impresionó muchísimo y donó 3 000 francos a la academia para que se otorgaran a la primera persona que elaborara una teoría matemática satisfactoria de la vibración de placas. Cerca de la fecha límite de la competencia, en octubre de 1811, sólo un candidato, Sophie Germain, había entrado al concurso. Pero Lagrange, que era uno de los jueces, descubrió un error en la derivación de su ecuación diferencial de movimiento. La academia abrió de nuevo la competencia, con una nueva fecha límite para octubre de 1813. Sophie Germain entró de nuevo al concurso y presentó la forma correcta de la ecuación diferencial. Sin embargo, la academia no le otorgó el premio porque el juez deseaba una justificación física de las suposiciones hechas en su derivación. La competencia se abrió una vez más. En 1815, en su tercer intento, Sophie Germain obtuvo por fin el premio aun cuando los jueces no se sintieran del todo satisfechos con su teoría. De hecho, más tarde se encontró que la ecuación diferencial era correcta pero las condiciones límite eran erróneas. En 1850, G. R. Kirchhoff (1824-1887) dio las condiciones límite correctas para la vibración de las placas.

Mientras tanto, el problema de vibración de una membrana flexible rectangular, lo cual es importante para entender el sonido emitido por tambores, fue resuelto por primera vez por Simeon Poisson (1781-1840). La vibración de una membrana circular fue estudiada en 1862 por R. F. A. Clebsch (1833-1872). Después de esto, se realizaron estudios de vibración en varios sistemas

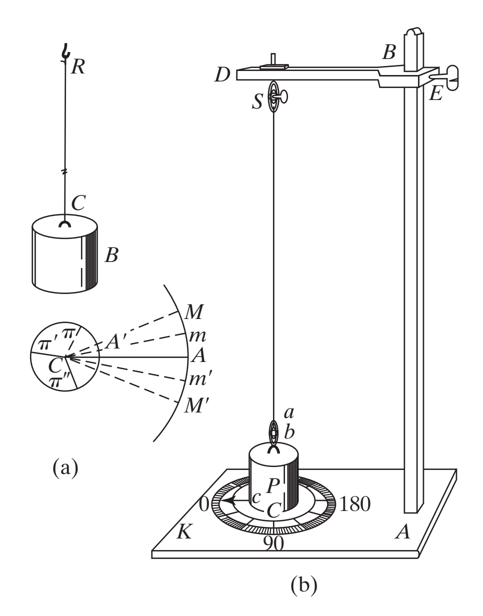


Figura 1.5 Dispositivo de Coulomb para pruebas de vibración torsional. (Reimpreso con permiso de S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1953).

mecánicos y estructurales prácticos. En 1877 Lord Baron Rayleigh publicó su libro sobre la teoría del sonido [1.9], obra considerada un clásico en materia de sonido y vibración incluso en la actualidad. Notable entre las muchas contribuciones de Rayleigh es el método de encontrar la frecuencia de vibración fundamental de un sistema conservador al aplicar el principio de conservación de la energía, ahora conocido como método de Rayleigh. Este método resultó ser una técnica útil para la solución de problemas de vibración difíciles. Una extensión del método, la cual puede utilizarse para descubrir múltiples frecuencias naturales, se conoce como método de Rayleigh-Ritz.

1.2.3 Contribuciones recientes

En 1902, Frahm investigó la importancia del estudio de la vibración torsional en el diseño de flechas de hélice de buques de vapor. El absorbedor de vibración dinámica, el cual implica la adición de un sistema de resorte y masa secundario para eliminar las vibraciones de un sistema principal, también fue propuesto por Frahm en 1909. Entre los contribuyentes modernos a la teoría de vibraciones, los nombres de Stodola, De Laval, Timoshenko y Mindlin son notables. Aurel Stodola (1859-1943) contribuyó al estudio de vibración de vigas, placas y membranas. Desarrolló un método para analizar vigas vibratorias que también es aplicable a aspas de turbina. Dándose cuenta de que todos los propulsores principales producen problemas de vibración, C. G. P. De Laval (1845-1913) presentó una solución práctica al problema de la vibración de un disco rotatorio desbalanceado. Después de observar las fallas de las flechas de acero en turbinas de alta velocidad utilizó una caña de pescar de bambú como flecha para montar el rotor. Observó que este sistema no sólo eliminaba la vibración del rotor desbalanceado sino que también sobrevivía a velocidades hasta de 100 000 rpm [1.10].

Stephen Timoshenko (1878-1972), al considerar los efectos de la deformación producida por inercia y cortante rotatorios, presentó una teoría mejorada de vibración de vigas, la cual se conoce como teoría de Timoshenko, o de vigas gruesas. R. D. Mindlin presentó una teoría parecida para analizar la vibración de placas gruesas, incluidos los efectos de deformación por inercia y cortante rotatorios.

Se sabe desde hace mucho tiempo que los problemas básicos de mecánica, entre ellos los de las vibraciones, son no lineales. Aun cuando los tratamientos lineales adoptados son bastante satisfactorios en la mayoría de los casos, no son adecuados en todos. En sistemas no lineales pueden ocurrir fenómenos que son teóricamente imposibles en sistemas lineales. La teoría matemática de vibraciones no lineales comenzó a desarrollarse en los trabajos de Poincaré y Lyapunov a fines del siglo XIX. Poincaré desarrolló el método de perturbación en 1892 en relación con la solución aproximada de problemas de mecánica celestial no lineales. En 1892, Lyapunov sentó los cimientos de la teoría de estabilidad moderna, la cual es aplicable a todos los tipos de sistemas dinámicos. Después de 1920, los estudios emprendidos por Duffing y van der Pol presentaron las primeras soluciones definidas a la teoría de vibraciones no lineales y señalaron su importancia en el campo de la ingeniería. En los últimos 40 años, autores como Minorsky y Stoker se han esforzado por reunir en monografías los resultados más importantes en relación con las vibraciones no lineales. La mayoría de las aplicaciones prácticas de la vibración no lineal implicaban el uso de algún tipo de método de teoría de la perturbación. Nayfeh investigó los métodos modernos de la teoría de la perturbación [1.11].

En diversos fenómenos como sismos, vientos, transporte de mercancías sobre vehículos de ruedas y el ruido producido por cohetes y motores de reacción, se presentan características aleatorias. Se hizo necesario idear conceptos y métodos de análisis de vibración de estos efectos aleatorios. Aunque en 1905 Einstein consideró el movimiento browniano, un tipo particular de vibración aleatoria, ninguna aplicación se investigó sino hasta 1930. La introducción de la función de correlación por Taylor en 1920, y la densidad espectral por Wiener y Khinchin a principios de la década de 1930, permitieron el avance de esta teoría. Artículos de Lin y Rice, publicados entre 1943 y 1945, allanaron el

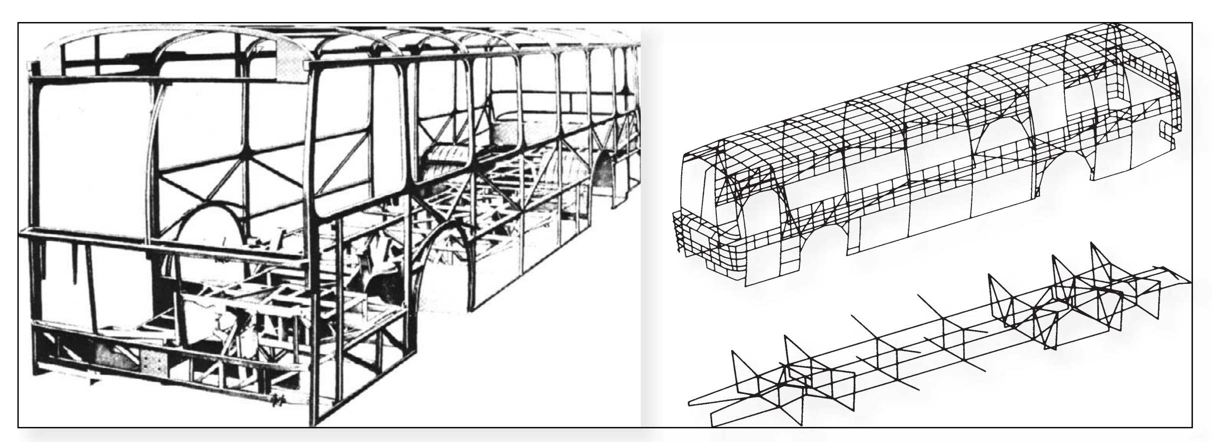


Figura 1.6 Idealización del elemento finito de la carrocería de un autobús. (Reimpresa con permiso de © 1974 Society of Automotive Engineers, Inc.).

camino para la aplicación de vibraciones aleatorias a problemas prácticos de ingeniería. Las monografías de Crandall y Mark, así como de Robson, sistematizaron el conocimiento existente de la teoría de vibraciones aleatorias [1.12, 1.13].

Hasta hace aproximadamente 40 años, los estudios de vibración, incluso los que tienen que ver con sistemas de ingeniería complejos, se realizaron utilizando modelos brutos, con sólo unos cuantos grados de libertad. Sin embargo, el advenimiento de computadoras de alta velocidad en la década de 1950 hicieron posible tratar sistemas moderadamente complejos y generar soluciones aproximadas en forma semidefinida, con métodos de solución clásicos y la evaluación numérica de ciertos términos que pueden expresarse en forma cerrada. El desarrollo simultáneo del método del elemento finito permitió a los ingenieros utilizar computadoras digitales para realizar el análisis de vibración numéricamente detallado de sistemas mecánicos, vehiculares y estructurales que despliegan miles de grados de libertad [1.14]. Aun cuando el método del elemento finito no fue nombrado así hasta hace poco, el concepto se ha utilizado desde hace siglos. Por ejemplo, los matemáticos antiguos encontraron la circunferencia de un círculo aproximándolo como un polígono, donde cada lado de éste, en notación actual, puede llamarse elemento finito. El método del elemento finito tal como se le conoce en la actualidad fue presentado por Turner, Clough, Martin y Topp en conexión con el análisis de estructuras de avión [1.15]. La figura 1.6 muestra la idealización del elemento finito de la carrocería de un autobús [1.16].

1.3 Importancia del estudio de la vibración

La mayoría de las actividades humanas implican vibración en una u otra forma. Por ejemplo, oímos porque nuestros tímpanos vibran y vemos porque las ondas luminosas vibran. La respiración está asociada con la vibración de los pulmones y el caminar implica el movimiento oscilatorio (periódico) de piernas y manos. El habla humana requiere el movimiento oscilatorio de la laringe (y la lengua) [1.17]. Los eruditos antiguos en el campo de la vibración concentraron sus esfuerzos en la comprensión de los fenómenos naturales y el desarrollo de las teorías matemáticas para describir la vibración de sistemas físicos. En años recientes, muchas aplicaciones de la vibración en el campo de la ingeniería han motivado a los investigadores, entre ellas el diseño de máquinas, cimientos, estructuras, motores, turbinas y sistemas de control.

La mayoría de los propulsores principales experimentan problemas vibratorios debido al desequilibrio inherente en los motores. El desequilibrio puede deberse al diseño defectuoso o a una fabricación deficiente. El desequilibrio en motores diesel, por ejemplo, puede provocar ondas terrestres suficientemente poderosas como para provocar molestias en áreas urbanas. Las ruedas de algunas locomotoras pueden alzarse más de un centímetro de la vía a altas velocidades debido al desequilibrio. En turbinas, las vibraciones provocan fallas mecánicas espectaculares. Los ingenieros aún no han sido capaces de evitar las fallas a consecuencia de las vibraciones de aspas y discos en turbinas. Naturalmente, las estructuras diseñadas para soportar máquinas centrífugas pesadas como motores y turbinas, o máquinas reciprocantes como motores de vapor y de gasolina, también se ven sometidas a vibración. En todas estas situaciones, el componente de la estructura o máquina sometido a vibración puede fallar debido a fatiga del material producida por la variación cíclica del esfuerzo inducido. Además, la vibración provoca un desgaste más rápido de las partes de la máquina como cojinetes y engranes e incluso produce ruido excesivo. En máquinas, la vibración puede aflojar los sujetadores, como las tuercas. En procesos de corte de metal, la vibración puede provocar rechinidos, lo cual conduce a un acabado deficiente de la superficie.

Siempre que la frecuencia natural de la vibración de una máquina o de una estructura coincide con la frecuencia de la excitación externa se presenta un fenómeno conocido como *resonancia*, el cual conduce a deflexiones y fallas excesivas. La literatura abunda en relatos de fallas de sistemas provocadas por resonancia y vibración excesiva de los componentes y sistemas (vea la figura 1.7). Debido a los devastadores efectos que las vibraciones pueden tener en máquinas y estructuras, las pruebas de vibración [1.18] se volvieron un procedimiento estándar en el diseño y desarrollo de la mayoría de los sistemas de ingeniería (vea la figura 1.8).

En muchos sistemas de ingeniería, un ser humano actúa como una parte integral del sistema. La transmisión de vibraciones a los seres humanos provoca molestias y pérdida de eficiencia.

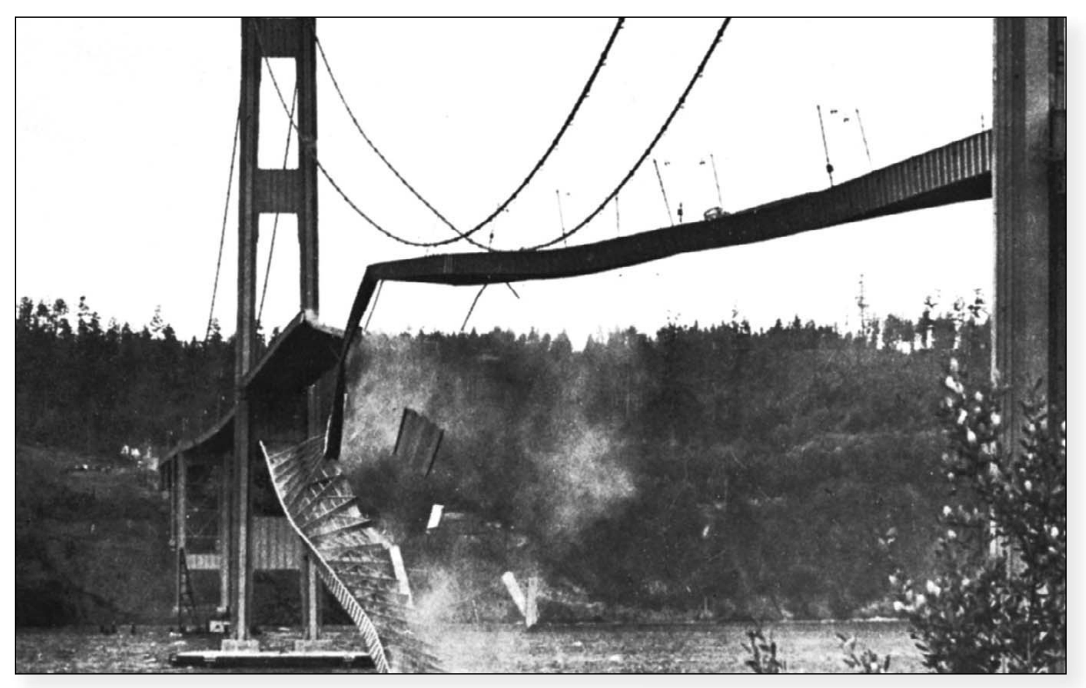


Figura 1.7 El puente Tacoma Narrows durante la vibración inducida por el viento. El puente se inauguró el 1 de julio de 1940 y colapsó el 7 de noviembre del mismo año. (Fotografía de Farquharson, de la Historical Photography Collection, University of Washington Libraries).

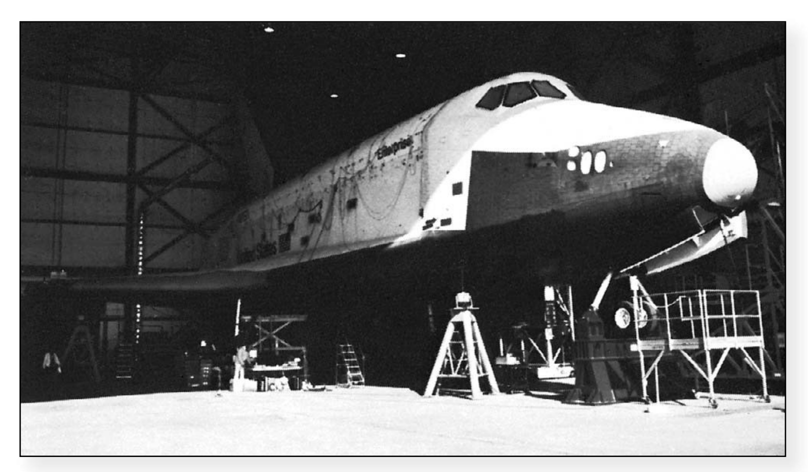


Figura 1.8 Prueba de vibración del transbordador espacial *Enterprise.* (Cortesía de la NASA).

La vibración y el ruido generados por motores molestan a las personas, y en ocasiones producen daños a las propiedades. La vibración de los tableros de instrumentos puede provocar su mal funcionamiento o dificultad para leer los medidores [1.19]. Por lo tanto, uno de los propósitos importantes del estudio de la vibración es reducirla mediante el diseño apropiado de máquinas y sus montajes. En este sentido, el ingeniero mecánico trata de diseñar el motor o máquina de modo que se reduzca el desequilibrio, mientras que el ingeniero estructural trata de diseñar la estructura de soporte de modo que el efecto del desequilibrio no sea dañino [1.20].

A pesar de los efectos perjudiciales, la vibración puede utilizarse con provecho en varias aplicaciones industriales y comerciales. De hecho, las aplicaciones de equipo vibratorio se han incrementado considerablemente en años recientes [1.21]. Por ejemplo, la vibración se pone a trabajar en transportadoras vibratorias, tolvas, tamices, compactadoras, lavadoras, cepillos de dientes eléctricos, taladros de dentista, relojes y unidades de masaje eléctricas. La vibración también se utiliza en el hincado de pilotes, pruebas vibratorias de materiales, proceso de acabado vibratorio y circuitos electrónicos para filtrar las frecuencias indeseables (vea la figura 1.9). Se ha visto que la vibración mejora la eficiencia de ciertos procesos de maquinado, fundición, forja y soldadura. Se emplea para simular sismos en la investigación geológica y también para estudiar el diseño de reactores nucleares.

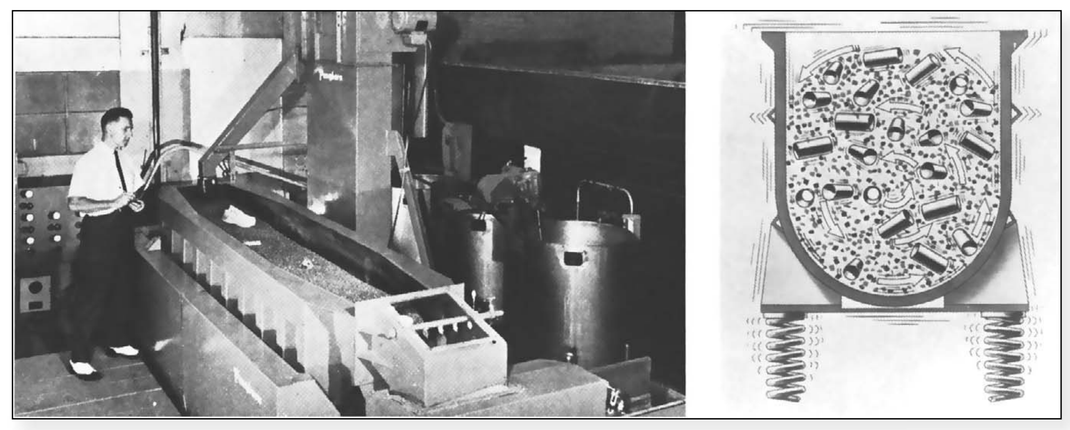


Figura 1.9 Proceso de acabado vibratorio. (Reimpreso por cortesía de Manufacturing Engineers, © 1964 The Tool and Manufacturing Engineer).

1.4 Conceptos básicos de la vibración

1.4.1 Vibración

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama *vibración* u *oscilación*. El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos.

1.4.2 Partes elementales de sistemas vibratorios

Por lo común un sistema vibratorio incluye un medio para almacenar energía potencial (resorte o elasticidad), un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se pierde gradualmente (amortiguador).

La vibración de un sistema implica la transformación de su energía potencial en energía cinética y de ésta en energía potencial, de manera alterna. Si el sistema se amortigua, una parte de su energía se disipa en cada ciclo de vibración y se le debe reemplazar por una fuente externa para que se mantenga un estado de vibración estable.

Como un ejemplo, consideremos la vibración del péndulo simple que se muestra en la figura 1.10. Soltemos la lenteja de masa m después de desplazarla un ángulo θ. En la posición 1 la velocidad de la lenteja y por consiguiente su energía cinética es cero. Pero tiene una energía potencial de magnitud $mgl(1 - \cos\theta)$ con respecto a la posición de referencia 2. Como la fuerza de la gravedad mg induce un par de torsión mgl sen θ con respecto al punto O, la lenteja comienza a oscilar hacia la izquierda de la posición 1. Esto imparte a la lenteja una cierta aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj y en el momento en que llega a la posición 2 toda su energía potencial se convierte en energía cinética. De ahí que la lenteja no se detenga en la posición 2 sino que continuará oscilando a la posición 3. Sin embargo, al pasar por la posición media 2, un par de torsión en sentido contrario al de las manecillas del reloj debido a la gravedad que actúa en la lenteja la desacelera. La velocidad de la lenteja se reduce a cero en la posición extrema izquierda. En este momento, toda la energía cinética de la lenteja se convierte en energía potencial. De nueva cuenta, debido al par de torsión producido por la gravedad, la lenteja adquiere velocidad en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por consiguiente, la lenteja comienza a oscilar de regreso con una velocidad progresivamente creciente y de nuevo pasa por la posición media. Este proceso continúa repitiéndose, el péndulo tendrá movimiento oscilatorio. Sin embargo, en la práctica, la magnitud de la oscilación (θ) se reduce gradualmente y por fin el péndulo se detiene debido a la resistencia (amortiguamiento) ofrecida por el medio circundante (aire). Esto quiere decir que una parte de la energía se disipa en cada ciclo de vibración debido a la acción de amortiguamiento del aire.

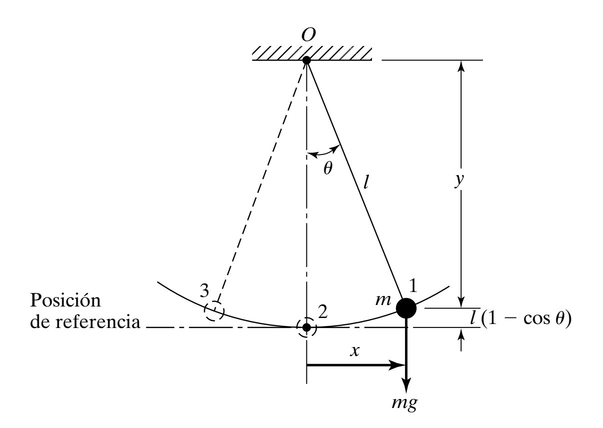


Figura 1.10 Un péndulo simple.

1.4.3 Cantidad de grados de libertad

El mínimo de coordenadas independientes requerido para determinar por completo todas las partes de un sistema en cualquier instante de tiempo define la cantidad de grados de libertad del sistema. El péndulo simple que se muestra en la figura 1.10, así como cada uno de los sistemas de la figura 1.11, representa un sistema de un solo grado de libertad. Por ejemplo, el movimiento del péndulo simple (figura 1.10) se puede formular o en función del ángulo θ o en función de las coordenadas cartesianas x y y. Si se utilizan las coordenadas x y y para describir el movimiento, debe reconocerse que estas coordenadas no son independientes. Están relacionadas entre sí mediante la relación $x^2 + y^2 = l^2$, donde l es la longitud constante del péndulo. Por lo tanto cualquier coordenada puede describir el movimiento del péndulo. En este caso vemos que la selección de θ como coordenada independiente será más conveniente que la selección de x o de y. Para la corredera que se muestra en la figura 1.11(a) puede usarse tanto la coordenada angular θ como la coordenada x para describir el movimiento. En la figura 1.11(b) se puede usar la coordenada lineal x para especificar el movimiento. Para el sistema torsional (barra larga con un pesado disco en el extremo) que se muestra en la figura 1.11(c), se puede utilizar la coordenada θ para describir el movimiento.

Algunos ejemplos de sistemas de dos y tres grados de libertad se muestran en la figuras 1.12 y 1.13, respectivamente. La figura 1.12(a) muestra un sistema de dos masas y dos resortes descrito por las dos coordenadas lineales x_1 y x_2. La figura 1.12(b) indica un sistema de dos rotores cuyo movimiento puede especificarse en función de θ_1 y θ_2. El movimiento del sistema que se muestra en la figura 1.12(c) puede describirse por completo con X o θ, o con x, y y X. En el segundo caso, x y y están restringidas como $x^2 + y^2 = l^2$ donde l es una constante.

Para los sistemas que se muestran en las figuras 1.13(a) y 1.13(c), se pueden utilizar las coordenadas $x_i(i = 1, 2, 3)$ y θ_i $(i = 1, 2, 3)$, respectivamente, para describir el movimiento. En el caso del sistema que se muestra en la figura 1.13(b), $\theta_i(i = 1, 2, 3)$ especifica las posiciones de las masas

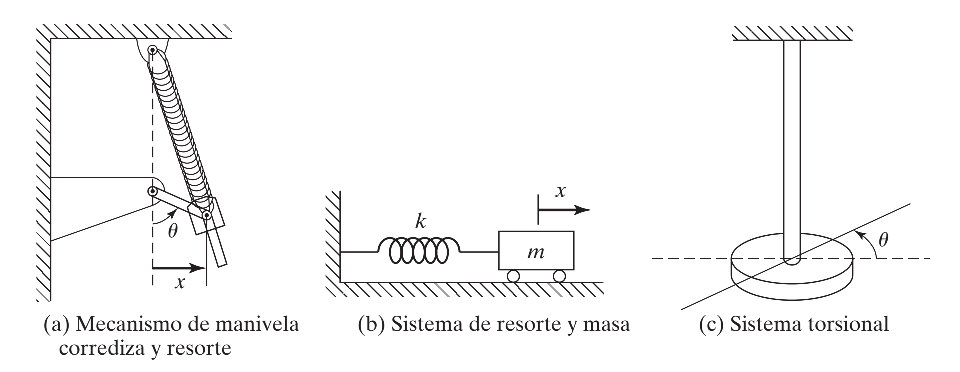


Figura 1.11 Sistemas de un grado de libertad.

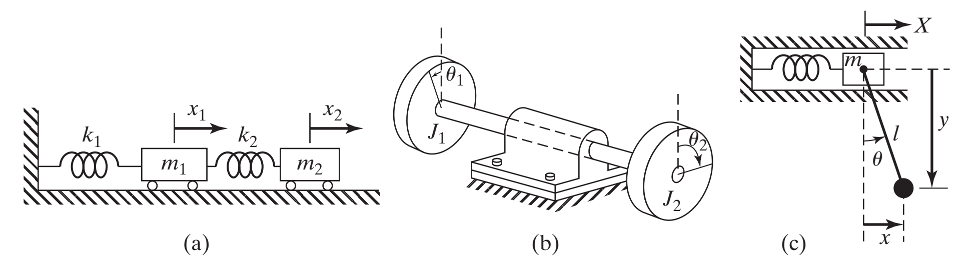


Figura 1.12 Sistema de dos grados de libertad.

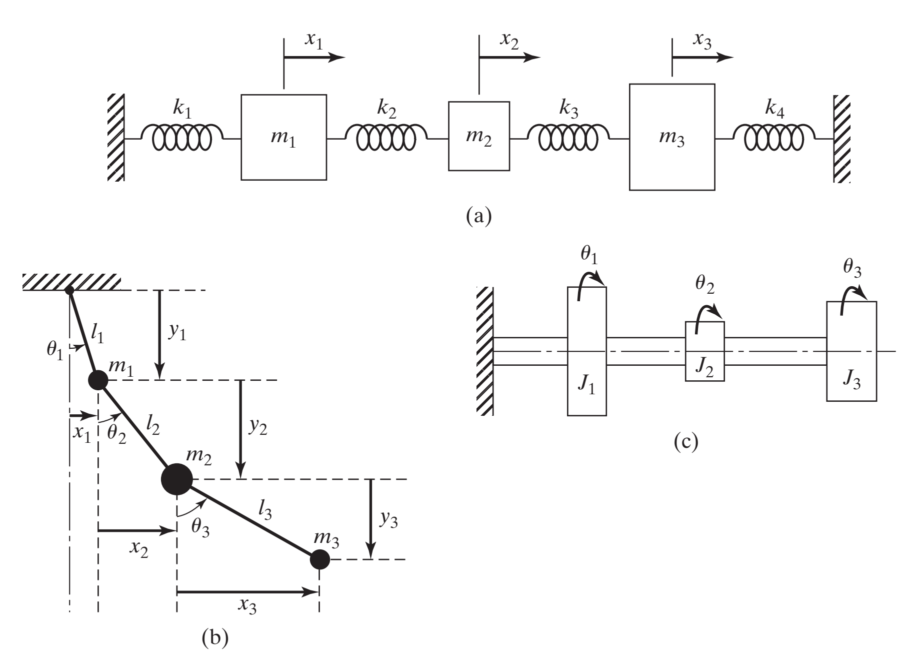


Figura 1.13 Sistema de tres grados de libertad.

m_i ($i = 1, 2, 3$). Un método alterno de describir este sistema es en función de x_i y y_i ($i = 1, 2, 3$); pero en este caso se tienen que considerar las restricciones $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2$ ($i = 1, 2, 3$).

Las coordenadas necesarias para describir el movimiento de un sistema constituyen un conjunto de *coordenadas generalizadas*. Éstas se suelen indicar como q_1, q_2,... y pueden representarse como coordenadas cartesianas y/o no cartesianas.

1.4.4 Sistemas discretos y continuos

Por medio de una cantidad finita de grados de libertad se puede describir un buen número de sistemas prácticos, como los sistemas simples que se muestran en las figuras 1.10 a 1.13. Algunos sistemas, sobre todo los que implican miembros elásticos continuos, tienen una infinitud de grados de libertad. Como un ejemplo simple, consideremos la viga en voladizo de la figura 1.14. Como la viga tiene una infinitud de puntos de masa, necesitamos una infinitud de coordenadas para especificar su configuración de deflexión. La infinitud de coordenadas define la curva de deflexión. Así entonces, la viga en voladizo tiene una infinitud de grados de libertad. La mayoría de los sistemas de estructuras y máquinas tienen miembros deformables (elásticos) y por consiguiente tienen una infinitud de grados de libertad.

Los sistemas con una cantidad finita de grados de libertad se conocen como sistemas *discretos* o de *parámetro concentrado*, y los que cuentan con una infinitud de grados de libertad se conocen como sistemas *continuos* o *distribuidos*.

La mayor parte del tiempo, los sistemas continuos se representan de forma aproximada como sistemas discretos y las soluciones se obtienen de una manera simple. Aun cuando el tratamiento de

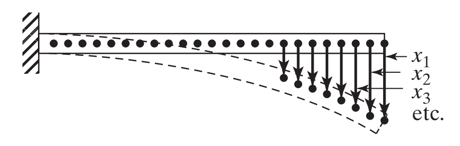


Figura 1.14 Una viga en voladizo (sistema de una infinitud de grados de libertad).

un sistema como continuo da resultados exactos, el método analítico disponible para ocuparse de los sistemas continuos se limita a una escasa selección de problemas como vigas uniformes, variables esbeltas y placas delgadas. De ahí que la mayoría de los sistemas prácticos se estudian tratándolos como masas concentradas finitas, resortes y amortiguadores. Por lo común se obtienen resultados más precisos aumentando la cantidad de masas, resortes y amortiguadores, es decir, aumentando la cantidad de grados de libertad.

1.5 Clasificación de la vibración

La vibración se puede clasificar de varias maneras. Algunas de las clasificaciones importantes son las siguientes.

1.5.1 Vibración libre y forzada

Vibración libre. Si se deja que un sistema vibre por sí mismo después de una perturbación inicial, la vibración resultante se conoce como *vibracion libre.* Ninguna fuerza externa actúa en el sistema. La oscilación de un péndulo simple es un ejemplo de vibración libre.

Vibración forzada. Si un sistema se somete a una fuerza externa (a menudo, una fuerza repetitiva), la vibración resultante se conoce como *vibración forzada*. La oscilación que aparece en máquinas como motores diesel es un ejemplo de vibración forzada.

Si la frecuencia de la fuerza externa coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, ocurre una condición conocida como *resonancia*, y el sistema sufre oscilaciones peligrosamente grandes. Las fallas de estructuras como edificios, puentes, turbinas y alas de avión se han asociado a la ocurrencia de resonancia.

1.5.2 Vibración no amortiguada y amortiguada

Si no se pierde o disipa energía por fricción u otra resistencia durante la oscilación, la vibración se conoce como *vibración no amortiguada.* Sin embargo, si se pierde energía se llama *vibración amortiguada*. En muchos sistemas físicos, la cantidad de amortiguamiento es tan pequeña que puede ser ignorada en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, la consideración del amortiguamiento se vuelve extremadamente importante al analizar sistemas vibratorios próximos a la resonancia.

1.5.3 Vibración lineal y no lineal

Si todos los componentes básicos de un sistema vibratorio, el resorte, la masa y el amortiguador, se comportan linealmente, la vibración resultante se conoce como *vibración lineal*. Pero si cualquiera de los componentes básicos se comporta de manera no lineal, la vibración se conoce como *vibración no lineal*. Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de sistemas vibratorios lineales o no lineales son asimismo lineales o no lineales, respectivamente. Si la vibración es lineal el principio de superposición es válido y las técnicas matemáticas de análisis están bien desarrolladas. Para vibración no lineal, el principio de superposición no es válido y las técnicas de análisis son menos conocidas. Como los sistemas vibratorios tienden a comportarse no linealmente con amplitud de oscilación creciente, es deseable un conocimiento de la vibración no lineal cuando se trate con sistemas vibratorios.

1.5.4 Vibración determinística y aleatoria

Si el valor o magnitud de la excitación (fuerza o movimiento) que actúa en un sistema vibratorio se conoce en cualquier tiempo dado, la excitación se llama *determinística*. La vibración resultante se conoce como *vibración determinística*.

En algunos casos la excitación es *no determinística* o *aleatoria*; el valor de la excitación en un momento dado no se puede pronosticar. En estos casos, una recopilación de registros de la excitación puede presentar cierta regularidad estadística. Es posible estimar promedios como los valores

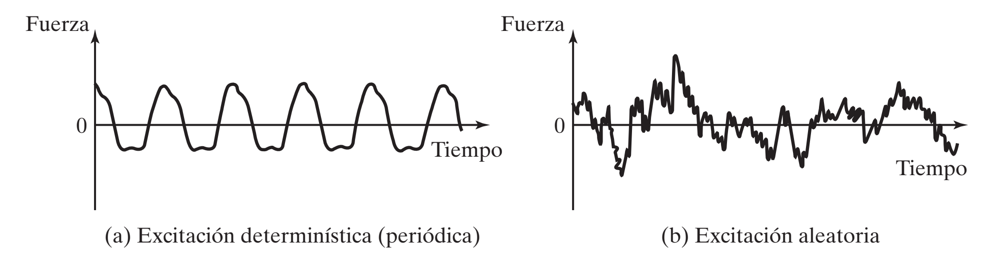


Figura 1.15 Excitaciones determinística y aleatoria.

medios o medios al cuadrado de la excitación. Ejemplos de excitaciones aleatorias son la velocidad del viento, la aspereza del camino y el movimiento de tierra durante sismos. Si la excitación es aleatoria, la vibración resultante se llama *vibración aleatoria*. En este caso la respuesta vibratoria del sistema también es aleatoria; se puede describir sólo en función de cantidades estadísticas. La figura 1.15 muestra ejemplos de excitaciones determinísticas y aleatorias.

1.6 Procedimiento del análisis de la vibración

Un sistema vibratorio es dinámico si variables como las excitaciones (entradas) y respuestas (salidas) dependen del tiempo. La respuesta de un sistema vibratorio suele depender tanto de las condiciones iniciales como de las excitaciones externas. La mayoría de los sistemas vibratorios prácticos son muy complejos, y es imposible considerar todos los detalles para un análisis matemático. En el análisis sólo se consideran los detalles más importantes para predecir el comportamiento del sistema en condiciones de entrada específicas. A menudo se puede determinar el comportamiento total del sistema por medio de un modelo simple del sistema físico complejo. Por lo que el análisis de un sistema vibratorio suele implicar el modelado matemático, la derivación de las ecuaciones rectoras, la solución de las ecuaciones y la interpretación de los resultados.

Paso 1: Modelado matemático. El propósito del modelado matemático es representar todos los detalles importantes del sistema con el objeto de derivar las ecuaciones matemáticas (o analíticas) que rigen el comportamiento del sistema. El modelo matemático puede ser lineal o no lineal, según el comportamiento de los componentes del sistema. Los modelos lineales permiten soluciones rápidas y son sencillos de manejar, sin embargo, los modelos no lineales a veces revelan ciertas características del sistema que no pueden ser pronosticadas siguiendo modelos lineales. Por lo tanto se requiere un gran criterio de ingeniería para producir un modelo matemático adecuado de un sistema vibratorio.

A veces el modelo matemático se mejora gradualmente para obtener resultados más precisos. En este método primero se utiliza un modelo muy rústico o elemental para tener una idea del comportamiento total del sistema. Luego se refina el modelo con la inclusión de más componentes o detalles, de modo que se pueda observar más de cerca el comportamiento del sistema. Para ilustrar el procedimiento de refinamiento utilizado en el modelado matemático, consideremos el martillo de forja de la figura 1.16(a). Se compone de un marco, un peso que cae, conocido como mazo, un yunque y un bloque de cimentación. El yunque es un bloque de acero macizo sobre el cual se forja el material a la forma deseada por medio de los repetidos golpes del mazo. Por lo común el yunque se monta sobre una almohadilla elástica para reducir la transmisión de la vibración al bloque de cimentación y marco [1.22]. Para una primera aproximación, el marco, el yunque, la almohadilla elástica, el bloque de cimentación y el suelo, se modelan como un sistema de un solo grado de libertad como se muestra en la figura 1.16(b). Para una aproximación refinada, los pesos del

marco, yunque y bloque de cimentación se representan por separado con un modelo de dos grados de libertad, como se muestra en la figura 1.16(c). El modelo se puede refinar aún más considerando los impactos excéntricos del mazo, los cuales hacen que cada una de las masas que se presentan en la figura 1.16(c) asuman movimientos tanto verticales como de bamboleo (rotaciones) en el plano del papel.

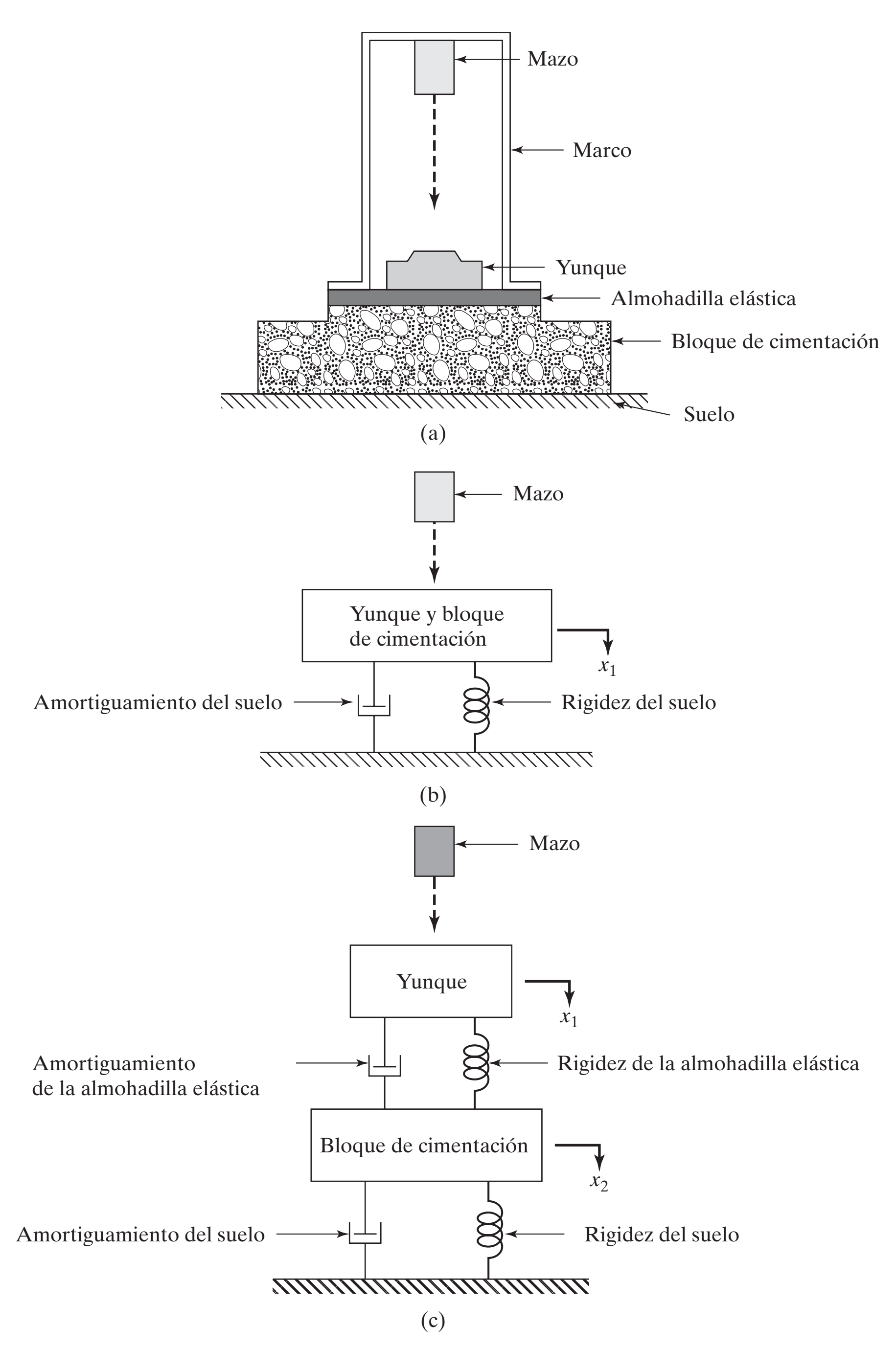


Figura 1.16 Modelado de un martillo de forja.

Paso 2: Derivación de las ecuaciones rectoras. Una vez que el modelo matemático está disponible, utilizamos el principio de dinámica y obtenemos las ecuaciones que describen la vibración del sistema. Las ecuaciones de movimiento se pueden derivar de una forma adecuada trazando los diagramas de cuerpo libre de todas las masas que intervienen. El diagrama de cuerpo libre de una masa se obtiene aislándola e indicando todas las fuerzas externamente aplicadas, las fuerzas reactivas y las fuerzas de inercia. Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio suelen ser un conjunto de ecuaciones diferenciales comunes para un sistema discreto y de ecuaciones diferenciales parciales para un sistema continuo. Las ecuaciones pueden ser lineales o no lineales según el comportamiento de los componentes del sistema. Por lo común se utilizan varios métodos para derivar las ecuaciones rectoras. Entre ellos están la segunda ley del movimiento de Newton, el principio de D'Alembert y el principio de conservación de la energía.

Paso 3: Solución de las ecuaciones rectoras. Las ecuaciones de movimiento deben resolverse para hallar la respuesta del sistema vibratorio. Dependiendo de la naturaleza del problema, podemos utilizar una de las siguientes técnicas para determinar la solución: métodos estándar de solución de ecuaciones diferenciales, métodos de transformada de Laplace, métodos matriciales[1] y métodos numéricos. Si las ecuaciones rectoras son no lineales, rara vez pueden resolverse en forma cerrada. Además, la solución de ecuaciones diferenciales parciales es mucho más complicada que la de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se pueden utilizar métodos numéricos que implican computadoras para resolver las ecuaciones. Sin embargo, es difícil sacar conclusiones generales sobre el comportamiento del sistema con resultados obtenidos con computadora.

Paso 4: Interpretación de los resultados. La solución de las ecuaciones rectoras proporciona los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de las diversas masas del sistema. Estos resultados deben interpretarse con una clara visión del objetivo del análisis y de las posibles implicaciones de diseño de los resultados.

Ejemplo 1.1 Modelo matemático de una motocicleta

La figura 1.17(a) muestra una motocicleta con un motociclista. Desarrolle una secuencia de tres modelos matemáticos del sistema para investigar la vibración en la dirección vertical. Considere la elasticidad de las llantas y el amortiguamiento de los amortiguadores (en dirección vertical), las masas de las ruedas y la elasticidad, amortiguamiento y masa del motociclista.

Solución: Comenzamos con el modelo más simple y lo refinamos gradualmente. Cuando se utilizan los valores equivalentes de la masa, rigidez y amortiguamiento del sistema, obtenemos un modelo de un solo grado de libertad de la motocicleta con un motociclista como se indica en la figura 1.17(b). En este modelo, la rigidez equivalente (k_{eq}) incluye la rigidez de las llantas, amortiguadores y motociclista. La constante de amortiguamiento equivalente (c_{eq}) incluye el amortiguamiento de los amortiguadores y el motociclista. La masa equivalente incluye las masas de las ruedas, el cuerpo del vehículo y al motociclista. Este modelo se puede refinar representando las masas de las ruedas, la elasticidad de las llantas y la elasticidad y amortiguamiento de los amortiguadores por separado, como se muestra en la figura 1.17(c). En este modelo, la masa del cuerpo del vehículo (m_v) y la masa del motociclista (m_r) se muestran como una sola masa $m_v + m_r$. Cuando se considera la elasticidad (como constante de resorte k_r) y el amortiguamiento (como constante de amortiguamiento c_r) del motociclista, se obtiene el modelo refinado que se muestra en la figura 1.17(d).

1 Las definiciones y operaciones básicas de la teoría de matrices puede encontrarlas en los apéndices de este libro, en el sitio web.

Observe que los modelos de las figuras 1.17(b) a (d) no son únicos. Por ejemplo, si se combinan las constantes de resorte de ambas llantas, las masas de las dos ruedas y las constantes de resorte y amortiguamiento de los dos amortiguadores como cantidades únicas, se obtiene el modelo que se muestra en la figura 1.17(e) en lugar del de la figura 1.17(c).

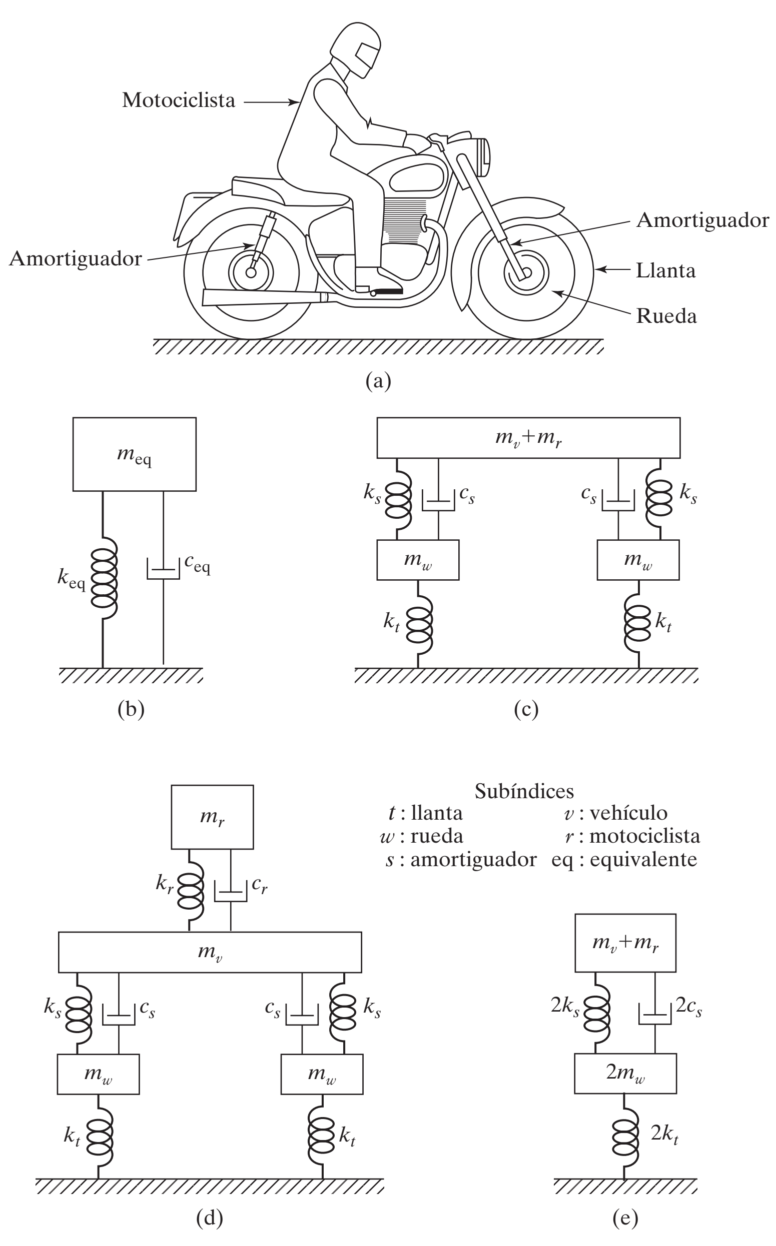


Figura 1.17 Motocicleta con motociclista, lo cual comprende un sistema físico y un modelo matemático.

■

1.7 Elementos de resorte

Un resorte es un tipo de eslabón mecánico, el cual en la mayoría de las aplicaciones se supone que tiene masa y amortiguamiento insignificantes. El tipo de resorte más común es el resorte helicoidal utilizado en lapiceros y plumas retráctiles, engrapadoras y suspensiones de camiones de carga y otros vehículos. Se pueden identificar varios otros tipos en aplicaciones de ingeniería. De hecho, cualquier cuerpo o miembro deformable, cable, barra, viga, flecha o placa, puede considerarse como un resorte. Un resorte se suele representar como se muestra en la figura 1.18(a). Si la longitud del resorte, sin que actúe ninguna fuerza, se indica con l, cuando se aplica una fuerza axial cambia la longitud. Por ejemplo, cuando se aplica una fuerza de tensión F en su extremo libre 2, el resorte experimenta un alargamiento x como se muestra en la figura 1.18(b), mientras que una fuerza de compresión F aplicada en el extremo libre 2 reduce la longitud x como se muestra en la figura 1.18(c).

Se dice que un resorte es lineal si el alargamiento o acortamiento de longitud x está relacionado con la fuerza aplicada como

$$F = kx \tag{1.1}$$

donde k es una constante, conocida como la *constante de resorte*, *rigidez de resorte* o *tasa de resorte*. La constante de resorte k siempre es positiva e indica la fuerza (positiva o negativa) requerida para producir una deflexión unitaria (alargamiento o reducción de la longitud) en el resorte. Cuando el resorte se alarga (o comprime) con una fuerza de tensión (o compresión), de acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton, se desarrolla una fuerza de restauración de magnitud $-F$ (o $+F$) opuesta a la fuerza aplicada. Esta fuerza de restauración trata de regresar el resorte alargado (o comprimido) a su longitud original no alargada o libre como se muestra en la figura 1.18(b) (o 1.18(c)). Si trazamos la gráfica entre F y x, el resultado es una línea recta de acuerdo con la ecuación (1.1). El trabajo realizado (U) al deformar un resorte se almacena como deformación o energía potencial en el resorte, y está dado por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.2}$$

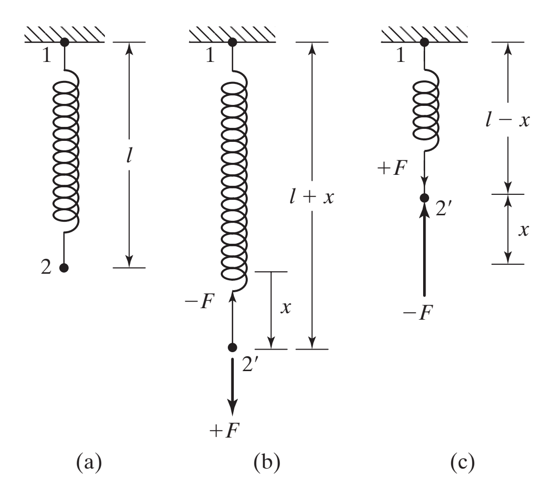


Figura 1.18 Deformación de un resorte.

1.7.1 Resortes no lineales

La mayoría de los resortes que se utilizan en sistemas prácticos presentan una relación fuerza-deflexión no lineal, en particular cuando las deflexiones son grandes. Si un resorte no lineal experimenta deflexiones pequeñas puede ser reemplazado por un resorte lineal con el procedimiento explicado en la sección 1.7.2. En el análisis de vibración, comúnmente se utilizan resortes no lineales cuyas relaciones de fuerza-deflexión están dadas por

$$F = ax + bx^3, \qquad a > 0 \tag{1.3}$$

En la ecuación (1.3), a indica la constante asociada con la parte lineal y b indica la constante asociada con la de no linealidad (cúbica). Se dice que el resorte es duro si $b > 0$, lineal si $b = 0$, y suave si $b < 0$. En la figura 1.19 se muestran las relaciones de fuerza-deflexión correspondientes a varios valores de b.

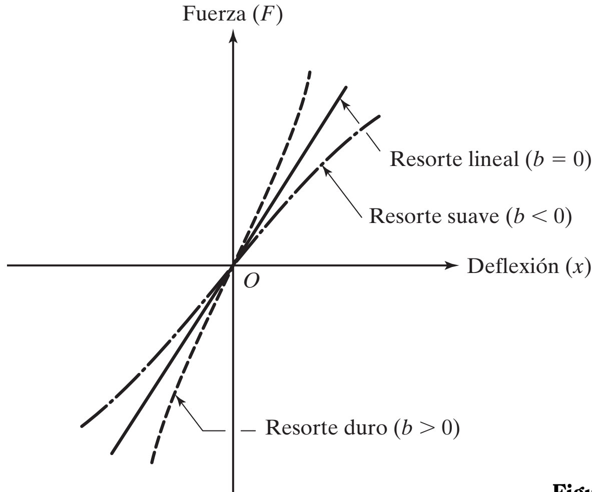


Figura 1.19 Resortes no lineales y lineales.

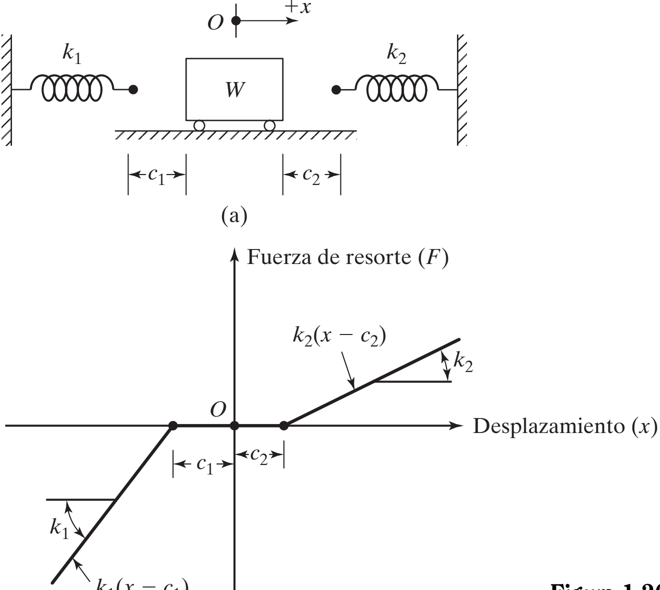


Figura 1.20 Relación fuerza-desplazamiento de un resorte no lineal.

Algunos sistemas, con dos o más resortes, pueden presentar una relación fuerza-desplazamiento no lineal aunque los resortes individuales sean lineales. Algunos ejemplos de dichos sistemas se muestran en las figuras 1.20 y 1.21. En la figura 1.20(a), el peso (o fuerza) W se desplaza libremente a través de los espacios libres c_1 y c_2 del sistema. Una vez que el peso se pone en contacto con un resorte particular después de pasar por el espacio libre correspondiente, la fuerza de resorte se incrementa en proporción a la constante del resorte particular (vea la figura 1.20(b)). Se puede ver que la relación resultante de fuerza-desplazamiento, aunque es lineal parte por parte, indica una relación no lineal.

En la figura 1.21(a), los dos resortes, rigideces k_1 y k_2, tienen diferentes longitudes. Observe que, por sencillez, el resorte con rigidez k_1 se muestra en la forma de dos resortes paralelos, cada uno con una rigidez de $k_1/2$. Los modelos de sistemas de resortes de este tipo se pueden utilizar en el análisis de vibración de paquetes y suspensiones que se utilizan en los trenes de aterrizaje de aviones.

Cuando el resorte k_1 se deforma en una cantidad $x = c$, el segundo resorte entra en acción y proporciona rigidez adicional k_2 al sistema. La relación fuerza-desplazamiento no lineal se muestra en la figura 1.21(b).

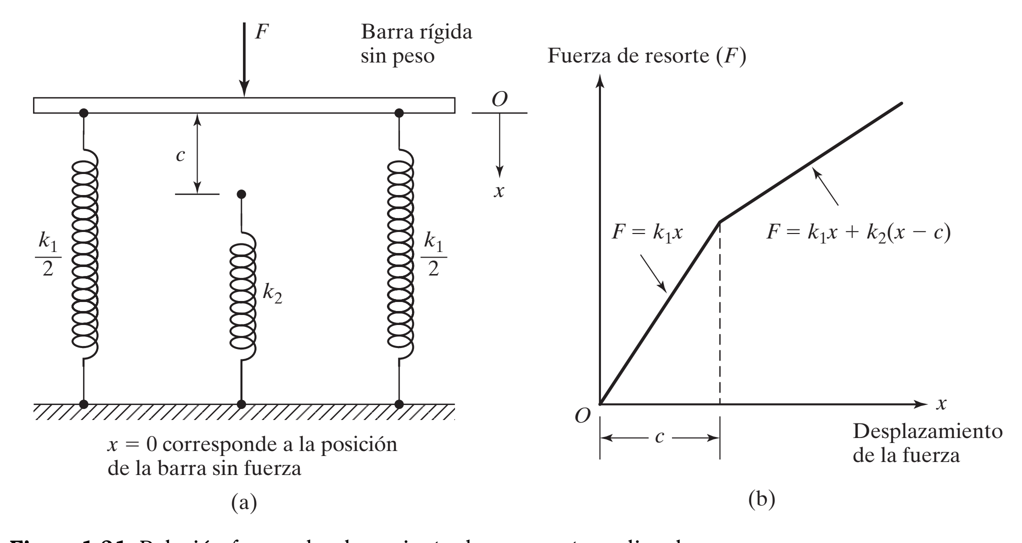


Figura 1.21 Relación fuerza-desplazamiento de un resorte no lineal.

1.7.2 Linealización de un resorte no lineal

Los resortes reales son no lineales y obedecen la ecuación (1.1) sólo hasta determinada deformación. Más allá de un cierto valor de deformación (después del punto A en la figura 1.22), el esfuerzo excede el punto cedente o de deformación del material y la relación entre fuerza y deformación se hace no lineal [1.23, 1.24]. En muchas aplicaciones prácticas suponemos que las deflexiones son pequeñas y utilizamos la relación lineal de la ecuación (1.1). Inclusive, si la relación de fuerza-deflexión de un resorte es no lineal, como se muestra en la figura 1.23, a menudo la aproximamos como lineal por medio de un proceso de linealización [1.24, 1.25]. Para ilustrar el proceso de linealización, sea F la carga estática que actúa en el resorte y que provoca una deflexión de x^*. Si se agrega una fuerza incremental ΔF a F, el resorte se deforma en una cantidad adicional Δx. La nueva fuerza de resorte $F + \Delta F$ se expresa mediante la expansión de la serie de Taylor con respecto a la posición de equilibrio estático x^* como

$$\begin{aligned} F + \Delta F &= F(x^* + \Delta x) \\ &= F(x^*) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x^*} (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

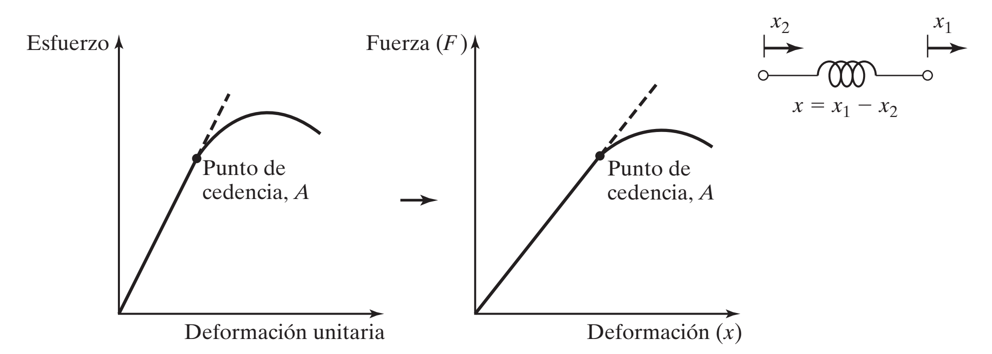


Figura 1.22 Límite de no linealidad más allá del límite de proporcionalidad.

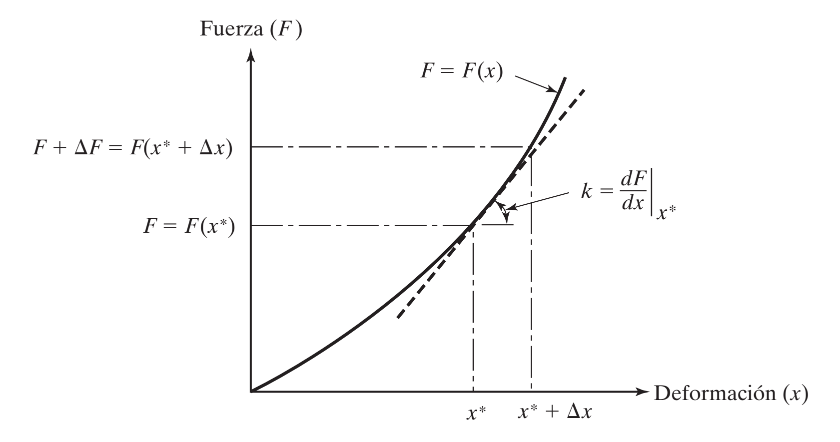


Figura 1.23 Proceso de linealización.

Para valores pequeños de Δx, las derivadas de mayor orden se ignoran para obtener

$$F + \Delta F = F(x^*) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*} (\Delta x) \tag{1.5}$$

Dado que $F = F(x^*)$, podemos expresar ΔF como

$$\Delta F = k\Delta x \tag{1.6}$$

donde k es la constante de resorte linealizado en x^* dada por

$$k = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*} \tag{1.7}$$

Podemos utilizar la ecuación (1.6) por simplicidad, pero en ocasiones el error implicado en la aproximación puede ser muy grande.

Ejemplo 1.2 Constante de resorte linealizado equivalente

A una fresadora que pesa 1000 lb la soporta un apoyo de montaje de caucho. La relación fuerza-deflexión del apoyo de montaje de caucho está dada por

$$F = 2000x + 200x^3 \tag{E.1}$$

donde la fuerza (F) y la deflexión (x) están medidas en libras y pulgadas, respectivamente. Determine la constante de resorte linealizado equivalente del apoyo de montaje de caucho en su posición de equilibrio estático.

Solución: La posición de equilibrio estático del apoyo de montaje de caucho (x^*), bajo el peso de la fresadora, se determina por la ecuación (E.1):

$$1000 = 2000x^* + 200(x^*)^3$$

o bien

$$200(x^*)^3 + 2000x^* - 1000 = 0 \tag{E.2}$$

Las raíces de la ecuación cúbica (E.2) se pueden hallar (por ejemplo, utilizando las raíces de función en MATLAB) como

$$x^* = 0.4884, \qquad -0.2442 + 3.1904i \qquad \text{y} \qquad -0.2442 - 3.1904i$$

La raíz de la ecuación (E.2) $x^* = 0.4884$ pulg proporciona la posición de equilibrio estático del apoyo de montaje de caucho. La constante de resorte lineal equivalente del apoyo de montaje de caucho en su posición de equilibrio estático se determina aplicando la ecuación (1.7):

$$k_{eq} = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*} = 2000 + 600(x^*)^2 = 2000 + 600(0.4884^2) = 2143.1207 \text{ lb/pulg.}$$

Nota: La constante de resorte lineal equivalente, $k_{eq} = 2143.1207$ lb/pulg, predice la deflexión estática de la fresadora como

$$x = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{1000}{2143.1207} = 0.4666 \text{ pulg.}$$

lo cual es algo diferente del valor verdadero de 0.4884 pulg. El error se debe al truncamiento de las derivadas de mayor orden en la ecuación (1.4).

■

1.7.3 Constante de resorte de elementos elásticos

Como ya antes se expresó, cualquier miembro (o elemento) elástico o deformable puede considerarse como un resorte. Las constantes de resortes equivalentes de miembros elásticos simples como varillas, vigas y flechas huecas se encuentran en la parte interna de la portada del libro. El procedimiento de determinar la constante de resorte equivalente de miembros elásticos se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3 Constante de resorte de una varilla

Encuentre la constante de resorte equivalente de una varilla uniforme de longitud l, área de sección transversal A y módulo de Young E sujeto a una fuerza de tensión (o compresión) axial F como se muestra en la figura 1.24(a).

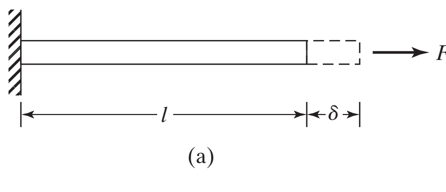


Figura 1.24 Constante de resorte de una varilla.

Solución: El alargamiento (o acortamiento) δ de la varilla sometida a una fuerza de tensión (o compresión) axial F puede expresarse como

$$\delta = \frac{\delta}{l}l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E}l = \frac{Fl}{AE} \tag{E.1}$$

donde $\varepsilon = \frac{\text{cambio de longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{\delta}{l}$ es la deformación unitaria y $\sigma = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{F}{A}$ es el esfuerzo inducido en la varilla. Siguiendo la definición de la constante de resorte k, a partir de la ecuación (E.1) obtenemos:

$$k = \frac{\text{fuerza aplicada}}{\text{deflexión resultante}} = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l} \tag{E.2}$$

La importancia de la constante de resorte equivalente de la varilla se muestra en la figura 1.24(b).

Ejemplo 1.4 Constante de resorte de una viga en voladizo

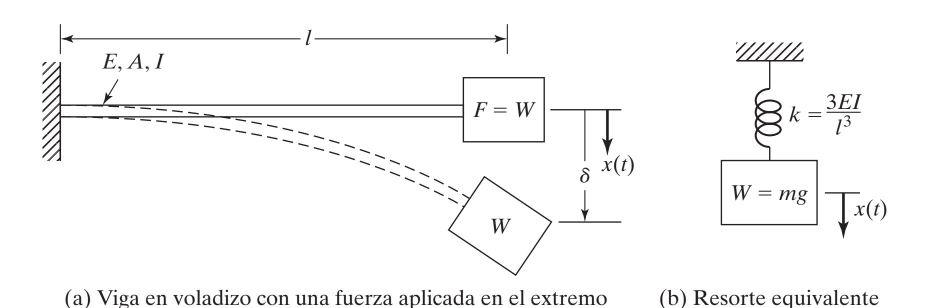
Encuentre la constante de resorte equivalente de una viga en voladizo sometida a una carga concentrada F en su extremo como se muestra en la figura 1.25(a).

Solución: Suponemos, por simplicidad, que el peso (o masa) de la viga es insignificante y que la carga concentrada F se debe al peso de la masa puntual ($W = mg$). Por la resistencia de materiales [1.26] sabemos que la deflexión del extremo de la viga debido a una carga concentrada $F = W$ está dada por

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} \tag{E.1}$$

donde E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje de flexión o z (es decir, el eje perpendicular a la página). Por consiguiente, la constante de resorte de la viga es (figura 1.25(b)):

$$k = \frac{W}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} \tag{E.2}$$



(a) Viga en voladizo con una fuerza aplicada en el extremo (b) Resorte equivalente

Figura 1.25 Constante de resorte de una viga en voladizo.

Notas:

1. Es posible que una viga en voladizo se someta a cargas concentradas en dos direcciones en su extremo, una en la dirección y (F_y), y la otra en la dirección z (F_z), como se muestra en la figura 1.26(a). Cuando se aplica la carga a lo largo de la dirección y, la viga se flexiona con respecto al eje z (figura 1.26(b)) y por consiguiente la constante de resorte equivalente será igual a

$$k = \frac{3EI_{zz}}{l^3} \tag{E.3}$$

(a) (b)

(c)

Figura 1.26 Constantes de resorte de una viga en dos direcciones.

Cuando la carga se aplica a lo largo de la dirección z, la viga se flexiona con respecto al eje y (figura 1.26(c)) y por consiguiente la constante de resorte equivalente será igual a

$$k = \frac{3EI_{yy}}{l^3} \tag{E.4}$$

2. Las constantes de resorte de viga con condiciones diferentes en su extremo se pueden encontrar de la misma manera, utilizando los resultados obtenidos a partir de la resistencia de materiales. Las fórmulas representativas dadas en el apéndice B (en el sitio web) se pueden usar para hallar las constantes de resorte de las vigas y placas indicadas. Por ejemplo, para encontrar la constante de resorte de una viga fija sometida a una fuerza concentrada P en $x = a$ (Caso 3 en el apéndice B), primero expresamos la deflexión de la viga en el punto donde se aplica la carga ($x = a$), utilizando $b = l - a$, como

$$y = \frac{P(l-a)^2a^2}{6EIl^3}[3al - 3a^2 - a(l-a)] = \frac{Pa^2(l-a)^2(al-a^2)}{3EIl^3} \tag{E.5}$$

y luego determinamos la constante de resorte (k) como

$$k = \frac{P}{y} = \frac{3EIl^3}{a^2(l-a)^2(al-a^2)} \tag{E.6}$$

donde $I = I_{zz}$.

3. El efecto del peso en sí (o masa) de la viga también puede incluirse al hallar la constante de resorte de la viga (vea el ejemplo 2.9 en el capítulo 2).

■

1.7.4 Combinación de resortes

En muchas aplicaciones prácticas se utilizan varios resortes lineales combinados. Estos resortes pueden combinarse en un solo resorte equivalente como se indica a continuación.

Caso 1: Resortes en paralelo. Para derivar una expresión para la constante equivalente de los resortes conectados en paralelo, considere los dos resortes que se muestran en la figura 1.27(a). Cuando se aplica una carga W, el sistema experimenta una deflexión estática δ_{st} como se muestra en la figura 1.27(b). Entonces el diagrama de cuerpo libre, mostrado en la figura 1.27(c), proporciona la ecuación de equilibrio

$$W = k_1\delta_{st} + k_2\delta_{st} \tag{1.8}$$

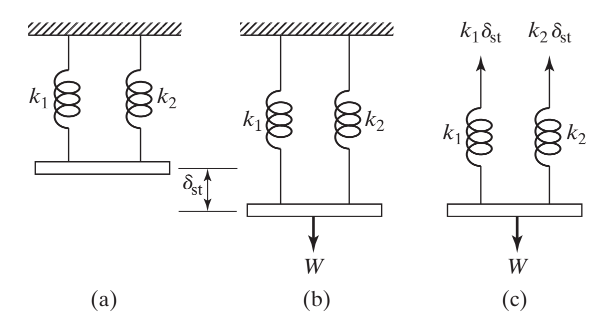


Figura 1.27 Resortes en paralelo.

Si k_{eq} indica la constante de resorte equivalente de la combinación de los dos resortes, entonces para la misma deflexión estática δ_{st}, tenemos

$$W = k_{eq}\delta_{st} \tag{1.9}$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) producen

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \tag{1.10}$$

Por lo común, si tenemos n resortes en paralelo con constantes $k_1, k_2, ..., k_n$, entonces la constante de resorte equivalente k_{eq} se obtiene como

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n \tag{1.11}$$

Caso 2: Resortes en serie. A continuación derivamos una expresión para la constante equivalente de resortes conectados en serie considerando los dos resortes mostrados en la figura 1.28(a). Bajo la acción de una carga W, los resortes 1 y 2 experimentan los alargamientos δ_1 y δ_2, respectivamente, como se muestra en la figura 1.28(b). El alargamiento total (o deflexión estática) del sistema, δ_{st}, es

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 \tag{1.12}$$

Como ambos resortes están sometidos a la misma fuerza W, tenemos el equilibrio que se muestra en la figura 1.28(c):

$$\begin{aligned} W &= k_1\delta_1 \\ W &= k_2\delta_2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Si k_{eq} indica la constante de resorte equivalente, entonces para la misma deflexión estática,

$$W = k_{eq}\delta_{st} \tag{1.14}$$

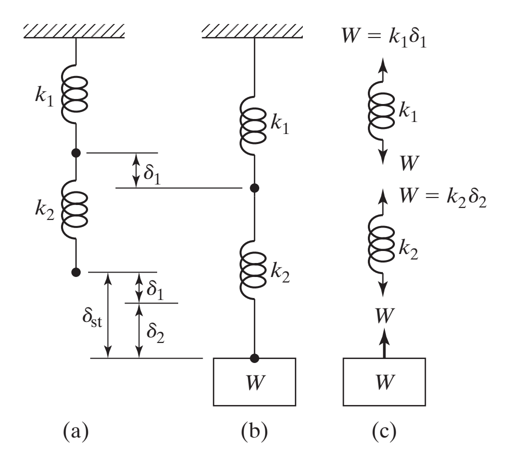


Figura 1.28 Resortes en serie.

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) dan por resultado

$$k_1\delta_1 = k_2\delta_2 = k_{eq}\delta_{st}$$

o bien

$$\delta_1 = \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_1} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_2} \tag{1.15}$$

Sustituyendo estos valores de δ_1 y δ_2 en la ecuación (1.12), obtenemos

$$\frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_2} = \delta_{st}$$

es decir,

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{1.16}$$

La ecuación (1.16) se puede generalizar al caso de *n* resortes en serie:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \tag{1.17}$$

En ciertas aplicaciones se conectan resortes a componentes rígidos como poleas, palancas y engranes. Es esos casos se puede hallar una constante de resorte equivalente utilizando una equivalencia de energía, como se ilustra en los ejemplos 1.8 y 1.9.

Ejemplo 1.5 *k* equivalente de un sistema de suspensión

La figura 1.29 muestra el sistema de suspensión de un carro de ferrocarril de carga con un sistema de resortes en paralelo. Encuentre la constante de resorte equivalente de la suspensión si los tres resortes helicoidales son de acero con un módulo de cortante $G = 80 \times 10^9$ N/m^2 y cuenta con cinco vueltas efectivas, diámetro medio de la espiral $D = 20$ cm y diámetro del alambre $d = 2$ cm.

Solución: La rigidez de cada resorte helicoidal resulta de

$$k = \frac{d^4G}{8D^3n} = \frac{(0.02)^4(80 \times 10^9)}{8(0.2)^3(5)} = 40{,}000.0 \text{ N/m}$$

(Vea la fórmula en la parte interna de la portada de este libro).

Ya que los tres resortes son idénticos y paralelos, la constante de resorte equivalente del sistema de suspensión es

$$k_{eq} = 3k = 3(40{,}000.0) = 120{,}000.0 \text{ N/m}$$

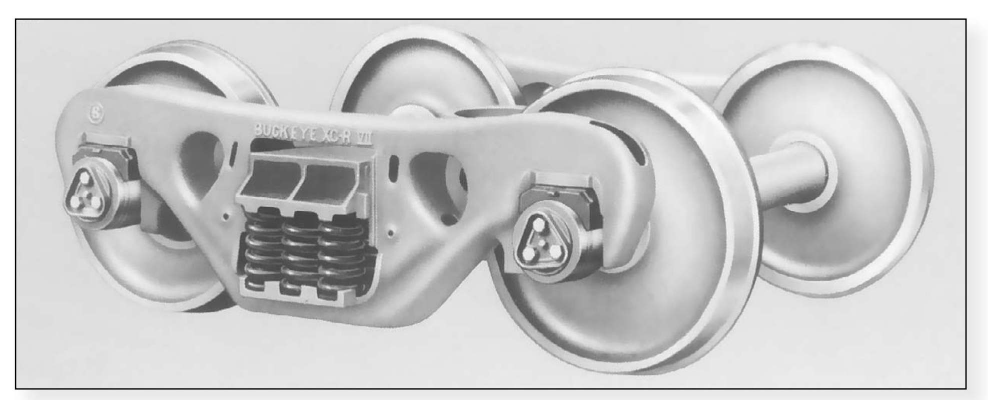


Figura 1.29 Sistema de resortes en paralelo en un carro de ferrocarril de carga. (Cortesía de Buckeye Steel Castings Company).

■

Ejemplo 1.6 Constante de resorte torsional de una flecha de hélice

Determine la constante de resorte torsional de la flecha de hélice de acero que se muestra en la figura 1.30.

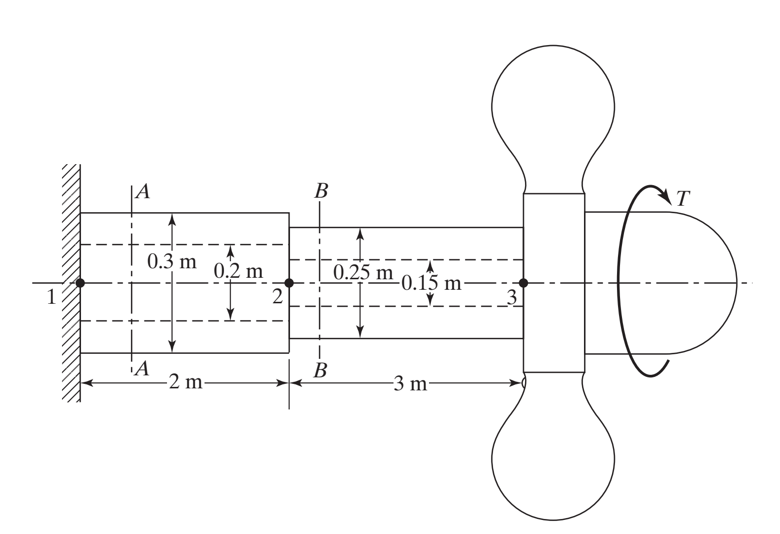


Figura 1.30 Flecha de hélice.

Solución: Tenemos que considerar los segmentos 12 y 23 de la flecha como resortes en combinación. De acuerdo con la figura 1.30, el par de torsión inducido en cualquier sección transversal de la flecha (como *AA* o *BB*) puede verse que es igual al par de torsión *T* aplicado en la hélice. Por consiguiente, las elasticidades (resortes) correspondientes a los dos segmentos 12 y 23 se tienen que considerar como resortes en serie. Las constantes de resorte de los segmentos 12 y 23 de la flecha ($k_{t_{12}}$ y $k_{t_{23}}$) resultan de

$$k_{t_{12}} = \frac{GJ_{12}}{l_{12}} = \frac{G\pi(D_{12}^4 - d_{12}^4)}{32 l_{12}} = \frac{(80 \times 10^9)\pi(0.3^4 - 0.2^4)}{32(2)}$$

$$= 25.5255 \times 10^6 \text{ N-m/rad}$$

$$k_{t_{23}} = \frac{GJ_{23}}{l_{23}} = \frac{G\pi(D_{23}^4 - d_{23}^4)}{32 l_{23}} = \frac{(80 \times 10^9)\pi(0.25^4 - 0.15^4)}{32(3)}$$

$$= 8.9012 \times 10^6 \text{ N-m/rad}$$

Como los resortes están en serie, la ecuación (1.16) da por resultado

$$k_{t_{eq}} = \frac{k_{t_{12}}k_{t_{23}}}{k_{t_{12}} + k_{t_{23}}} = \frac{(25.5255 \times 10^6)(8.9012 \times 10^6)}{(25.5255 \times 10^6 + 8.9012 \times 10^6)} = 6.5997 \times 10^6 \text{ N-m/rad}$$

■

Ejemplo 1.7 *k* equivalente de un polipasto

Un polipasto, que funciona con un cable de acero, está montado en el extremo de una viga en voladizo como se muestra en la figura 1.31(a). Determine la constante de resorte equivalente del sistema cuando la longitud suspendida del cable es l. Suponga que el diámetro de la sección transversal neta del cable es d y que el módulo de Young de la viga y el cable es E.

Solución: La constante de resorte de la viga en voladizo está dada por

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3}\left(\frac{1}{12}at^3\right) = \frac{Eat^3}{4b^3} \tag{E.1}$$

La rigidez del cable sometido a una carga axial es

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l} \tag{E.2}$$

Como tanto el cable como la viga en voladizo experimentan la misma carga W, como se muestra en la figura 1.31(b), se modelan como resortes en serie, como se ve en la figura 1.31(c). La constante de resorte equivalente k_{eq} está dada por

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

o bien

$$k_{eq} = \frac{E}{4}\left(\frac{\pi a t^3 d^2}{\pi d^2 b^3 + l a t^3}\right) \tag{E.3}$$

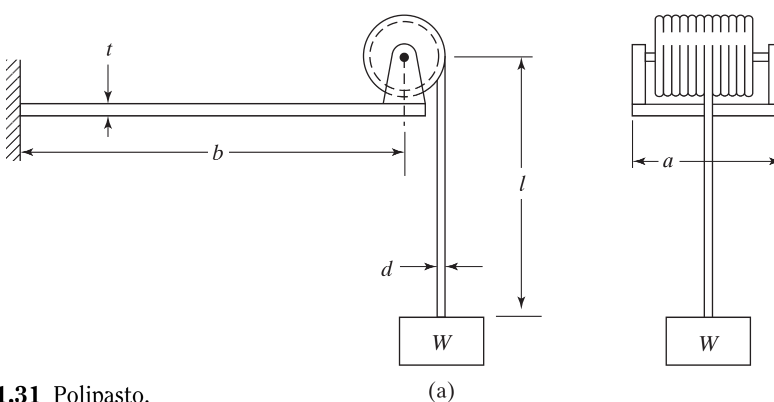


Figura 1.31 Polipasto.

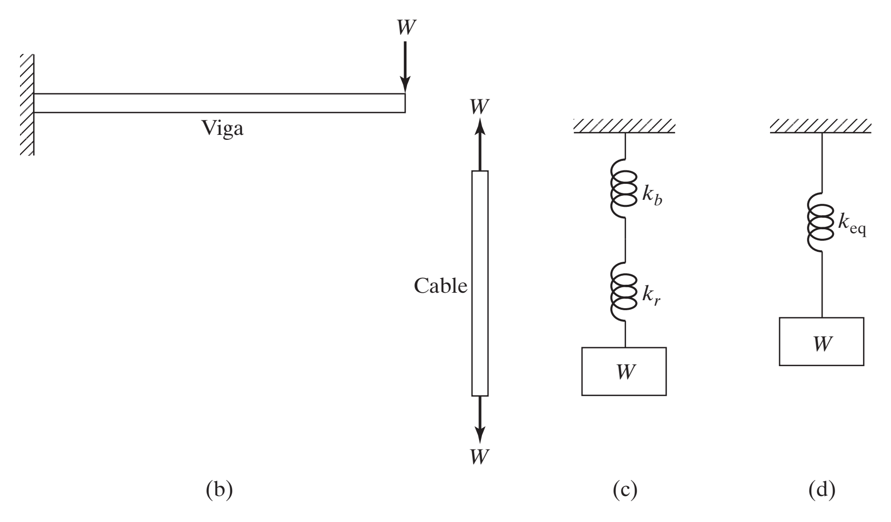


Figura 1.31 Polipasto (continuación).

■

Ejemplo 1.8 *k* equivalente de una grúa

La pluma *AB* de la grúa que se muestra en la figura 1.32(a) es una barra de acero uniforme de 10 m de longitud y 2,500 mm^2 de sección transversal. Un peso *W* cuelga mientras la grúa está estacionaria. El cable *CDEBF* es de acero y su sección transversal es de 100 mm^2. Ignore el efecto del cable *CDEB* y encuentre la constante de resorte equivalente en la dirección vertical.

Solución: La constante de resorte equivalente se determina por medio de la equivalencia de energías potenciales de los dos sistemas. Como la base de la grúa es rígida, se considera que el cable y la pluma están fijos en los puntos *F* y *A*, respectivamente. Además, el efecto del cable *CDEB* es insignificante; por consiguiente, se puede suponer que el peso *W* actúa a través del punto *B* como se muestra en la figura 1.32(b).

Un desplazamiento vertical del punto *B* hará que el resorte (pluma) y el resorte (cable) se deformen una cierta cantidad. La longitud del cable *FB*, l_1, está dada por la figura 1.32(b):

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10)\cos 135° = 151.426, \quad l_1 = 12.3055 \text{ m}$$

El ángulo θ satisface la relación

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3)\cos\theta = 10^2, \quad \cos\theta = 0.8184, \quad \theta = 35.0736°$$

La energía potencial total (U) almacenada en los resortes k_1 y k_2 se expresa utilizando la ecuación (1.2) como

$$U = \frac{1}{2}k_1[x\cos(90° - \theta)]^2 + \frac{1}{2}k_2[x\cos(90° - 45°)]^2 \tag{E.1}$$

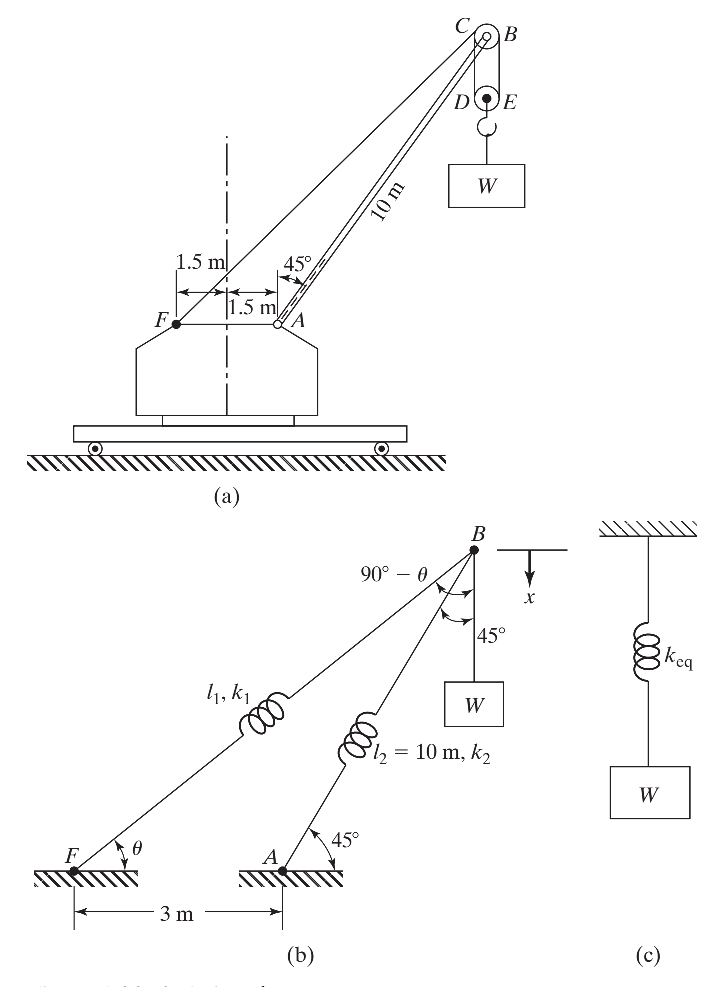


Figura 1.32 Grúa izando una carga.

donde

$$k_1 = \frac{A_1E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12.3055} = 1.6822 \times 10^6 \text{ N/m}$$

y

$$k_2 = \frac{A_2E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5.1750 \times 10^7 \text{ N/m}$$

Como el resorte equivalente en la dirección vertical experimenta una deformación x, la energía potencial del resorte equivalente (U_{eq}) está dada por

$$U_{eq} = \tfrac{1}{2} k_{eq} x^2 \tag{E.2}$$

Si se establece $U = U_{eq}$, obtenemos la constante de resorte equivalente del sistema como

$$k_{eq} = k_1 \operatorname{sen}^2 \theta + k_2 \operatorname{sen}^2 45° = k_1 \operatorname{sen}^2 35.0736° + k_2 \operatorname{sen}^2 45° = 26.4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

■

Ejemplo 1.9 *k* equivalente de una barra rígida conectada por resortes

Una barra rígida de longitud l acoplada a una bisagra está conectada por dos resortes de rigideces k_1 y k_2 y sometida a una fuerza F como se muestra en la figura 1.33(a). Suponiendo que el desplazamiento angular de la barra (θ) sea pequeño, encuentre la constante de resorte equivalente del sistema que relaciona la fuerza aplicada F con el desplazamiento resultante x.

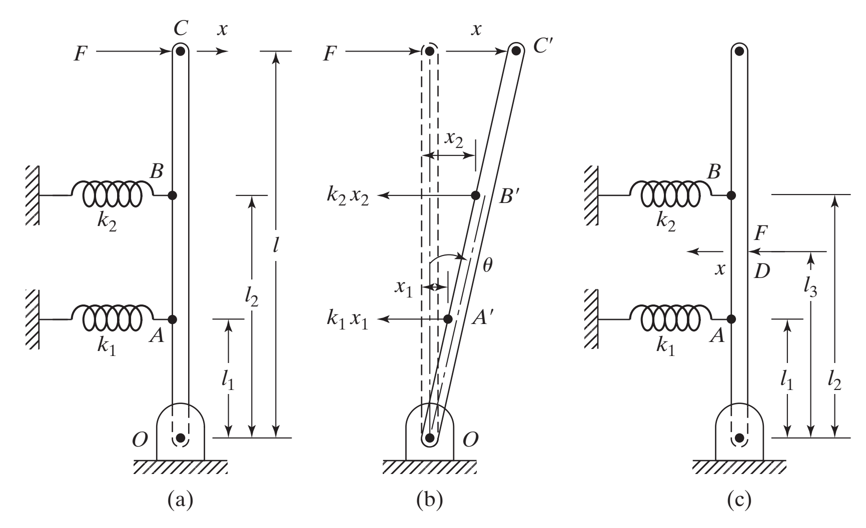


Figura 1.33 Barra rígida conectada por resortes.

Solución: Para un desplazamiento angular pequeño de la barra rígida (θ), los puntos de fijación de los resortes k_1 y k_2 (A y B) y el punto de aplicación (C) de la fuerza F experimentan los desplazamientos lineales u horizontales l_1 sen θ, l_2 sen θ y l sen θ, respectivamente. Como θ es pequeño, los desplazamientos horizontales de los puntos A, B y C se pueden aproximar como $x_1 = l_1\theta$, $x_2 = l_2\theta$ y $x = l\theta$, respectivamente. Las reacciones de los resortes, k_1x_1 y k_2x_2, serán las indicadas en la figura 1.33(b). La constante de resorte equivalente del sistema (k_{eq}) referida al punto de aplicación de la fuerza F se determina considerando el equilibrio de momentos de las fuerzas con respecto al punto conectado a la bisagra O:

$$k_1x_1(l_1) + k_2x_2(l_2) = F(l)$$

o

$$F = k_1\left(\frac{x_1l_1}{l}\right) + k_2\left(\frac{x_2l_2}{l}\right) \tag{E.1}$$

Al expresar F como $k_{eq}x$, la ecuación (E.1) se escribe como

$$F = k_{eq}x = k_1\left(\frac{x_1l_1}{l}\right) + k_2\left(\frac{x_2l_2}{l}\right) \tag{E.2}$$

Utilizando $x_1 = l_1\theta$, $x_2 = l_2\theta$ y $x = l\theta$, la ecuación (E.2) da el resultado deseado:

$$k_{eq} = k_1\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + k_2\left(\frac{l_2}{l}\right)^2 \tag{E.3}$$

Notas:

1. Si la fuerza F se aplica en otro punto D de la barra rígida como se muestra en la figura 1.33(c), se puede encontrar la constante de resorte equivalente referida al punto D como

$$k_{eq} = k_1\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2 + k_2\left(\frac{l_2}{l_3}\right)^2 \tag{E.4}$$

2. La constante de resorte equivalente, k_{eq}, del sistema también se puede determinar por medio de la relación:

Trabajo realizado por la fuerza aplicada F = Energía de deformación almacenada en los resortes k_1 y k_2 (E.5)

Para el sistema que se muestra en la figura 1.33(a), la ecuación (E.5) da por resultado

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \tag{E.6}$$

a partir de la cual es fácil obtener la ecuación (E.3).

3. Aunque los dos resortes parecen estar conectados a la barra rígida en paralelo, no se puede seguir la fórmula de los resortes en paralelo (ecuación 1.12) debido a que los desplazamientos de los resortes no son los mismos.

■

1.7.5 Constante de resorte asociada con la fuerza de restauración producida por la gravedad

En algunas aplicaciones se desarrolla una fuerza o momento de restauración producido por la gravedad cuando una masa experimenta un desplazamiento. En esos casos se puede asociar una constante de resorte equivalente con la fuerza o momento de restauración de la gravedad. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 1.10 Constante de resorte asociada con una fuerza de restauración producida por la gravedad

La figura 1.34 muestra un péndulo simple de longitud l con una lenteja de masa m. Considerando un desplazamiento angular θ del péndulo, determine la constante de resorte asociada con la fuerza (o momento) de restauración.

Solución: Cuando el péndulo se somete a un desplazamiento angular θ, la masa m se mueve a una distancia l sen θ a lo largo de la dirección horizontal (x). El momento o par de restauración (T) creado por el peso de la masa (mg) con respecto al pivote O está dado por

$$T = mg(l \operatorname{sen} \theta) \tag{E.1}$$

Para desplazamientos angulares pequeños θ, sen θ se puede aproximar como sen $\theta \approx \theta$ y la ecuación (E.1) se escribe como

$$T = mgl\theta \tag{E.2}$$

Si expresamos la ecuación (E.2) como

$$T = k_t\theta \tag{E.3}$$

la constante de resorte torsional equivalente deseada k_t se puede identificar como

$$k_t = mgl \tag{E.4}$$

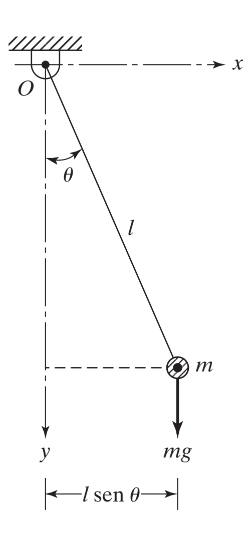


Figura 1.34 Péndulo simple.

■

1.8 Elementos de masa o inercia

Se supone que el elemento de masa o inercia es un cuerpo rígido que puede ganar o perder energía cinética siempre que cambia su velocidad. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, el producto de la masa y su aceleración son iguales a la fuerza aplicada a la masa. El trabajo es igual a la fuerza multiplicada por el desplazamiento en la dirección de la fuerza, y el trabajo realizado en una masa se almacena como energía cinética.

En la mayoría de los casos se tiene que utilizar un modelo matemático para representar el sistema vibratorio real, y a menudo hay varios modelos posibles. El propósito del análisis suele determinar cuál modelo matemático es el adecuado. Una vez seleccionado el modelo, los elementos de masa o inercia del sistema son fáciles de identificar. Por ejemplo, consideremos de nuevo la viga en voladizo con una masa en el extremo de la figura 1.25(a). Para un rápido y razonablemente preciso análisis, se desechan la masa y el amortiguamiento de la viga; el sistema se puede modelar como un sistema de resorte y masa, como se muestra en la figura 1.25(b). La masa m representa el elemento de masa, y la elasticidad de la viga indica la rigidez del resorte. Luego consideramos un edificio de varios pisos sometido a un sismo. Suponiendo que la masa de la estructura es insignificante comparada con las de las masas de los pisos, el edificio se modela como un sistema de varios grados de libertad, como se muestra en la figura 1.35. Las masas en los diversos pisos representan los elementos de masa, y las elasticidades de los miembros verticales indican los elementos de resorte.

1.8.1 Combinación de masas

En muchas aplicaciones prácticas aparecen varias masas en combinación. Para un análisis simple podemos reemplazarlas por una sola masa equivalente, como se indica a continuación [1.27].

Caso 1. Masas traslacionales conectadas por una barra rígida. Consideremos las masas fijas en una barra rígida pivotada en un extremo, como se muestra en la figura 1.36(a). Se puede suponer que la masa equivalente está localizada en cualquier punto a lo largo de la barra. Para ser específicos, supongamos que la ubicación de la masa equivalente es la de la masa m_1. Las velocidades de las masas $m_2(\dot{x}_2)$ y $m_3(\dot{x}_3)$ se pueden expresar en función de la velocidad de la masa $m_1(\dot{x}_1)$, suponiendo pequeños desplazamientos angulares de la barra, como

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1 \tag{1.18}$$

y

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1 \tag{1.19}$$

Igualando la energía cinética del sistema de tres masas con la del sistema de masa equivalente obtenemos

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2 \tag{1.20}$$

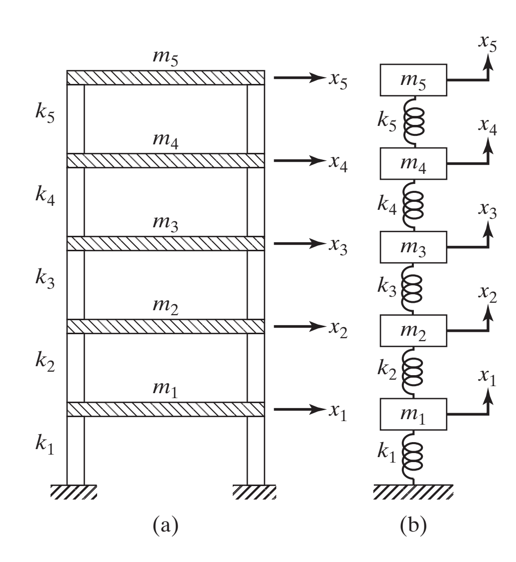


Figura 1.35 Idealización de un edificio de varios pisos como un sistema de varios grados de libertad.

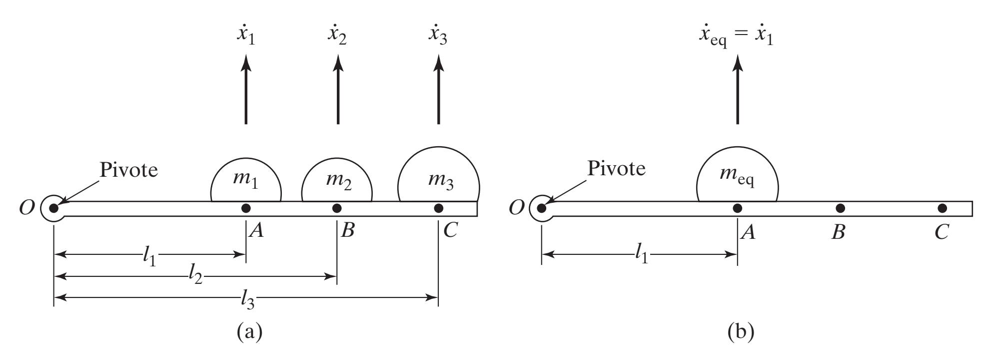


Figura 1.36 Masas traslacionales conectadas por una barra rígida.

Esta ecuación da por resultado, considerando las ecuaciones (1.18) y (1.19):

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3 \tag{1.21}$$

Se ve que la masa equivalente de un sistema compuesto de varias masas (cada una moviéndose a una diferente velocidad) puede considerarse como la masa imaginaria, la cual, cuando se mueva a una velocidad específica v, tendrá la misma energía cinética que la del sistema.

Caso 2: Masas traslacionales y rotacionales acopladas. Sea una masa m que rota a una velocidad $\dot{x}$ acoplada a otra masa (de momento de inercia de masa, J_0) que rota a una velocidad θ, como en el sistema de cremallera y piñón que se muestra en la figura 1.37.

Estas dos masas se pueden combinar para obtener o (1) una sola masa traslacional equivalente m_{eq}, o (2) una sola masa rotacional equivalente J_{eq}, como se muestra a continuación.

1. *Masa traslacional equivalente*. La energía cinética de las dos masas está dada por

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \tag{1.22}$$

y la energía cinética de la masa equivalente se expresa como

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \tag{1.23}$$

Dado que $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$ y $\dot{\theta} = \dot{x}/R$, la equivalencia de T y T_{eq} da

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

es decir,

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \tag{1.24}$$

2. *Masa rotacional equivalente*. En este caso $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ y $\dot{x} = \dot{\theta}R$, y la equivalencia de T y T_{eq} conduce a

$$\frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m(\dot{\theta}R)^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

o

$$J_{eq} = J_0 + mR^2 \tag{1.25}$$

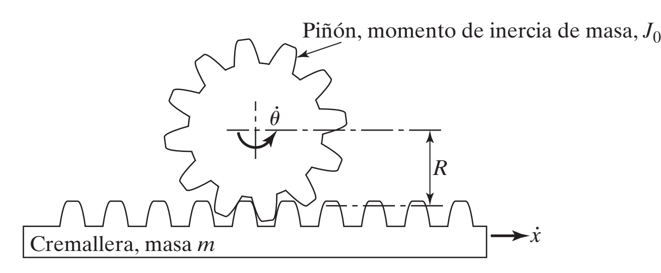


Figura 1.37 Masas traslacionales y rotacionales en un sistema de cremallera y piñón.

Ejemplo 1.11 Masa equivalente de un sistema

Encuentre la masa equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.38, donde el eslabón rígido 1 está fijo en la polea y gira con ella.

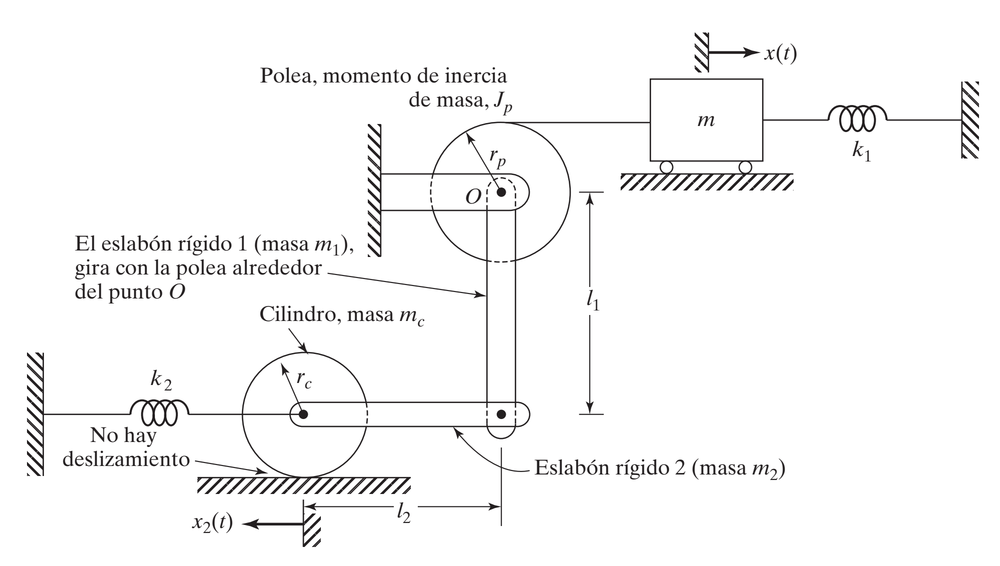


Figura 1.38 Sistema considerado para encontrar una masa equivalente.

Solución: Suponiendo desplazamientos pequeños, la masa equivalente (m_{eq}) se determina utilizando la equivalencia de las energías cinéticas de los dos sistemas. Cuando la masa m se desplaza una distancia x, la polea y el eslabón rígido 1 giran en un ángulo $\theta_p = \theta_1 = x/r_p$. Esto hace que el eslabón rígido 2 y el cilindro se desplacen una distancia $x_2 = \theta_p l_1 = x l_1/r_p$. Como el cilindro rueda sin deslizarse, gira en un ángulo $\theta_c = x_2/r_c = x l_1/r_p r_c$. La energía cinética del sistema (T) se expresa (para desplazamientos pequeños) como:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}_c^2 + \frac{1}{2}m_c\dot{x}_2^2 \tag{E.1}$$

donde J_p, J_1 y J_c indican los momentos de inercia de masa de las poleas, el eslabón 1 (con respecto a O), y el cilindro, respectivamente, $\dot{\theta}_p$, $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_c$ indican las velocidades angulares de la polea, el vínculo 1 (con respecto a O), y el cilindro, respectivamente, y $\dot{x}$ y $\dot{x}_2$ representan las velocidades lineales de la masa m y el eslabón 2, respectivamente. Observando que $J_c = m_c r_c^2/2$ y $J_1 = m_1 l_1^2/3$, la ecuación (E.1) se vuelve a escribir como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_p\left(\frac{\dot{x}}{r_p}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 l_1^2}{3}\right)\left(\frac{\dot{x}}{r_p}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{m_c r_c^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p r_c}\right)^2 + \frac{1}{2}m_c\left(\frac{\dot{x}l_1}{r_p}\right)^2 \tag{E.2}$$

Si igualamos la ecuación (E.2) a la energía cinética del sistema equivalente

$$T = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \tag{E.3}$$

obtenemos la masa equivalente del sistema como

$$m_{eq} = m + \frac{J_p}{r_p^2} + \frac{1}{3}\frac{m_1 l_1^2}{r_p^2} + \frac{m_2 l_1^2}{r_p^2} + \frac{1}{2}\frac{m_c l_1^2}{r_p^2} + m_c \frac{l_1^2}{r_p^2} \tag{E.4}$$

■

Ejemplo 1.12 Mecanismo seguidor de leva

Un mecanismo seguidor de leva (figura 1.39) se utiliza para convertir el movimiento rotatorio de un cigüeñal en el movimiento oscilante o reciprocante de una válvula. El sistema seguidor se compone de una varilla de empuje de masa m_p, un balancín de masa m_r, un momento de inercia de masa J_r con respecto a su C.G., una válvula de masa m_v, y un resorte de válvula de masa insignificante [1.28-1.30]. Encuentre la masa equivalente (m_{eq}) de este sistema seguidor de leva suponiendo la ubicación de m_{eq} como (i) punto A e (ii) punto C.

Solución: La masa equivalente del sistema seguidor de leva se determina por medio de la equivalencia de las energías cinéticas de los dos sistemas. Debido a un desplazamiento vertical x de la varilla de empuje, el balancín gira un ángulo $\theta_r = x/l_1$ alrededor del pivote, la válvula desciende una distancia $x_v = \theta_r l_2 = x l_2/l_1$ y el C.G. del balancín desciende una distancia $x_r = \theta_r l_3 = x l_3/l_1$. La energía cinética del sistema (T) se expresa como[2]

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 \tag{E.1}$$

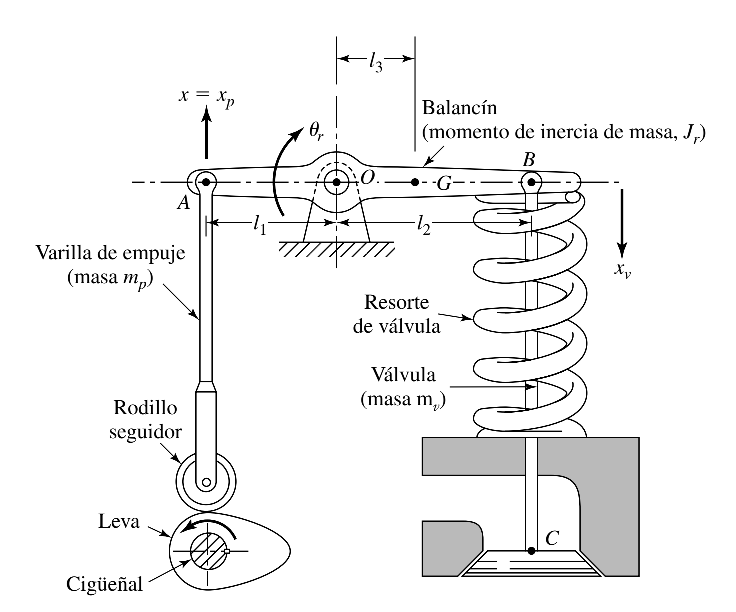


Figura 1.39 Mecanismo seguidor de leva.

[2]Si la masa del resorte de la válvula es m_s, entonces su masa equivalente será $\frac{1}{3} m_s$ (vea el ejemplo 2.8). Por lo tanto, su energía cinética será $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_s\right)\dot{x}_v^2$.

donde $\dot{x}_p$, $\dot{x}_r$, $\dot{x}_v$ son las velocidades lineales de la varilla de empuje, el C.G. del balancín y la válvula, respectivamente, y $\dot{\theta}_r$ es la velocidad angular del balancín.

(*i*) Si m_{eq} indica la masa equivalente colocada en el punto A, con $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$, la energía cinética del sistema de masa equivalente T_{eq} es

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \tag{E.2}$$

Igualando T y T_{eq} y observando que

$$\dot{x}_p = \dot{x}, \quad \dot{x}_v = \frac{\dot{x} l_2}{l_1}, \quad \dot{x}_r = \frac{\dot{x} l_3}{l_1}, \quad \text{y} \quad \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}}{l_1}$$

obtenemos

$$m_{eq} = m_p + \frac{J_r}{l_1^2} + m_v \frac{l_2^2}{l_1^2} + m_r \frac{l_3^2}{l_1^2} \tag{E.3}$$

(*ii*) Asimismo, si la masa equivalente se localiza en el punto C, $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_v$ y

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_v^2 \tag{E.4}$$

Igualando (E.4) y (E.1) se obtiene

$$m_{eq} = m_v + \frac{J_r}{l_2^2} + m_p \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + m_r \left(\frac{l_3}{l_2}\right)^2 \tag{E.5}$$

■

1.9 Elementos de amortiguamiento

En muchos sistemas prácticos, la energía vibratoria se convierte gradualmente en calor o sonido. Debido a la reducción de energía, la respuesta, como el desplazamiento del sistema, se reduce gradualmente. El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte gradualmente en calor o sonido se conoce como *amortiguamiento*. Aun cuando la cantidad de energía convertida en calor o en sonido es relativamente pequeña, la consideración del amortiguamiento llega a ser importante para predecir con exactitud la respuesta a la vibración de un sistema. Se supone que un amortiguador no tiene masa ni elasticidad, y que la fuerza de amortiguamiento existe sólo si hay una velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador. Es difícil determinar las causas del amortiguamiento en sistemas prácticos. Por consiguiente, el amortiguamiento se modela como uno más de los siguientes tipos.

Amortiguamiento viscoso. El amortiguamiento viscoso es el mecanismo de amortiguamiento de mayor uso en el análisis de vibración. Cuando un sistema mecánico vibra en un medio fluido como aire, gas, agua o aceite, la resistencia ofrecida por el fluido en el cuerpo en movimiento hace que se disipe la energía. En este caso, la cantidad de energía disipada depende de muchos factores, como el tamaño y forma del cuerpo vibratorio, la viscosidad del fluido, la frecuencia de vibración e incluso la velocidad del cuerpo vibratorio. En el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo vibratorio. Entre los ejemplos típicos de amortiguamiento

viscoso están: (1) la película de fluido entre superficies deslizantes; (2) el flujo de fluido alrededor de un pistón en un cilindro; (3) el flujo de fluido a través de un orificio, y (4) la película de fluido alrededor de un muñón en una chumacera.

Amortiguamiento de Coulomb o de fricción en seco. Aquí la fuerza de amortiguamiento es de magnitud constante pero de dirección opuesta a la del movimiento del cuerpo vibratorio. Es resultado de la fricción entre superficies que al frotarse están secas o no tienen una lubricación suficiente.

Amortiguamiento debido a un material o sólido o histerético. Cuando un material se deforma, absorbe o disipa energía [1.31]. El efecto se debe a la fricción entre los planos internos, los cuales se resbalan o deslizan a medida que ocurren las deformaciones. Cuando un cuerpo que experimenta amortiguamiento producido por el material se somete a vibración, el diagrama de esfuerzo-deformación muestra un bucle de histéresis como se indica en la figura 1.40(a). El área de este bucle indica la pérdida de energía por unidad de volumen del cuerpo por ciclo debido al amortiguamiento.[3]

1.9.1 Construcción de amortiguadores viscosos

Los amortiguadores viscosos se construyen de varias maneras. Por ejemplo, cuando una placa se mueve con respecto a otra placa paralela con un fluido viscoso entre ellas, se obtiene un amortiguamiento viscoso. Los ejemplos siguientes ilustran los varios métodos de construir amortiguadores viscosos utilizados en diferentes aplicaciones.

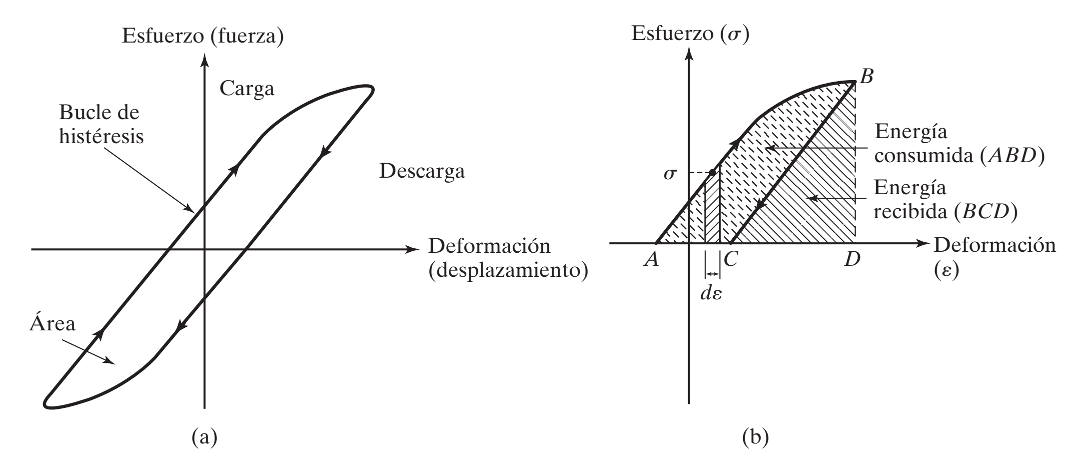


Figura 1.40 Bucle de histéresis para materiales elásticos.

[3]Cuando la carga aplicada a un cuerpo elástico se incrementa, el esfuerzo (σ) y la deformación (ε) en el cuerpo también se incrementan. El área bajo la curva σ-ε, dada por

$$u = \int \sigma \, d\varepsilon$$

indica la energía consumida (trabajo realizado) por unidad de volumen del cuerpo. Cuando la carga que actúa en el cuerpo se reduce, la energía se recupera. Cuando la trayectoria de descarga es diferente a la de la carga, el área *ABC* en la figura 1.40(b), es decir, el área del bucle de histéresis en la figura 1.40(a), indica la energía perdida por unidad de volumen del cuerpo.

Ejemplo 1.13 Constante de amortiguamiento de placas paralelas separadas por un fluido viscoso

Considere dos placas paralelas separadas una distancia h, con un fluido de viscosidad μ entre ellas. Derive una expresión para la constante de amortiguamiento cuando una placa se mueve con una velocidad v con respecto a la otra como se muestra en la figura 1.41.

Solución: Sean una placa fija y la otra móvil con una velocidad v en su propio plano. Las capas de fluido en contacto con la placa móvil se mueven con una velocidad v, en tanto que las que están en contacto con la placa fija no se mueven. Se supone que las velocidades de las capas de fluido intermedias varían linealmente entre 0 y v, como se muestra en la figura 1.41. De acuerdo con la ley de flujo viscoso de Newton, el esfuerzo cortante (τ) desarrollado en la capa de fluido a una distancia y de la placa fija está dado por

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{E.1}$$

donde $du/dy = v/h$ es el gradiente de velocidad. La fuerza cortante o resistente (F) desarrollada en la superficie inferior de la placa móvil es

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} \tag{E.2}$$

donde A es el área de la placa móvil. Expresando F como

$$F = cv \tag{E.3}$$

la constante c de amortiguamiento se encuentra como

$$c = \frac{\mu A}{h} \tag{E.4}$$

■

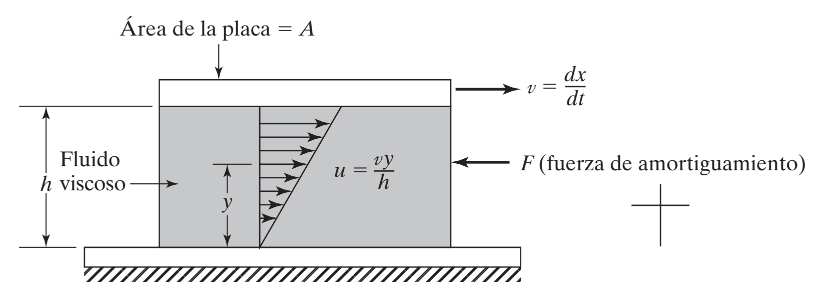


Figura 1.41 Placas paralelas con un fluido viscoso entre ellas.

Ejemplo 1.14 Holgura en un cojinete

Un cojinete, el cual se puede representar de forma aproximada como dos placas separadas por una delgada película de lubricante (figura 1.42), ofrece una resistencia de 400 N cuando se utiliza aceite SAE 30 como lubricante y la velocidad relativa entre las placas es de 10 m/s. Si el área de las placas es de 0.1 m^2, determine la holgura entre las placas. Suponga que la viscosidad absoluta del aceite SAE 30 es 50 μreyn o 0.3445 Pa-s.

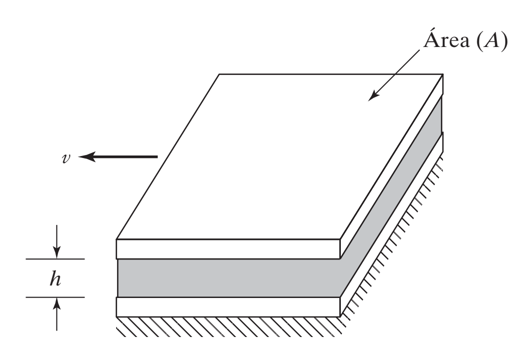


Figura 1.42 Placas planas separadas por una delgada película de lubricante.

Solución: Como la fuerza resistente se expresa como $F = cv$, donde c es la constante de amortiguamiento y v es la velocidad, tenemos

$$c = \frac{F}{v} = \frac{400}{10} = 40 \text{ N-s/m} \tag{E.1}$$

Si el cojinete se modela como un amortiguador de placas planas, la ecuación (E.4) del ejemplo 1.13 da la constante de amortiguamiento:

$$c = \frac{\mu A}{h} \tag{E.2}$$

Utilizando los datos, la ecuación (E.2) da por resultado

$$c = 40 = \frac{(0.3445)(0.1)}{h} \quad \text{or} \quad h = 0.86125 \text{ mm} \tag{E.3}$$

■

Ejemplo 1.15 Constante de amortiguamiento de una chumacera

Se utiliza una chumacera como soporte lateral de una flecha rotatoria como se muestra en la figura 1.43. Si el radio de la flecha es R, su velocidad angular es ω, la holgura radial entre la flecha y el cojinete es d, la viscosidad del fluido (lubricante) es μ, y la longitud del cojinete es l, obtenga una expresión para la constante de amortiguamiento rotacional de la chumacera. Suponga que la fuga de fluido es insignificante.

Solución: La constante de amortiguamiento de la chumacera se determina aplicando la ecuación del esfuerzo cortante en un fluido viscoso. El fluido en contacto con la flecha rotatoria tendrá una velocidad lineal (en la dirección tangencial) de $v = R\omega$, en tanto que el fluido en contacto con el cojinete estacionario tendrá una velocidad cero. Suponiendo que la velocidad del fluido en la dirección radial varía linealmente, tenemos

$$v(r) = \frac{vr}{d} = \frac{rR\omega}{d} \tag{E.1}$$

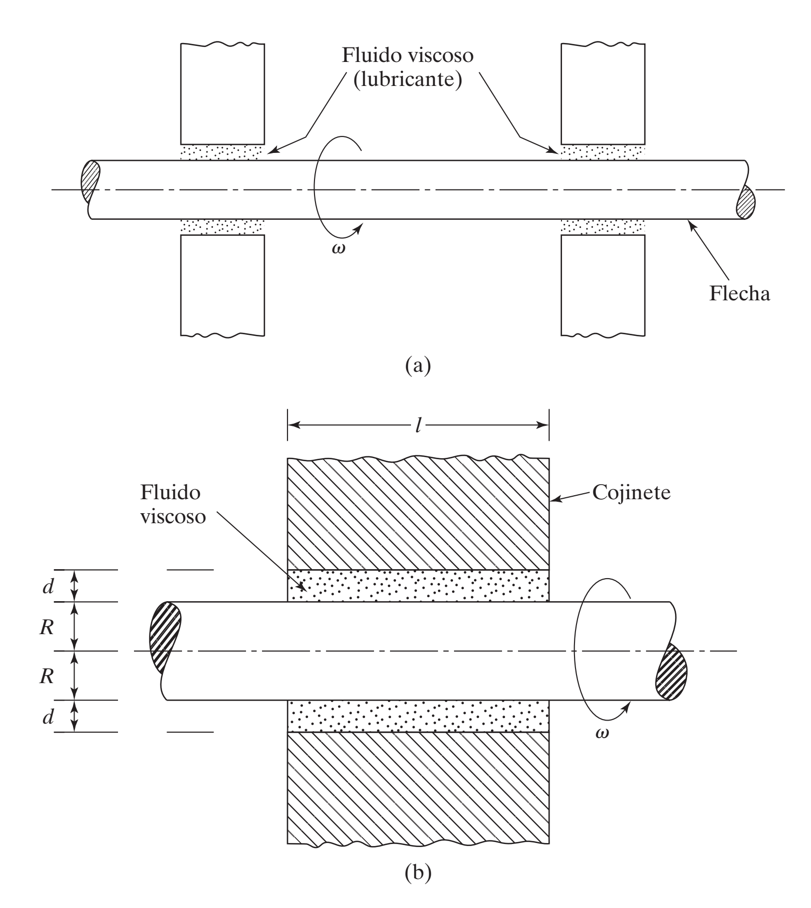


Figura 1.43 Chumacera.

El producto del gradiente de velocidad radial y la viscosidad del lubricante proporcionan el esfuerzo cortante (τ) en el lubricante:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr} = \frac{\mu R \omega}{d} \tag{E.2}$$

La fuerza requerida para cortar la película de fluido es igual al esfuerzo por el área. El par de torsión en la flecha (T) es igual a la fuerza por el brazo de palanca, de modo que

$$T = (\tau A)R \tag{E.3}$$

donde $A = 2\pi RI$ es el área de la flecha expuesta al lubricante. Por lo tanto la ecuación (E.3) se reescribe como

$$T = \left(\frac{\mu R \omega}{d}\right)(2\pi R l)R = \frac{2\pi \mu R^3 l \omega}{d} \tag{E.4}$$

De acuerdo con la definición de la constante de amortiguamiento rotacional del cojinete (c_t):

$$c_t = \frac{T}{\omega} \tag{E.5}$$

obtenemos la expresión deseada para la constante de amortiguamiento rotacional como

$$c_t = \frac{2\pi\mu R^3 l}{d} \tag{E.6}$$

Nota: La ecuación (E.4) se conoce como ley de Petroff y originalmente se publicó en 1883. Esta ecuación se utiliza ampliamente en el diseño de chumaceras [1.43].

■

Ejemplo 1.16 Amortiguador hidráulico de pistón-cilindro

Desarrolle una expresión para la constante de amortiguamiento del amortiguador hidráulico de la figura 1.44(a).

Solución: La constante de amortiguamiento del cilindro se determina aplicando la ecuación del esfuerzo cortante de un fluido viscoso y la ecuación de velocidad de flujo del fluido. Como se muestra en la figura 1.44(a), el amortiguador hidráulico se compone de un pistón de diámetro D y longitud l, que se mueve con una velocidad v_0 en un cilindro lleno de líquido de viscosidad μ [1.24, 1.32]. Sea d la holgura entre el pistón y la pared del cilindro. A una distancia y de la superficie en movimiento, sean v la velocidad y τ el esfuerzo cortante, y a una distancia $(y + dy)$, sean $(v - dv)$ y $(\tau + d\tau)$ la velocidad y el esfuerzo cortante, respectivamente (vea la figura 1.44(b)). El signo negativo para dv indica que la velocidad se reduce a medida que se acerca a la pared del cilindro. La fuerza viscosa en este anillo es igual a

$$F = \pi D l \, d\tau = \pi D l \frac{d\tau}{dy} dy \tag{E.1}$$

Pero el esfuerzo cortante está dado por

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \tag{E.2}$$

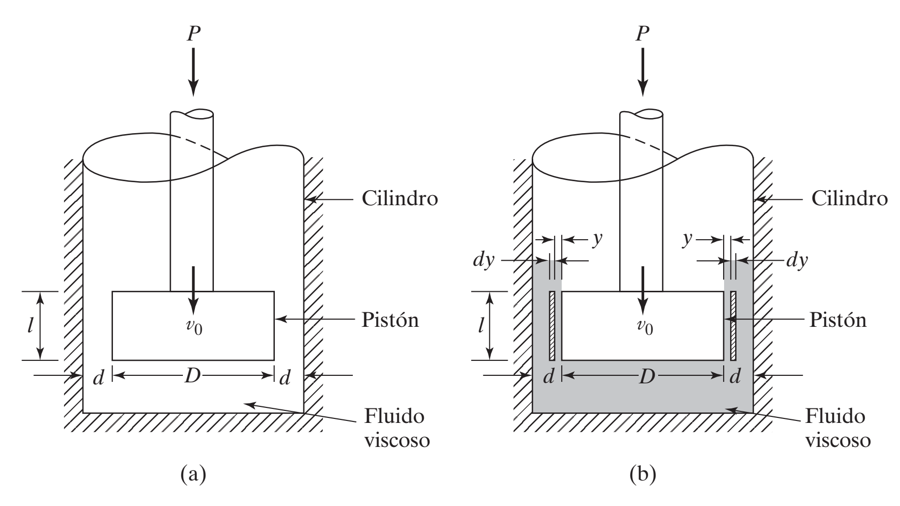


Figura 1.44 Amortiguador hidráulico.

donde el signo negativo es consistente con un gradiente de velocidad decreciente [1.33]. Utilizando la ecuación (E.2) en la ecuación (E.1), obtenemos

$$F = -\pi Dl\, dy\, \mu \frac{d^2v}{dy^2} \tag{E.3}$$

La fuerza en el pistón produce una diferencia de presión en los extremos del elemento, dada por

$$p = \frac{P}{\left(\dfrac{\pi D^2}{4}\right)} = \frac{4P}{\pi D^2} \tag{E.4}$$

Por lo tanto, la presión en el extremo del elemento es

$$p(\pi D\, dy) = \frac{4P}{D}\, dy \tag{E.5}$$

donde ($\pi D\ dy$) indica el área anular entre y y ($y + dy$). Si suponemos una velocidad media uniforme en la dirección del movimiento del fluido, la fuerza dada en las ecuaciones (E.3) y (E.5) debe ser igual. Por lo tanto, obtenemos

$$\frac{4P}{D}\, dy = -\pi Dl\, dy\, \mu \frac{d^2v}{dy^2}$$

o

$$\frac{d^2v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 l\mu} \tag{E.6}$$

Integrando esta ecuación dos veces y utilizando las condiciones límite $v = -v_0$ en $y = 0$ y $v = 0$ en $y = d$, obtenemos

$$v = \frac{2P}{\pi D^2 l\mu}(yd - y^2) - v_0\left(1 - \frac{y}{d}\right) \tag{E.7}$$

La velocidad de flujo a través de la holgura se obtiene integrando la velocidad de flujo a través de un elemento entre los límites $y = 0$ y $y = d$:

$$Q = \int_0^d v\pi D\, dy = \pi D\left[\frac{2Pd^3}{6\pi D^2 l\mu} - \frac{1}{2}v_0 d\right] \tag{E.8}$$

El volumen del líquido que fluye a través de la holgura por segundo debe ser igual al volumen por segundo desplazado por el pistón. Por consiguiente su velocidad será igual a esta velocidad de flujo dividida entre el área del pistón. Esto da

$$v_0 = \frac{Q}{\left(\dfrac{\pi}{4}D^2\right)} \tag{E.9}$$

Las ecuaciones (E.9) y (E.8) conducen a

$$P = \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \dfrac{2d}{D}\right)}{4d^3} \right] \mu v_0 \quad \text{(E.10)}$$

Escribiendo la fuerza $P = cv_0$, la constante de amortiguamiento c se determina como

$$c = \mu \left[\frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right) \right] \quad \text{(E.11)}$$

■

1.9.2 Linealización de un amortiguador no lineal

Si la relación fuerza (F)-velocidad (v) de un amortiguador es no lineal:

$$F = F(v) \quad (1.26)$$

se puede utilizar un proceso de linealización alrededor de la velocidad de operación (v^*) como en el caso de un resorte no lineal. El proceso de linealización proporciona la constante de amortiguamiento equivalente como

$$c = \left. \frac{dF}{dv} \right|_{v^*} \quad (1.27)$$

1.9.3 Combinación de amortiguadores

En algunos sistemas dinámicos se utilizan varios amortiguadores. En esos casos, todos los amortiguadores se reemplazan con un amortiguador único equivalente. Cuando los amortiguadores aparecen combinados, podemos utilizar procedimientos semejantes a los que utilizamos para determinar la constante de resorte equivalente de varios resortes con el objetivo de determinar un amortiguador único equivalente. Por ejemplo, cuando dos amortiguadores traslacionales, con constantes de amortiguamiento c_1 y c_2 aparecen combinados, la constante de amortiguamiento equivalente (c_{eq}) se puede hallar como (vea el problema 1.55):

$$\text{Amortiguadores en paralelo:} \quad c_{eq} = c_1 + c_2 \quad (1.28)$$

$$\text{Amortiguadores en serie:} \quad \frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad (1.29)$$

Ejemplo 1.17 Constantes de resorte y amortiguamiento equivalentes de un soporte de máquina herramienta

Una máquina fresadora de precisión está montada sobre cuatro soportes antivibratorios, como se muestra en la figura 1.45(a). La elasticidad y amortiguamiento de cada soporte antivibratorio se modela como un resorte y un amortiguador viscoso, como se muestra en la figura 1.45(b). Encuentre la constante de resorte equivalente, k_{eq}, y la constante de amortiguamiento equivalente, c_{eq}, del soporte de la máquina herramienta en función de las constantes de resorte (k_i) y las constantes de amortiguamiento (c_i) de los soportes de montaje.

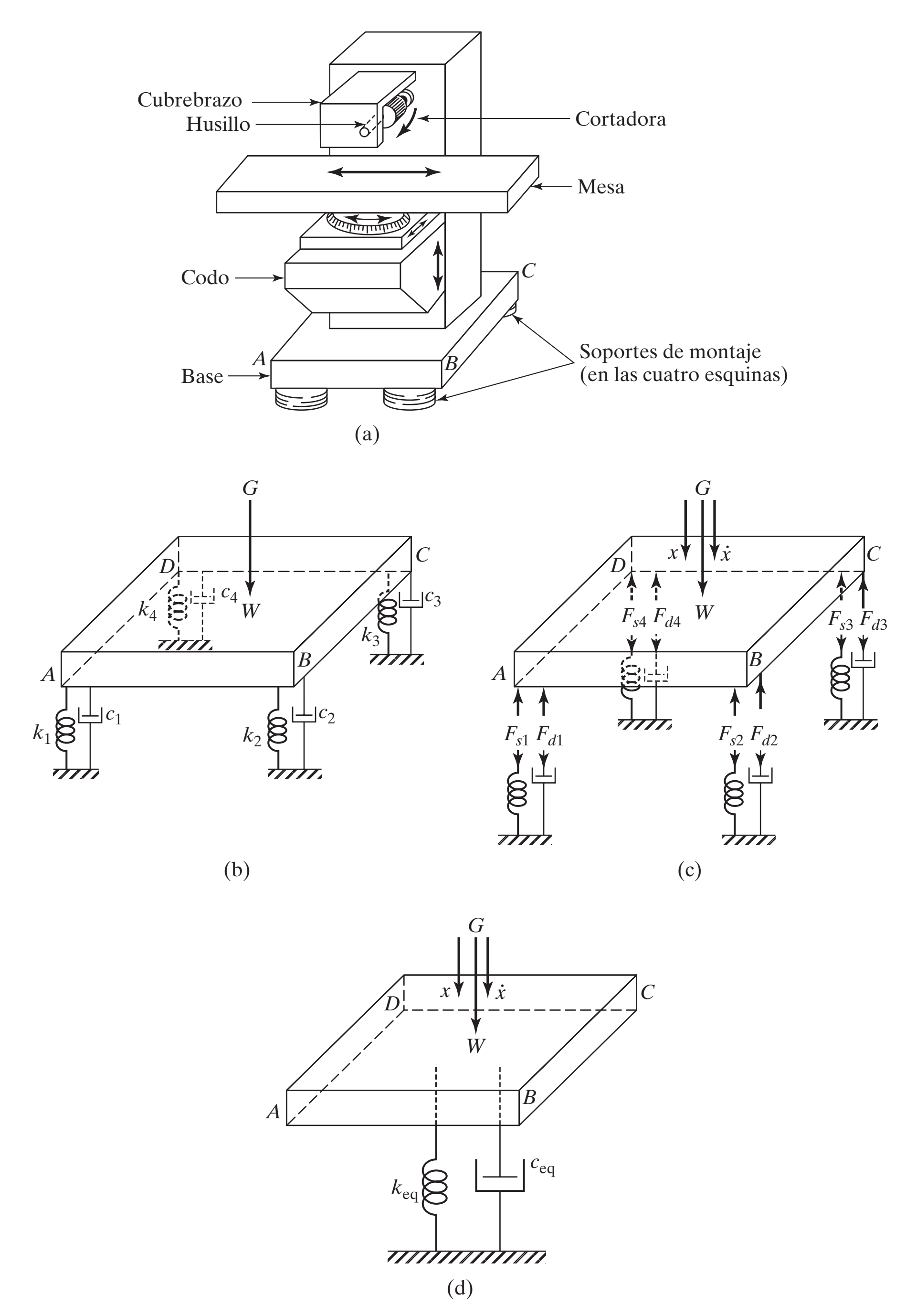


Figura 1.45 Fresadora horizontal.

Solución: En la figura 1.45(c) se muestran los diagramas de cuerpo libre de los cuatro resortes y los cuatro amortiguadores. Suponiendo que el centro de masa, G, esté localizado simétricamente con respecto a los cuatro resortes y amortiguadores, observamos que los resortes experimentarán el mismo desplazamiento, x, y que los amortiguadores tendrán la misma velocidad relativa $\dot{x}$, donde x y $\dot{x}$ indican el desplazamiento y la

velocidad, respectivamente, del centro de masa, G. Por consiguiente, las fuerzas que actúan en los resortes (F_{si}) y los amortiguadores (F_{di}) se expresan como

$$\begin{aligned} F_{si} &= k_i x; \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ F_{di} &= c_i \dot{x}; \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Sean F_s y F_d las fuerzas totales que actúan en todos los resortes y todos los amortiguadores, respectivamente (vea la figura 1.45(d)). Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas se expresan como

$$\begin{aligned} F_s &= F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} + F_{s4} \\ F_d &= F_{d1} + F_{d2} + F_{d3} + F_{d4} \end{aligned} \tag{E.2}$$

donde $F_s + F_d = W$, con W que indica la fuerza vertical total (incluida la fuerza de inercia) que actúa en la fresadora. De acuerdo con la ecuación 1.45(d), tenemos

$$\begin{aligned} F_s &= k_{\text{eq}} x \\ F_d &= c_{\text{eq}} \dot{x} \end{aligned} \tag{E.3}$$

La ecuación (E.2), junto con las ecuaciones (E.1) y (E.3) da por resultado

$$\begin{aligned} k_{\text{eq}} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4k \\ c_{\text{eq}} &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 4c \end{aligned} \tag{E.4}$$

donde $k_i = k$ y $c_i = c$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Nota: Si el centro de masa G no está simétricamente localizado con respecto a los cuatro resortes y amortiguadores, el resorte *i*ésimo experimenta un desplazamiento de x_i y el amortiguador *iésimo* experimenta una velocidad de $\dot{x}_i$, donde x_i y $\dot{x}_i$ pueden relacionarse con el desplazamiento x y la velocidad $\dot{x}$ del centro de masa G de la fresadora. En ese caso, las ecuaciones (E.1) y (E.4) tienen que modificarse de una manera apropiada.

1.10 Movimiento armónico

El movimiento oscilatorio puede repetirse con regularidad, como en el caso de un péndulo simple, o desplegar una irregularidad considerable, como en el caso del movimiento de la tierra en un sismo. Si el movimiento se repite después de intervalos de tiempo iguales, se llama *movimiento periódico*. El tipo más simple de movimiento periódico es el *movimiento armónico*. El movimiento impartido a la masa m por el mecanismo de yugo escocés que se muestra en la figura 1.46 es un ejemplo de movimiento armónico simple [1.24, 1.34, 1.35]. En este sistema, una manivela de radio A gira alrededor del punto O. El otro extremo de la manivela, P, se desliza en una barra ranurada, la cual se mueve con un movimiento de vaivén en la guía vertical R. Cuando la manivela gira a una velocidad angular ω, el extremo S del eslabón ranurado y por consiguiente la masa m del sistema de resorte y masa, se desplazan de sus posiciones medias una distancia x (en el tiempo t) dada por

$$x = A \operatorname{sen} \theta = A \operatorname{sen} \omega t \tag{1.30}$$

Este movimiento se muestra por medio de la curva senoidal en la figura 1.46. La velocidad de la masa m en el instante t la da

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t \tag{1.31}$$

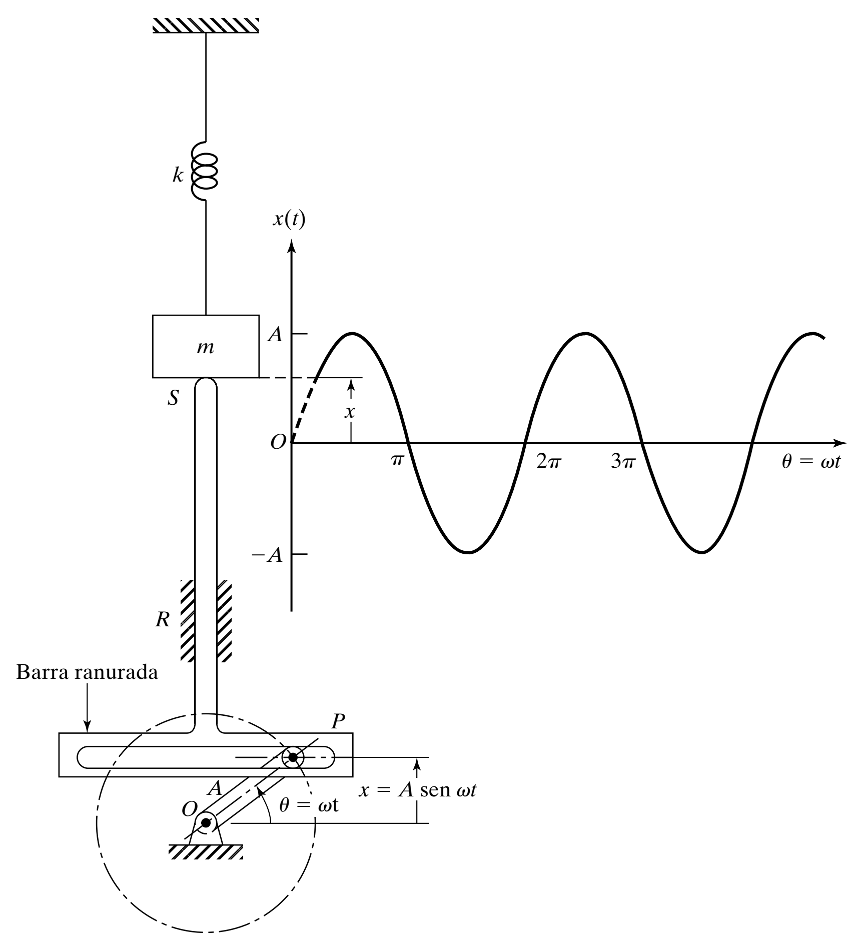


Figura 1.46 Mecanismo de yugo escocés.

y la aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x \tag{1.32}$$

Se ve que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento. Una vibración como esa, con la aceleración proporcional al desplazamiento y dirigida hacia la posición media, se conoce como *movimiento armónico simple*. El movimiento dado por $x = A \cos \omega t$ es otro ejemplo de movimiento armónico simple. La figura 1.46 muestra con claridad la semejanza entre el movimiento (armónico) cíclico y el movimiento senoidal.

1.10.1 Representación vectorial del movimiento armónico

El movimiento armónico se puede representar de una manera más práctica por medio de un vector $\overrightarrow{OP}$ de magnitud A que gira a una velocidad angular constante ω. En la figura 1.47, la proyección de la punta del vector $\vec{X} = \overrightarrow{OP}$ sobre el eje vertical está dada por

$$y = A \operatorname{sen} \omega t \tag{1.33}$$

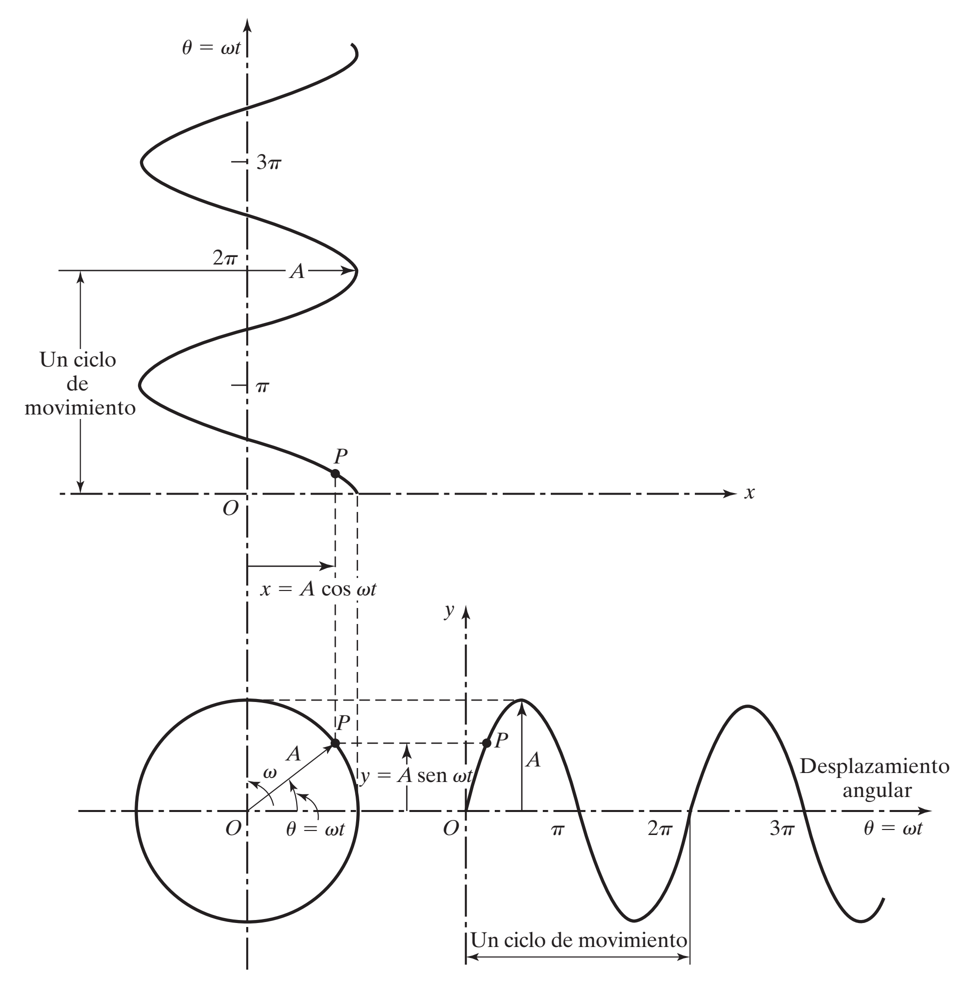


Figura 1.47 Movimiento armónico de la proyección del extremo de un vector rotatorio.

y su proyección sobre el eje horizontal por

$$x = A \cos \omega t \tag{1.34}$$

1.10.2 Representación por medio de números complejos del movimiento armónico

Como se vio antes, el método vectorial de representar el movimiento armónico requiere la descripción de los componentes horizontales y de los verticales. Es más práctico representar el movimiento armónico por medio de números complejos. Cualquier vector $\vec{X}$ en el plano *xy* se puede representar como un número complejo:

$$\vec{X} = a + ib \tag{1.35}$$

donde $i = \sqrt{-1}$, y a y b indican los componentes x y y de $\vec{X}$, respectivamente (vea la figura 1.48). Los componentes a y b también se conocen como partes *real* e *imaginaria* del vector *X*. Si *A* indica el módulo o valor absoluto del vector $\vec{X}$, y θ representa el argumento o ángulo entre el vector y el eje *x*, entonces $\vec{X}$ también puede expresarse como

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\,\text{sen}\,\theta \tag{1.36}$$

con

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \tag{1.37}$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{1.38}$$

Observando que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ..., $\cos\theta$ e $i\,\text{sen}\,\theta$ se pueden expandir en una serie como

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \tag{1.39}$$

$$i\,\text{sen}\,\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \tag{1.40}$$

Las ecuaciones (1.39) y (1.40) dan por resultado

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots = e^{i\theta} \tag{1.41}$$

y

$$(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) = 1 - i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots = e^{-i\theta} \tag{1.42}$$

Por lo tanto, la ecuación (1.36) se expresa como

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = Ae^{i\theta} \tag{1.43}$$

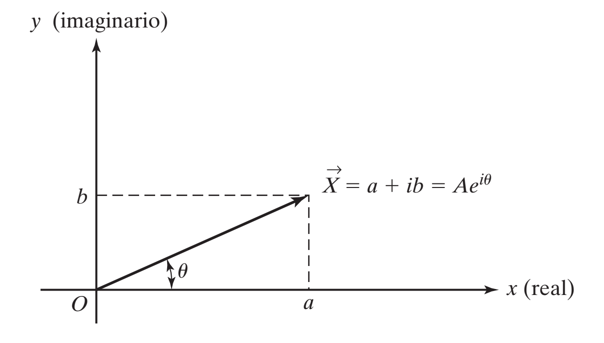


Figura 1.48 Representación de un número complejo.

1.10.3 Álgebra compleja

A veces los números complejos se representan sin utilizar alguna notación vectorial como

$$z = a + ib \tag{1.44}$$

donde a y b simbolizan las partes real e imaginaria de z. La suma, resta, multiplicación y división de números complejos se realizan siguiendo las reglas usuales del álgebra. Sean

$$z_1 = a_1 + ib_1 = A_1 e^{i\theta_1} \tag{1.45}$$
$$z_2 = a_2 + ib_2 = A_2 e^{i\theta_2} \tag{1.46}$$

donde

$$A_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}; \qquad j = 1, 2 \tag{1.47}$$

y

$$\theta_j = \tan^{-1}\left(\frac{b_j}{a_j}\right); \qquad j = 1, 2 \tag{1.48}$$

La suma y diferencia de z_1 y z_2 se pueden encontrar como

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} - A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned} \tag{1.50}$$

1.10.4 Operaciones con funciones armónicas

Utilizando la representación de número complejo, el vector rotatorio $\vec{X}$ de la figura 1.47 se escribe como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t} \tag{1.51}$$

donde ω indica la frecuencia circular (rad/s) de rotación del vector $\vec{X}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La diferenciación del movimiento armónico dado por la ecuación (1.51) con respecto al tiempo resulta

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X} \tag{1.52}$$

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t}) = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X} \tag{1.53}$$

Por lo tanto, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración se expresan como[4]

$$\text{desplazamiento} = \text{Re}[Ae^{i\omega t}] = A\cos\omega t \quad (1.54)$$

$$\text{velocidad} = \text{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] = -\omega A \,\text{sen}\,\omega t = \omega A\cos(\omega t + 90°) \quad (1.55)$$

$$\text{aceleración} = \text{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = -\omega^2 A\cos\omega t = \omega^2 A\cos(\omega t + 180°) \quad (1.56)$$

donde Re indica la parte real. Estas cantidades se muestran como vectores rotatorios en la figura 1.49. Se ve que el vector de aceleración se adelanta 90º al vector de velocidad, y que éste se adelanta 90º al vector de desplazamiento.

Las funciones armónicas se pueden sumar vectorialmente, como se muestra en la figura 1.50. Si $\text{Re}(\vec{X}_1) = A_1\cos\omega t$ y $\text{Re}(\vec{X}_2) = A_2\cos(\omega t + \theta)$, entonces la magnitud del vector $\vec{X}$ resultante es

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2\,\text{sen}\,\theta)^2} \quad (1.57)$$

y el ángulo α es

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_2\,\text{sen}\,\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right) \quad (1.58)$$

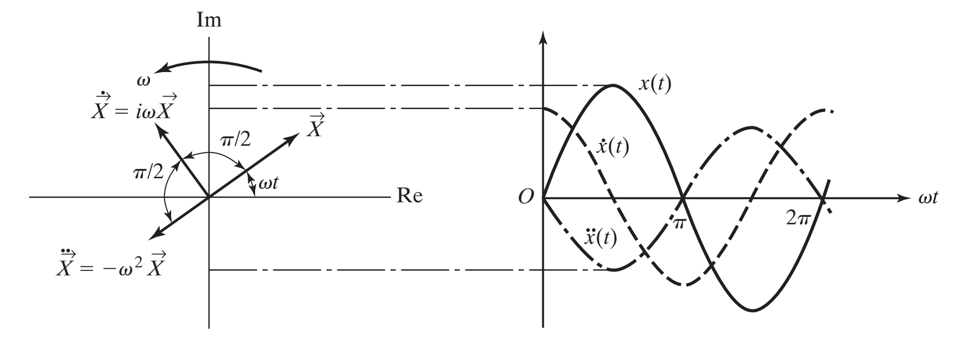


Figura 1.49 Desplazamiento, velocidad y aceleraciones como vectores rotatorios.

[4]Si el desplazamiento armónico se da originalmente como $x(t) = A\,\text{sen}\,\omega t$, entonces tenemos

$$\text{desplazamiento} = \text{Im}[Ae^{i\omega t}] = A\,\text{sen}\,\omega t$$
$$\text{velocidad} = \text{Im}[i\omega Ae^{i\omega t}] = \omega A\,\text{sen}(\omega t + 90°)$$
$$\text{aceleración} = \text{Im}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + 180°)$$

donde Im indica la parte imaginaria.

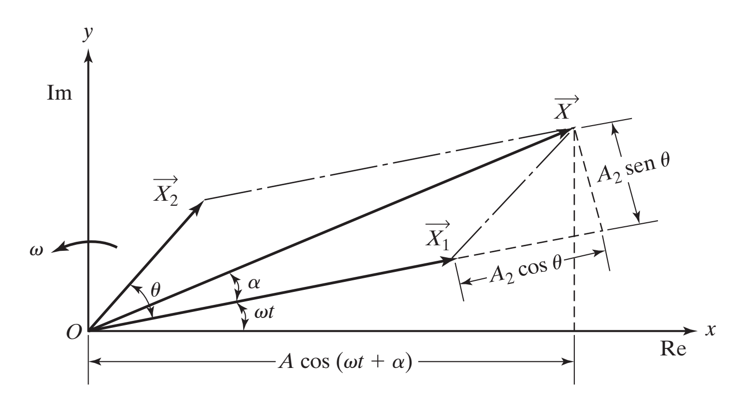


Figura 1.50 Suma vectorial de funciones armónicas.

Como las funciones originales se dan como componentes reales, la suma $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$ se expresa como $\text{Re}(\vec{X}) = A\cos(\omega t + \alpha)$.

Ejemplo 1.8 Suma de movimientos armónicos

Encuentre la suma de los dos movimientos armónicos $x_1(t) = 10\cos\omega t$ y $x_2(t) = 15\cos(\omega t + 2)$.

Solución: *Método 1. Utilizando relaciones trigonométricas*: Como la frecuencia circular es la misma tanto para $x_1(t)$ como para $x_2(t)$, expresamos la suma como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) = x_1(t) + x_2(t) \tag{E.1}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} A(\cos\omega t\cos\alpha - \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\alpha) &= 10\cos\omega t + 15\cos(\omega t + 2) \\ &= 10\cos\omega t + 15(\cos\omega t\cos 2 - \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,2) \end{aligned} \tag{E.2}$$

O bien,

$$\cos\omega t(A\cos\alpha) - \text{sen}\,\omega t(A\,\text{sen}\,\alpha) = \cos\omega t(10 + 15\cos 2) - \text{sen}\,\omega t(15\,\text{sen}\,2) \tag{E.3}$$

Igualando los coeficientes correspondientes de $\cos\omega t$ y $\text{sen}\,\omega t$ en ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} A\cos\alpha &= 10 + 15\cos 2 \\ A\,\text{sen}\,\alpha &= 15\,\text{sen}\,2 \\ A &= \sqrt{(10 + 15\cos 2)^2 + (15\,\text{sen}\,2)^2} \\ &= 14.1477 \end{aligned} \tag{E.4}$$

y

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{15\,\text{sen}\,2}{10 + 15\cos 2}\right) = 74.5963° \tag{E.5}$$

Método 2: Utilizando vectores: Con un valor arbitrario de ωt, los movimientos armónicos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se indican gráficamente como se muestra en la figura 1.51. Sumándolos vectorialmente, el vector resultante $x(t)$es

$$x(t) = 14.1477 \cos(\omega t + 74.5963°) \tag{E.6}$$

Método 3: Utilizando la representación de número complejo: Los dos movimientos armónicos se señalan en función de números complejos como:

$$x_1(t) = \text{Re}[A_1 e^{i\omega t}] \equiv \text{Re}[10 e^{i\omega t}]$$
$$x_2(t) = \text{Re}[A_2 e^{i(\omega t+2)}] \equiv \text{Re}[15 e^{i(\omega t+2)}] \tag{E.7}$$

La suma de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se expresa como

$$x(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t+\alpha)}] \tag{E.8}$$

donde A y α se determinan utilizando las ecuaciones (1.47) y (1.48) como $A = 14.1477$ y $\alpha = 74.5963°$.

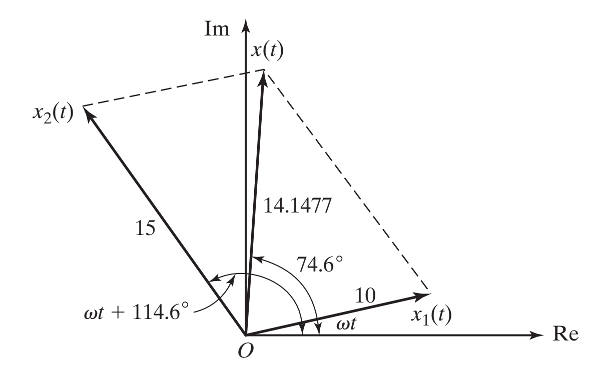


Figura 1.51 Suma de movimientos armónicos.

■

1.10.5 Definiciones y terminología

Las siguientes definiciones y terminología son útiles cuando tratamos con movimientos armónicos y otras funciones periódicas.

Ciclo. Al movimiento de un cuerpo vibratorio desde su posición no perturbada o de equilibrio hasta su posición en una dirección, y luego de vuelta a la posición de equilibrio, y luego a su posición extrema en la otra dirección, y de vuelta a la posición de equilibrio se le llama *ciclo de vibración*. Una revolución (es decir, un desplazamiento angular de 2π radianes) del pasador P en la figura 1.46 o una revolución del vector $\overrightarrow{OP}$ en la figura 1.47 constituyen un ciclo.

Amplitud. Al desplazamiento máximo de un cuerpo vibratorio a partir de su posición de equilibrio se le llama *amplitud* de vibración. En las figuras 1.46 y 1.47 la amplitud de vibración es igual a A.

Periodo de oscilación. El tiempo requerido para completar un ciclo de movimiento se conoce como *periodo de oscilación* o *periodo de tiempo* y está simbolizado por τ. Es igual al tiempo requerido para que el vector $\overrightarrow{OP}$ de la figura 1.47 gire en un ángulo de 2π y por consiguiente

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.59}$$

donde ω se llama frecuencia circular.

Frecuencia de oscilación. La cantidad de ciclos por unidad de tiempo se llama *frecuencia de oscilación* o simplemente *frecuencia* y está indicada por f. Por lo tanto

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.60}$$

Aquí a ω se le llama frecuencia circular para distinguirla de la frecuencia lineal $f = \omega/2\pi$. La variable ω simboliza la velocidad angular del movimiento cíclico; f se mide en ciclos por segundo (hertz) en tanto que ω se mide en radianes por segundo.

Ángulo de fase. Consideremos dos movimientos vibratorios indicados por ϕ

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{1.61}$$

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{1.62}$$

Los dos movimientos armónicos dados por las ecuaciones (1.61) y (1.62) se llaman *sincrónicos* porque tienen la misma frecuencia o velocidad angular, ω. No es necesario que dos oscilaciones sincrónicas tengan la misma amplitud, ni que alcancen sus valores máximos al mismo tiempo. Los movimientos dados por las ecuaciones (1.61) y (1.62) se representan gráficamente como se muestra en la figura 1.52. En esta figura, el segundo vector $\overrightarrow{OP_2}$ se adelanta un ángulo ϕ, conocido como *ángulo de fase*, al primero $\overrightarrow{OP_1}$. Esto significa que el máximo del segundo vector ocurriría ϕ radianes antes que el primero. Observemos que en lugar de los máximos, pueden considerarse cualesquier otros puntos para hallar el ángulo de fase. En las ecuaciones (1.61) y (1.62) o en la figura 1.52, se dice que los dos vectores tienen una *diferencia de fase* de ϕ.

Frecuencia natural. Si se deja que un sistema vibre por sí mismo después de una perturbación inicial, la frecuencia con la cual oscila sin la acción de fuerzas externas se conoce como *frecuencia natural*. Como se verá más adelante, por lo común, un sistema vibratorio que tiene n grados de libertad, tendrá n frecuencias naturales de vibración distintas.

Pulsaciones. Cuando se suman dos movimientos armónicos con frecuencias próximas entre sí, el movimiento resultante muestra un fenómeno conocido como pulsaciones. Por ejemplo, si

$$x_1(t) = X \cos \omega t \tag{1.63}$$

$$x_2(t) = X \cos(\omega + \delta)t \tag{1.64}$$

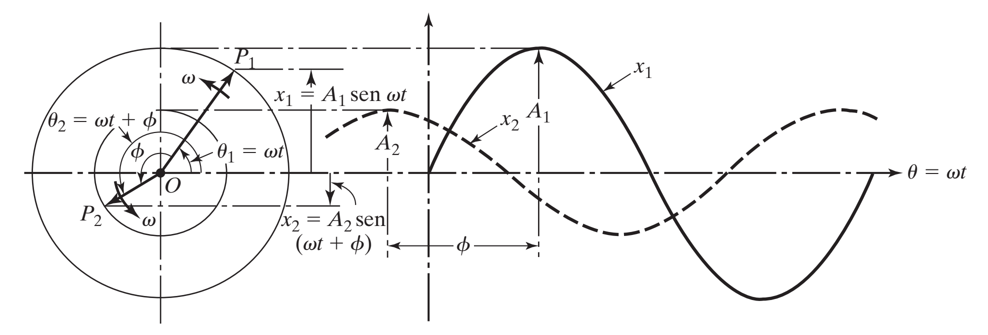


Figura 1.52 Diferencia de fase entre dos vectores.

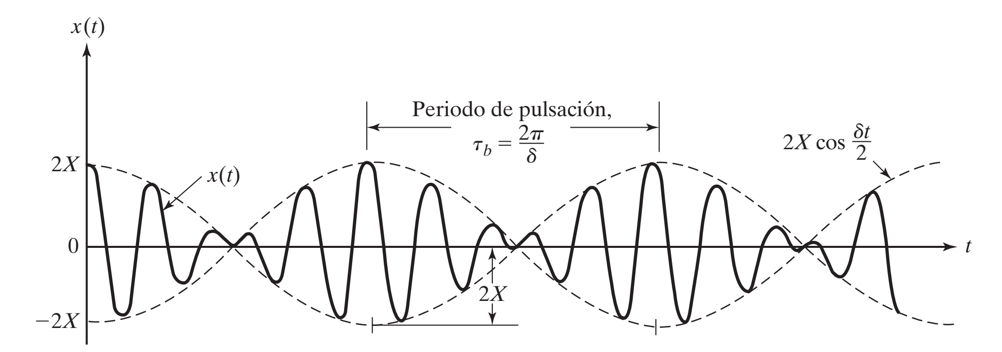


Figura 1.53 Fenómeno de pulsaciones.

donde δ es una cantidad pequeña, la suma de estos movimientos resulta

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X[\cos \omega t + \cos(\omega + \delta)t] \tag{1.65}$$

Utilizando la relación

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \tag{1.66}$$

la ecuación (1.65) se reescribe como

$$x(t) = 2X \cos\frac{\delta t}{2}\left(\cos \quad \omega + \frac{\delta}{2}\right)t \tag{1.67}$$

Esta ecuación se muestra gráficamente en la figura 1.53. Se ve que el movimiento resultante, $x(t)$, representa una onda coseno con frecuencia $\omega + \delta/2$, la cual es aproximadamente igual a ω, con una amplitud variable de $2X \cos \delta t/2$. Siempre que la amplitud alcanza un máximo, se llama pulsación. La frecuencia (δ) a la cual la amplitud de incrementa y reduce entre 0 y $2X$ se conoce como frecuencia de pulsación. El fenómeno de pulsación se observa a menudo en máquinas, estructuras y plantas eléctricas. Por ejemplo, en máquinas y estructuras, el fenómeno de pulsación ocurre cuando la frecuencia forzada se acerca a la frecuencia natural del sistema (vea la sección 3.3.2).

Octava. Cuando el valor máximo de un rango de frecuencia es dos veces su valor mínimo, se conoce como banda de octava. Por ejemplo, cada uno de los rangos 75-150 Hz, 150-300 Hz y 300-600 Hz pueden llamarse banda de octava. En cada caso se dice que los valores máximo y mínimo de frecuencia, los cuales tienen una relación de 2:1, difieren por una *octava*.

Decibel. Las diversas cantidades encontradas en el campo de la vibración y el sonido (desplazamiento, velocidad, aceleración, presión y potencia) suelen representarse utilizando la notación de *decibel*. Un decibel (dB) se define originalmente como una relación de potencias eléctricas:

$$\text{dB} = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) \tag{1.68}$$

donde P_0 es algún valor de potencia de referencia. Dado que la potencia eléctrica es proporcional al cuadrado del voltaje (X), el decibel también se expresa como

$$\text{dB} = 10 \log\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 = 20 \log\left(\frac{X}{X_0}\right) \tag{1.69}$$

donde X_0 es un voltaje de referencia especificado. En la práctica, la ecuación (1.69) también se utiliza para expresar las relaciones de otras cantidades como desplazamientos, velocidades, aceleraciones y presiones. Los valores de referencia de X_0 en la ecuación (1.6) suelen considerarse como 2×10^{-5} N/m^2 para presión, y $1\ \mu g = 9.81 \times 10^{-6}$ m/s^2 para aceleración.

1.11 Análisis armónico[5]

Aunque el movimiento armónico es más simple de manejar, el movimiento de muchos sistemas vibratorios es no armónico. Sin embargo, en muchos casos las vibraciones son periódicas, por ejemplo el tipo que se muestra en la figura 1.54(a). Por suerte, cualquier función de tiempo periódica puede ser representada por la serie de Fourier como una suma infinita de términos seno y coseno [1.36].

1.11.1 Expansión de la serie de Fourier

Si $x(t)$ es una función periódica con periodo τ, su representación como serie de Fourier está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\,\omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\,\omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) \end{aligned} \tag{1.70}$$

donde $\omega = 2\pi/\tau$ es la frecuencia fundamental y $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ son coeficientes constantes. Para determinar los coeficientes a_n y b_n, multiplicamos la ecuación (1.70) por cos $n\omega t$ y sen $n\omega t$, respectivamente, e integramos a lo largo de un periodo $\tau = 2\pi/\omega$, por ejemplo, de 0 a $2\pi/\omega$.

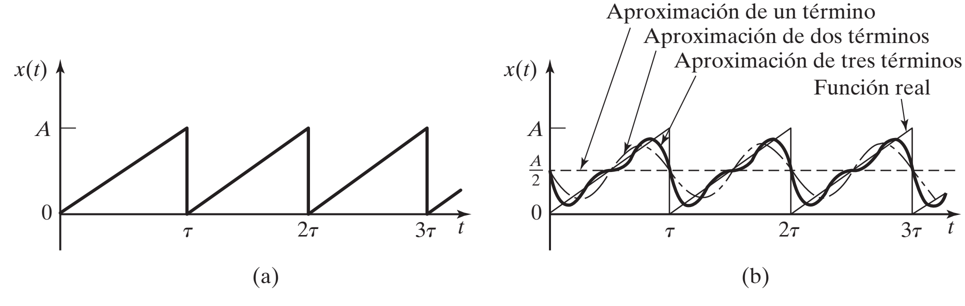


Figura 1.54 Una función periódica.

[5]El análisis armónico constituye la base de la sección 4.2.

Entonces notamos que todos los términos excepto uno en el lado derecho de la ecuación serán cero, y obtenemos

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t)\, dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\, dt \tag{1.71}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t\, dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\, dt \tag{1.72}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt \tag{1.73}$$

La interpretación física de la ecuación (1.70) es que cualquier función periódica puede representarse como una suma de funciones armónicas. Aunque la serie en la ecuación (1.70) es una suma infinita, podemos aproximar la mayoría de las funciones periódicas con la ayuda de sólo algunas funciones armónicas. Por ejemplo, la onda triangular de la figura 1.54(a) se representa a detalle con sólo agregar tres funciones armónicas, como se muestra en la figura 1.54(b).

La serie de Fourier también puede representarse por medio de la suma de sólo términos seno o coseno. Por ejemplo, la serie de sólo términos coseno se expresa como

$$x(t) = d_0 + d_1 \cos(\omega t - \phi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \phi_2) + \cdots \tag{1.74}$$

donde

$$d_0 = a_0/2 \tag{1.75}$$

$$d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \tag{1.76}$$

y

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \tag{1.77}$$

Fenómeno de Gibbs. Cuando una función periódica se representa con una serie de Fourier se observa un comportamiento anómalo. Por ejemplo, la figura 1.55 muestra una onda triangular y su representación de serie de Fourier con un número diferente de términos. Al aumentar los términos (n)

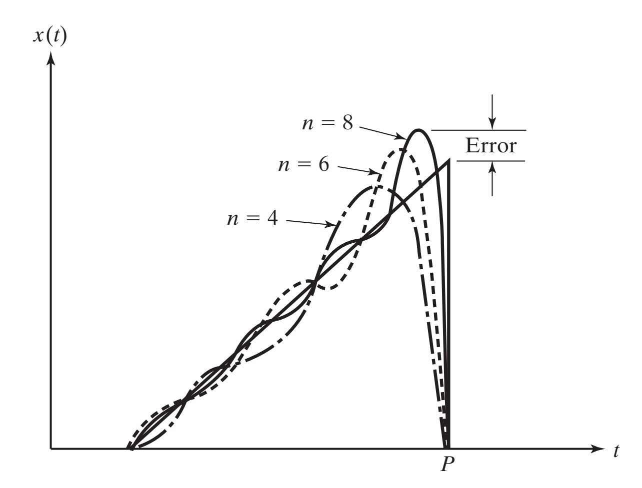


Figura 1.55 Fenómeno de Gibbs.

se ve que la aproximación mejora en otras partes excepto cerca de la discontinuidad (punto P en la figura 1.55). Aquí la desviación con respecto a la forma de onda verdadera se reduce pero sin que su amplitud sea más pequeña. Se ha observado que el error en la amplitud permanece a aproximadamente 9 por ciento aun cuando $k \to \infty$. Este comportamiento se conoce como fenómeno de Gibbs, en honor a su descubridor.

1.11.2 Serie de Fourier compleja

La serie de Fourier también puede expresarse en función de números complejos. Observando, por las ecuaciones (1.41) y (1.42), que

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t \tag{1.78}$$

y

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t \tag{1.79}$$

cos ωt y sen ωt se expresan como

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \tag{1.80}$$

y

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \tag{1.81}$$

Por lo tanto, la ecuación (1.70) se escribe como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right) \right\} \\ &= e^{i(0)\omega t} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{ib_0}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) + e^{-in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{1.82}$$

donde $b_0 = 0$. Si definimos los coeficientes de la serie de Fourier compleja c_n y c_{-n} como

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{1.83}$$

y

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{1.84}$$

La ecuación (1.82) se expresa como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{1.85}$$

Los coeficientes de Fourier c_n se determinan aplicando las ecuaciones (1.71) a (1.75), como

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)[\cos n\omega t - i \operatorname{sen} n\omega t]dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)e^{-in\omega t}dt \tag{1.86}$$

1.11.3 Espectro de frecuencia

Las funciones armónicas $a_n \cos n\omega t$ o $b_n \operatorname{sen} n\omega t$ en la ecuación (1.70) se llaman *armónicos* de orden n de la función periódica $x(t)$. El armónico de orden n tiene un periodo τ/n. Estos armónicos se trazan como líneas verticales en un diagrama de amplitud (a_n y b_n o d_n y ϕ_n) contra la frecuencia ($n\omega$), llamada *espectro de frecuencia* o *diagrama espectral*. La figura 1.56 muestra un espectro de frecuencia típico.

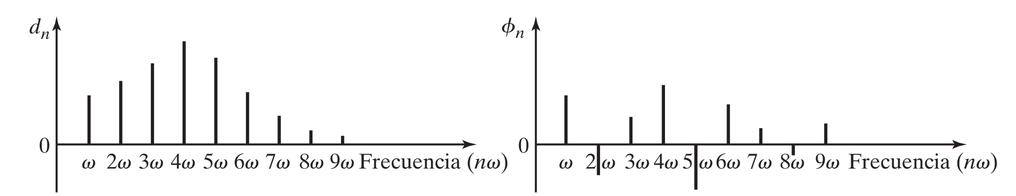


Figura 1.56 Espectro de frecuencia de una función de tiempo periódica típica.

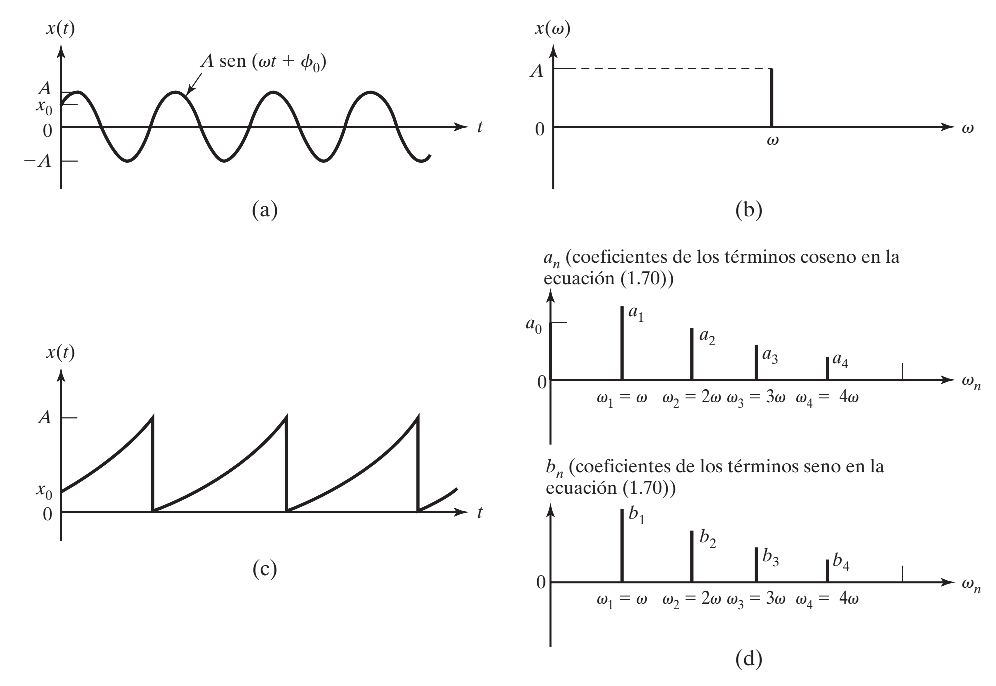


Figura 1.57 Representación de una función en los dominios del tiempo y la frecuencia.

1.11.4 Representaciones en el dominio del tiempo y la frecuencia

La expansión de la serie de Fourier permite describir cualquier función periódica utilizando tanto una representación en el dominio del tiempo como una representación en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, una función armónica dada por $x(t) = A$ sen ωt en el dominio del tiempo (vea la figura 1.57(a)) puede ser representada por la amplitud y la frecuencia ω en el dominio de la frecuencia (vea la figura 1.57(b)). Asimismo, una función periódica, como una onda triangular, puede ser representada en el dominio del tiempo, como se muestra en la figura 1.57(c), o en el dominio de la frecuencia, como se indica en la figura 1.57(d). Observemos que las amplitudes d_n y los ángulos de fase ϕ_n correspondientes a las frecuencias ω_n pueden utilizarse en lugar de las amplitudes a_n y b_n para la representación en el dominio de la frecuencia. Utilizar una integral de Fourier (vea la sección 14.9, en inglés, en el sitio Web) permite representar incluso funciones no periódicas o en un dominio del tiempo o un dominio de la frecuencia. La figura 1.57 muestra que la representación en el dominio de la frecuencia no proporciona las condiciones iniciales. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas a menudo se consideran innecesarias y sólo las condiciones de estado estable son de interés primordial.

1.11.5 Funciones par e impar

Una función par satisface la relación

$$x(-t) = x(t) \tag{1.87}$$

En este caso, la expansión de la serie de Fourier de $x(t)$ contiene sólo términos coseno:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \tag{1.88}$$

donde las ecuaciones (1.71) y (1.72) dan a_0 y a_n, respectivamente. Una función impar satisface la relación

$$x(-t) = -x(t) \tag{1.89}$$

En este caso, la expansión de la serie de Fourier de $x(t)$ contiene sólo términos seno:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t \tag{1.90}$$

donde la ecuación (1.73) da b_n. En algunos casos, una función dada puede considerarse como par o impar dependiendo de la ubicación de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, el desplazamiento del eje vertical de (a) a (b) o (c) en la figura 1.58(i) producirá una función impar o par. Esto significa que sólo tenemos que calcular los coeficientes b_n o a_n. Asimismo, un desplazamiento en el eje del tiempo de (d) a (e) equivale a agregar una constante igual a la cantidad de desplazamiento. En el caso de la figura 1.58(ii), cuando se considera que la función es función impar, la expansión de la serie de Fourier se vuelve (vea el problema 1.107):

$$x_1(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \tag{1.91}$$

En cambio, si la función se considera una función par, como se muestra en la figura 1.50(iii), su expansión de la serie de Fourier se vuelve (vea el problema 1.107):

$$x_2(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \tag{1.92}$$

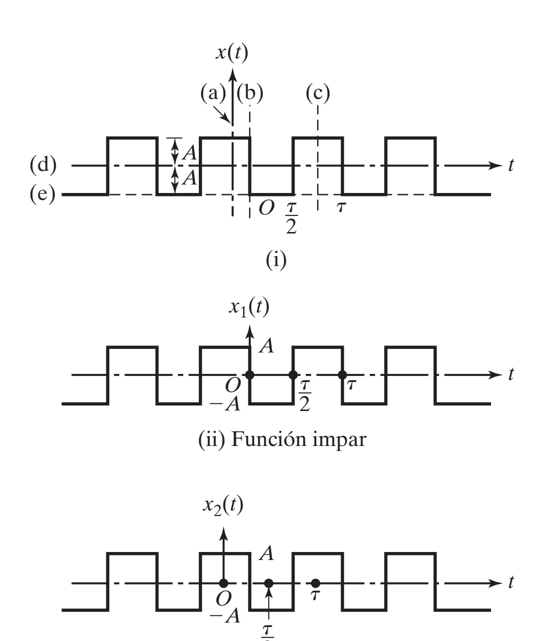


Figura 1.58 Funciones par e impar.

Como las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan la misma onda, excepto por la ubicación del origen, existe también una relación entre su expansión de la serie de Fourier. Si observamos que

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = x_2(t) \tag{1.93}$$

de la ecuación (1.91) encontramos que

$$\begin{aligned} x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) &= \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \frac{2\pi(2n-1)}{\tau}\left(t + \frac{\tau}{4}\right) \\ &= \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left\{\frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} + \frac{2\pi(2n-1)}{4}\right\} \end{aligned} \tag{1.94}$$

Utilizando la relación sen$(A + B) =$ sen A cos B + cos A sen B, la ecuación (1.94) se expresa como

$$\begin{aligned} x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \bigg\{ & \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \cos \frac{2\pi(2n-1)}{4} \\ & + \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \operatorname{sen} \frac{2\pi(2n-1)}{4} \bigg\} \end{aligned} \tag{1.95}$$

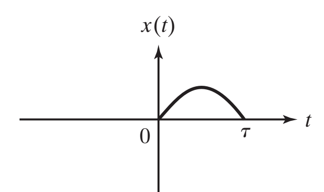
Como cos $[2\pi(2n - 1)/4] = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $\text{sen}[2\pi(2n - 1)/4] = (-1)^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, la ecuación (1.95) se reduce a

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n - 1)} \cos \frac{2\pi(2n - 1)t}{\tau} \tag{1.96}$$

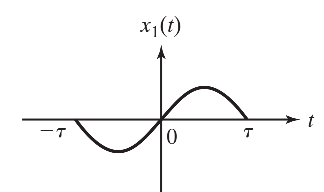
la cual puede identificarse como la ecuación (1.92).

1.11.6 Expansiones de medio rango

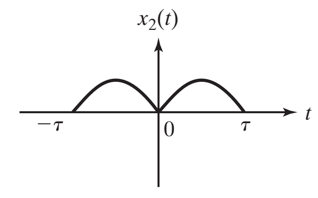
En algunas aplicaciones prácticas, la función $x(t)$ se define sólo en el intervalo de 0 a τ como se muestra en la figura 1.59(a). En tal caso no hay condición alguna de periodicidad de la función, ya que la función no está definida fuera del intervalo 0 a τ. Sin embargo, podemos ampliar arbitrariamente la función para incluir el intervalo $-\tau$ a 0 como se muestra en la figura 1.59(b) o en la figura 1.59(c). La extensión de la función indicada en la figura 1.59(b) produce una función impar $x_1(t)$, mientras que la extensión de la función que se muestra en la figura 1.59(c) produce una función par, $x_2(t)$. Por lo tanto, la expansión de la serie de Fourier de $x_1(t)$ produce sólo términos seno y la de $x_2(t)$ implica sólo términos coseno. Estas expansiones de la serie de Fourier de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se conocen como expansiones de medio rango [1.37]. Cualquiera de estas expansiones de medio rango puede utilizarse para determinar $x(t)$ en el intervalo de 0 a τ.



(a) Función original



(b) Extensión como función impar



(c) Extensión como función par

Figura 1.59 Extensión de una función para expansiones de medio rango.

1.11.7 Cálculo numérico de coeficientes

Para formas muy simples de la función $x(t)$, las integrales de las ecuaciones (1.71) a (1.73) son fáciles de evaluar. Sin embargo, la integración se complica si $x(t)$ no tiene una forma simple. En algunas aplicaciones prácticas, como en el caso de la determinación experimental de la amplitud de vibración mediante un transductor de vibración, la función $x(t)$ no está disponible en la forma de una expresión matemática; únicamente los valores de $x(t)$ en varios puntos $t_1, t_2, ..., t_N$ están disponibles, como se muestra en la figura 1.60. En estos casos, los coeficientes a_n y b_n de las ecuaciónes (1.71) a (1.73) se pueden evaluar por medio de un procedimiento de integración numérica como la regla trapezoidal o de Simpson [1.38].

Supongamos que $t_1, t_2, ..., t_N$ son un número par de puntos equidistantes a lo largo del periodo $\tau(N = \text{par})$ con los valores correspondientes de $x(t)$ dados por $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), ..., x_N = x(t_N)$, respectivamente; entonces la aplicación de la regla trapezoidal da por resultado los coeficientes a_n y b_n (al establecer $\tau = N\Delta t$) como:[6]

$$a_0 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.97}$$

$$a_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cos\frac{2n\pi t_i}{\tau} \tag{1.98}$$

$$b_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \operatorname{sen}\frac{2n\pi t_i}{\tau} \tag{1.99}$$

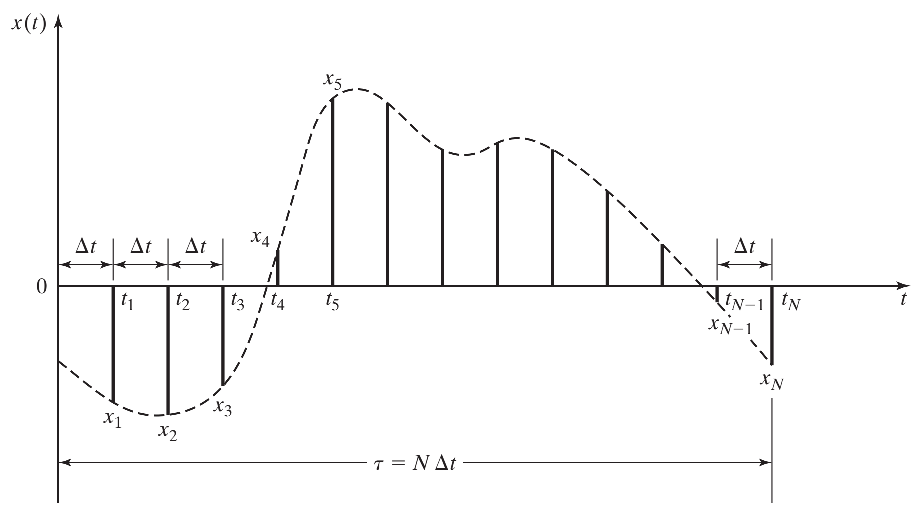


Figura 1.60 Valores de la función periódica $x(t)$ en puntos discretos $t_1, t_2, ..., t_N$.

Ejemplo 1.19 Expansión de la serie de Fourier

Determine la expansión de la serie de Fourier del movimiento de la válvula en el sistema de leva y seguidor, mostrado en la figura 1.61.

[6]Para la regla de Simpson, N tiene que ser un número par pero no para la regla trapezoidal. Las ecuaciones (1.97) a (1.99) suponen que la condición de periodicidad, $x_0 = x_N$ se mantiene cierta.

Solución: Si $y(t)$ indica el movimiento vertical de la varilla de empuje, el movimiento de la válvula, $x(t)$, se puede determinar con la relación:

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{l_1} = \frac{x(t)}{l_2}$$

o

$$x(t) = \frac{l_2}{l_1}y(t) \tag{E.1}$$

donde

$$y(t) = Y\frac{t}{\tau}; \qquad 0 \le t \le \tau \tag{E.2}$$

y el periodo está dado por $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Definiendo

$$A = \frac{Yl_2}{l_1}$$

$x(t)$ se puede expresar como

$$x(t) = A\frac{t}{\tau}; \qquad 0 \le t \le \tau \tag{E.3}$$

La ecuación (E.3) se muestra en la figura 1.54(a). Para calcular los coeficientes a_n y b_n, utilizamos de las ecuaciones (1.71) a la (1.73):

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} x(t)\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} A\frac{t}{\tau}\,dt = \frac{\omega}{\pi}\frac{A}{\tau}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^{2\pi/\omega} = A \tag{E.4}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} x(t)\cos n\omega t \cdot dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} A\frac{t}{\tau}\cos n\omega t \cdot dt$$

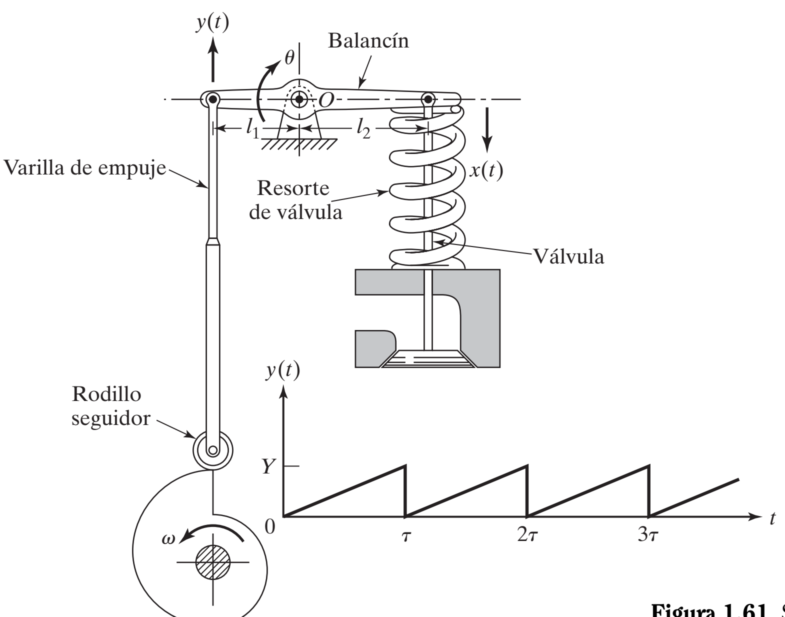


Figura 1.61 Sistema de leva y seguidor.

$$= 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{E.5}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} x(t) \text{ sen } n\omega t \cdot dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} A\frac{t}{\tau} \text{ sen } n\omega t \cdot dt$$

$$= \frac{A\omega}{\pi\tau}\int_0^{2\pi/\omega} t \text{ sen } n\omega t \cdot dt = \frac{A}{2\pi^2}\left[\frac{\text{sen } n\omega t}{n^2} - \frac{\omega t \cos n\omega t}{n}\right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= -\frac{A}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{E.6}$$

Por consiguiente, la expansión de la serie de Fourier de $x(t)$ es

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \text{ sen } \omega t - \frac{A}{2\pi} \text{ sen } 2\,\omega t - \ldots$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left\{\text{sen } \omega t + \frac{1}{2} \text{ sen } 2\omega t + \frac{1}{3} \text{ sen } 3\omega t + \ldots\right\}\right] \tag{E.7}$$

Los primeros tres términos de la serie se muestran en la figura 1.54(b). Se ve que la aproximación adopta la forma de diente de sierra incluso con una pequeña cantidad de términos.

■

Ejemplo 1.20 Análisis de Fourier numérico

Las fluctuaciones de la presión del agua en una tubería, medidas a intervalos de 0.01 segundos, se dan en la tabla 1.1. Estas fluctuaciones son de naturaleza repetitiva. Realice un análisis armónico de las fluctuaciones de presión y determine los primeros tres armónicos de la expansión de la serie de Fourier.

Solución: Como las fluctuaciones de presión dadas se repiten cada 0.12 s, el periodo es $\tau = 0.12$ s y la frecuencia circular del primer armónico es 2π radianes por 0.12 s, u $\omega = 2\pi/0.12 = 52.36$ rad/s. Cuando la cantidad de valores observados en cada onda (N) es 12, de la ecuación (1.97) obtenemos

$$a_0 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{12} p_i = 68166.7 \tag{E.1}$$

Los coeficientes a_n y b_n se determinan a partir de las ecuaciones (1.98) y (1.99):

$$a_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \cos\frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{12} p_i \cos\frac{2n\pi t_i}{0.12} \tag{E.2}$$

$$b_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \text{ sen } \frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{12} p_i \text{ sen } \frac{2n\pi t_i}{0.12} \tag{E.3}$$

Los cálculos implicados en las ecuaciones (E.2) y (E.3) se muestran en la tabla 1.2. Con estos cálculos se obtiene la expansión de la serie de Fourier de las fluctuaciones de presión $p(t)$ (vea la ecuación 1.70):

$$p(t) = 34083.3 - 26996.0 \cos 52.36t + 8307.7 \text{ sen } 52.36t$$
$$+ 1416.7 \cos 104.72t + 3608.3 \text{ sen } 104.72t - 5833.3 \cos 157.08t$$
$$- 2333.3 \text{ sen } 157.08t + \cdots \quad \text{N/m}^2 \tag{E.4}$$

Tabla 1.1

Estación de tiempo, i	Tiempo (s), t_i	Presión (kN/m²), p_i
0	0	0
1	0.01	20
2	0.02	34
3	0.03	42
4	0.04	49
5	0.05	53
6	0.06	70
7	0.07	60
8	0.08	36
9	0.09	22
10	0.10	16
11	0.11	7
12	0.12	0

Tabla 1.2

			$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$	
i	t_i	p_i	$p_i \cos \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \operatorname{sen} \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \operatorname{sen} \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{6\pi t_i}{0.12}$	$p_i \operatorname{sen} \frac{6\pi t_i}{0.12}$
1	0.01	20000	17320	10000	10000	17320	0	20000
2	0.02	34000	17000	29444	−17000	29444	−34000	0
3	0.03	42000	0	42000	−42000	0	0	−42000
4	0.04	49000	−24500	42434	−24500	−42434	49000	0
5	0.05	53000	−45898	26500	26500	−45898	0	53000
6	0.06	70000	−70000	0	70000	0	−70000	0
7	0.07	60000	−51960	−30000	30000	51960	0	−60000
8	0.08	36000	−18000	−31176	−18000	−31176	36000	0
9	0.09	22000	0	−22000	−22000	0	0	22000
10	0.10	16000	8000	−13856	−8000	−13856	−16000	0
11	0.11	7000	6062	−3500	3500	−6062	0	−7000
12	0.12	0	0	0	0	0	0	0
$\sum_{i=1}^{12}(\ )$		409000	−161976	49846	8500	21650	−35000	14000
$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{12}(\ )$		68166.7	−26996.0	8307.7	1416.7	3608.3	−5833.3	−2333.3

1.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 1.12 Representación gráfica de la serie de Fourier utilizando MATLAB

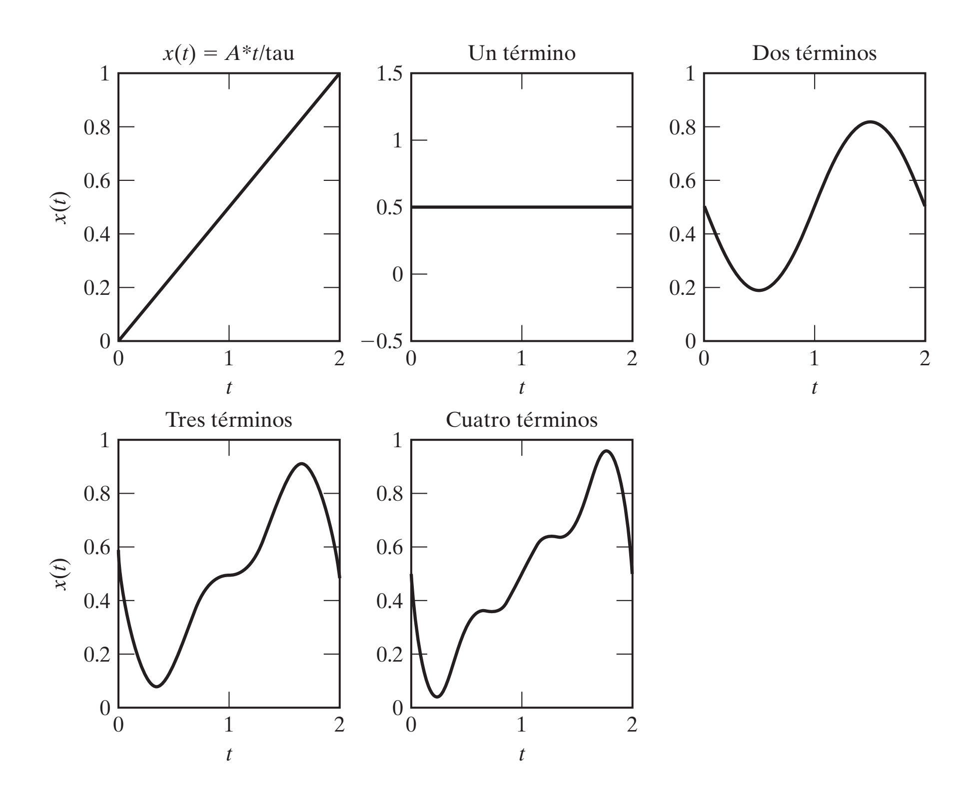
Trace la función periódica

$$x(t) = A\frac{t}{\tau}, \qquad 0 \le t \le \tau \tag{E.1}$$

y su representación de la serie de Fourier con cuatro términos

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\text{sen}\ \omega t + \frac{1}{2}\text{sen}\ 2\omega t + \frac{1}{3}\text{sen}\ 3\omega t\right)\right\} \tag{E.2}$$

para $0 \le t \le \tau$ con $A = 1, \omega = \pi,$ y $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2.$



Ecuaciones (E.1) y (E.2) con diferentes números de términos.

Solución: Se escribe un programa MATLAB para trazar las ecuaciones (E.1) y (E.2) con diferentes cantidades de términos, como se muestra a continuación.

```
%ex1_21.m
%de trazo(de) la función x(t) = A * t / tau
A = 1;
w = pi;
tau = 2;
for i = 1: 101
     t(i) = tau * (i-1)/100;
     x(i) = A * t(i) / tau;
end
subplot(231);
plot(t,x);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title('x(t) = A*t/tau');
for i = 1: 101
     x1(i) = A / 2;
end
subplot(232);
plot(t,x1);
xlabel('t');
title ('Un término');
for i = 1: 101
     x2(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi;
end
subplot(233);
plot(t,x2);
xlabel('t');
title ('Dos términos');
for i = 1: 101
     x3(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi - A * sin(2*w*t(i)) / (2*pi);
end
subplot(234);
plot(t,x3);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title ('Tres términos');
for i = 1: 101
     t(i) = tau * (i-1)/100;
     x4(i) = A/2 - A * sin(w*t(i)) / pi - A * sin(2*w*t(i)) / (2*pi)
     - A * sin(3*w*t(i)) / (3*pi);
end
subplot(235);
plot(t,x4);
xlabel('t');
title ('Cuatro términos');
```

■

Ejemplo 1.12 Representación gráfica de pulsaciones

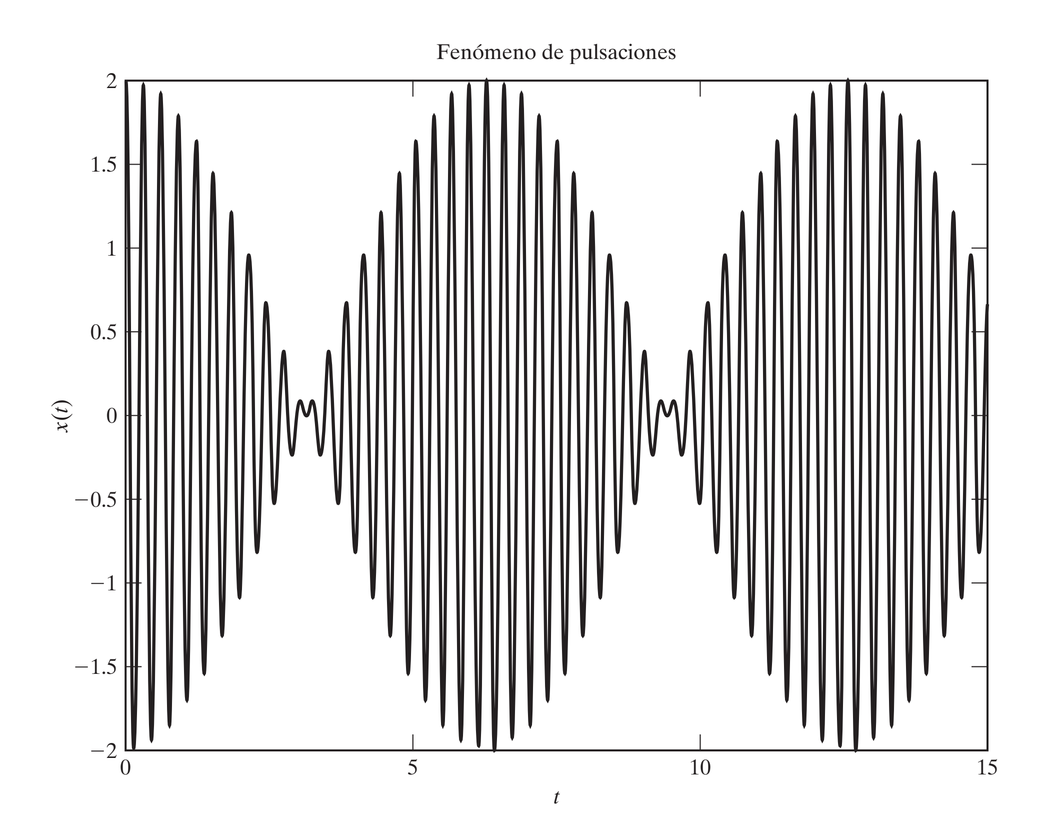
Se somete una masa a dos movimientos armónicos dados por $x_1(t) = X \cos \omega t$ y $x_2(t) = X \cos(\omega + \delta)t$ con $X = 1$ cm, $\omega = 20$ rad/s, y $\delta = 1$ rad/s. Trace el movimiento resultante de la masa con MATLAB e identifique la frecuencia de pulsación.

Solución: El movimiento resultante de la masa, $x(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= X \cos \omega t + X \cos(\omega + \delta)t \\ &= 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t \end{aligned} \tag{E.1}$$

Se ve que el movimiento presenta el fenómeno de pulsación con una frecuencia $\omega_b = (\omega + \delta) - (\omega) = \delta = 1$ rad/s. La ecuación (E.1) se traza con MATLAB como se muestra a continuación.

```
% ex1_22.m
% Trazar el fenómeno de pulsaciones
A = 1;
w = 20;
delta = 1;
for i = 1: 1001
     t(i) = 15 * (i-1)/1000;
     x(i) = 2 * A * cos (delta*t(i)/2) * cos ((w + delta/2) *t(i));
end
plot (t,x);
xlabel ('t');
ylabel ('x(t)');
title ('Fenómeno de pulsaciones');
```



Ejemplo 1.23 Análisis de Fourier numérico realizado utilizando MATLAB

Realice un análisis armónico de las fluctuaciones de presión dadas en la tabla 1.1 de la página 71 y determine los primeros cinco armónicos de la expansión de la serie de Fourier.

Solución: Para hallar los primeros cinco armónicos de las fluctuaciones de presión (es decir, $a_0, a_1, ..., a_5, b_1, ..., b_5$), se desarrolla un programa MATLAB de uso general para el análisis armónico de una función $x(t)$ utilizando las ecuaciones (1.97) a (1.99). El programa, denominado Program1.m, requiere los siguientes datos de entrada:

n = cantidad de puntos equidistantes en los cuales se conocen los valores de $x(t)$

m = cantidad de coeficientes de Fourier que se compararán

tiempo = periodo de tiempo de la función $x(t)$

x = conjunto de dimensiones n, que contiene los valores conocidos de $x(t)$; $x(i) = x(t_i)$

t = conjunto de dimensiones n, que contiene los valores conocidos de t; $t(i) = t_i$

El programa genera los siguientes resultados:

a cero = a_0 de la ecuación (1.97)

i, $a(i)$, $b(i)$; $i = 1, 2, ..., m$

donde $a(i)$ y $b(i)$ indican los valores calculados de a_i y b_i dados por las ecuaciones (1.98) y (1.99), respectivamente.

```
>> program1
Expansión de la serie de Fourier de la función x(t)

Datos:

Cantidad de puntos en un ciclo = 12

Cantidad de coeficientes de Fourier requeridos = 5

Periodo de tiempo = 1.200000e-001

Estación    Tiempo en la estación i: t(i)   x(i) at t(i)
       1           1.000000e-002         2.000000e+004
       2           2.000000e-002         3.400000e+004
       3           3.000000e-002         4.200000e+004
       4           4.000000e-002         4.900000e+004
       5           5.000000e-002         5.300000e+004
       6           6.000000e-002         7.000000e+004
       7           7.000000e-002         6.000000e+004
       8           8.000000e-002         3.600000e+004
       9           9.000000e-002         2.200000e+004
      10           1.000000e-001         1.600000e+004
      11           1.100000e-001         7.000000e+003
      12           1.200000e-001         0.000000e+000

Resultados del análisis de Fourier:

a cero=6.816667e+004

valores de i            a(i)                 b(i)
          1         -2.699630e+004         8.307582e+003
          2          1.416632e+003         3.608493e+003
          3         -5.833248e+003        -2.333434e+003
          4         -5.834026e+002         2.165061e+003
          5         -2.170284e+003        -6.411708e+002
```

1.13 Literatura acerca de la vibración

La literatura sobre vibraciones es abundante y diversa. Se cuenta con varios libros de texto [1.39] y se publican docenas de periódicos técnicos con regularidad en relación con las vibraciones. Esto se debe principalmente a que la vibración afecta a muchas disciplinas, desde la ciencia de los materiales hasta el análisis de maquinaria y estructuras espaciales. Los investigadores en muchos campos deben estar atentos a la investigación de la vibración.

Los diarios de mayor circulación que publican artículos sobre vibraciones son *ASME Journal of Vibration and Acoustics; ASME Journal of Applied Mechanics; Journal of Sound and Vibration; AIAA Journal; ASCE Journal of Engineering Mechanics; Earthquake Engineering and Structural Dynamics; Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers; International Journal of Solids and Structures; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Journal of the Acoustical Society of America; Sound and Vibration; Vibrations, Mechanical Systems and Signal Processing; International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis; JSME International Journal Series III—Vibration Control Engineering,* y *Vehicle System Dynamics*. En las referencias del capítulo se citan muchos de estos diarios.

Además, *Shock and Vibration Digest*, *Applied Mechanics Reviews* y *Noise and Vibration Worldwide* son diarios resumidos mensualmente que contienen comentarios breves de casi todo artículo publicado sobre vibración. Las fórmulas y soluciones en ingeniería de vibración son fáciles de encontrar en las referencias [1.40-1.42].

Resumen del capítulo

En este capítulo presentamos los conceptos fundamentales de vibración junto con una breve descripción de la historia e importancia del estudio de vibraciones. Presentamos los conceptos de grado de libertad, sistemas discretos y continuos y las diferentes clases de vibración. Describimos los pasos básicos implicados en el análisis de vibración de un sistema. Presentamos el tipo fundamental de vibración, conocido como movimiento armónico, junto con la terminología asociada. Presentamos el análisis y la representación de la serie de Fourier de funciones periódicas así como la determinación numérica de los coeficientes de Fourier con ejemplos.

A estas alturas, el lector debe ser capaz de alcanzar los objetivos establecidos al principio del capítulo. Para ayudar al lector, se dan preguntas de repaso en forma de preguntas que requieren respuestas breves, enunciados falsos o verdaderos, llenar espacios en blanco, opciones múltiples, y coincidencia de enunciados para una autoevaluación con las respuestas disponibles en el sitio web afín. También se proponen varios problemas que implican diferentes niveles de dificultad al aplicar los conceptos básicos presentados en el capítulo. Las respuestas a problemas seleccionados aparecen al final del libro.

Referencias

1.1 D. C. Miller, *Anecdotal History of the Science of Sound*, Macmillan, Nueva York, 1935.

1.2 N. F. Rieger, "The quest for $\sqrt{k/m}$: Notes on the development of vibration analysis, Parte I. genius awakening", *Vibrations*, Vol. 3, Núm. 3/4, diciembre de 1987, págs. 3-10.

1.3 Chinese Academy of Sciences (compilador), *Ancient China's Technology and Science*, Foreign Languages Press, Beijing, 1983.

1.4 R. Taton (ed.), *Ancient and Medieval Science: From the Beginnings to 1450,* A. J. Pomerans (trad.), Basic Books, Nueva York, 1957.

1.5 S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials,* McGraw-Hill, Nueva York, 1953.

1.6 R. B. Lindsay, "The story of acoustics", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 39, Núm.4, 1966, págs. 629-644.

1.7 J. T. Cannon y S. Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, Springer-Verlag, Nueva York, 1981.

1.8 L. L. Bucciarelli y N. Dworsky, *Sophie Germain: An Essay in the History of the Theory of Elasticity*, *D.* Reidel Publishing, Dordrecht, Holanda, 1980.

1.9 J. W. Strutt (Baron Rayleigh), *The Theory of Sound*, Dover, Nueva York, 1945.

1.10 R. Burton, *Vibration and Impact*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1958.

1.11 A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley, Nueva York, 1973.

1.12 S. H. Crandall y W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems,* Academic Press, Nueva York, 1963.

1.13 J. D. Robson, *Random Vibration,* Edinburgh University Press, Edinburgo, 1964.

1.14 *S.* S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering (*4a ed.), Elsevier Butterworth Heinemann, Burlington, MA, 2005.

1.15 M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin y L. J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *Journal of Aeronautical Sciences,* Vol. 23, 1956, págs. 805-824.

1.16 D. Radaj y colaboradores, "Finite element analysis, an automobile engineer's tool", *International Conference on Vehicle Structural Mechanics: Finite Element Application to Desing*, Society of Automotive Engineers, Detroit, 1974.

1.17 R. E. D. Bishop, *Vibration* (2a. ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

1.18 M. H. Richardson y K. A. Ramsey, "Integration of dynamic testing into the product design cycle", *Sound and Vibration*, Vol. 15, Núm. 11, noviembre de 1981, págs. 14-27.

1.19 M. J. Griffin y E. M. Whitham, "The discomfort produced by impulsive whole-body vibration", *Journal of the Acoustical* Society *of America*, Vol. 65, Núm. 5, 1980, págs. 1277-1284.

1.20 J. E. Ruzicka, "Fundamental concepts of vibration control", *Sound and Vibration*, Vol. 5, Núm. 7, julio de 1971, págs. 16-23.

1.21 T. W. Black, "Vibratory finishing goes automatic" (Part 1: Types of machines; Part 2; Steps to automation), *Tool and Manufacturing Engineer*, julio de 1964, págs. 53-56, y agosto de 1964, págs. 72-76.

1.22 S. Prakash y V. K. Puri, *Foundations for Machines*, *Analysis and Design*, Wiley, Nueva York, 1988.

1.23 L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill, Nueva York, 2001.

1.24 A. Dimarogonas, *Vibration for Engineers (*2a. ed.), Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.

1.25 E. O. Doebelin, *System Modeling and Response*, Wiley, Nueva York, 1980.

1.26 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials (*2a. ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

1.27 I. Cochin y W. Cadwallender, *Analysis and Design of Dynamic Systems* (3a. ed.) Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

1.28 F. Y. Chen, *Mechanics and Design of Cam Mechanisms,* Pergamon Press, Nueva York, 1982.

1.29 W. T. Thomson y M. D. Dahleh, *Theory of Vibration with Applications* (5a. ed.), Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

1.30 N. O. Myklestad, *Fundamentals of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1956.

1.31 C. W. Bert, "Material damping: An introductory review of mathematical models, measures, and experimental techniques", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 29, Núm. 2, 1973, págs. 129-153.

1.32 J. M. Gasiorek y W. G. Carter, *Mechanics of Fluids for Mechanical Engineers*, Hart Publishing, Nueva York, 1968.

1.33 A. Mironer, *Engineering Fluid Mechanics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1979.

1.34 F. P. Beer y E. R. Johnston, *Vector Mechanics for Engineers* (6a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1997.

1.35 A. Higdon y W. B. Stiles, *Engineering Mechanics* (2a ed.), Prentice Hall, Nueva York, 1955.

1.36 E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (9a. ed.)*,* Wiley, Nueva York, 2006.

1.37 M. C. Potter, J. Goldberg, y E. F. Aboufadel, *Advanced Engineering Mathematics* (3a. ed.), Oxford University Press, Nueva York, 2005.

1.38 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

1.39 N. F. Rieger, "The literature of vibration engineering", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, Núm. 1, enero de 1982, págs. 5-13.

1.40 R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1979.

1.41 W. D. Pilkey y P. Y. Chang, *Modern Formulas for Statics and Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978.

1.42 C. M. Harris (ed.), *Shock and Vibration Handbook* (4a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1996.

1.43 R. G. Budynas y J. K. Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design* (8a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 2008.

1.44 N. P. Chironis (ed.), *Machine Devices and Instrumentation,* McGraw-Hill, Nueva York, 1966.

1.45 D. Morrey y J. E. Mottershead, "Vibratory bowl feeder design using numerical modelling techniques", en *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, J. E. Mottershead (ed.) Pergamon Press, Oxford, 1989*,* págs. 211-217.

1.46 K. McNaughton (ed.), *Solids Handling,* McGraw-Hill, Nueva York, 1981.

1.47 M. M. Kamal y J. A. Wolf, Jr. (eds.), *Modern Automotive Structural Analysis*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1982.

1.48 D. J. Inman, *Engineering Vibration* (3a. ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.

1.49 J. H. Ginsberg, *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications,* John Wiley, Nueva York, 2001.

1.50 S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley, Hoboken, NJ, 2007.

1.51 S. Braun, D. J. Ewins, y S. S. Rao (eds.), *Encyclopedia of Vibration,* Vols. 1-3, Academic Press, Londres, 2002.

1.52 B. R. Munson, D. F., Young, T. H. Okiishi, y W. W. Huebsch, *Fundamentals of Fluid Mechanics* (6a ed.), Wiley, Hoboken, NJ, 2009.

1.53 C. W. de Silva (ed.), *Vibration and Shock Handbook*, Taylor & Francis, Boca Raton, FL, 2005.

Preguntas de repaso

1.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Proporcione dos ejemplos cada uno de los efectos malos y buenos de la vibración.
2. ¿Cuáles son las tres partes elementales de un sistema vibratorio?
3. Defina la cantidad de grados de libertad de un sistema vibratorio.
4. ¿Cuál es la diferencia entre un sistema discreto y uno continuo? ¿Es posible resolver cualquier problema de vibración como si fuera discreto?
5. En el análisis de vibración, ¿puede desecharse siempre el amortiguamiento?
6. ¿Puede identificarse un problema de vibración con sólo observar su ecuación diferencial?
7. ¿Cuál es la diferencia entre vibración determinística y aleatoria? Proporcione dos ejemplos de cada una.
8. ¿Qué métodos hay disponibles para resolver las ecuaciones rectoras de un problema de vibración?
9. ¿Cómo conecta varios resortes para incrementar la rigidez total?
10. Defina la constante de rigidez y amortiguamiento de un resorte.
11. ¿Cuáles son los tipos comunes de amortiguamiento?
12. Mencione tres formas diferentes de expresar una función periódica en función de sus armónicos.
13. Defina estos términos: ciclo, amplitud, ángulo de fase, frecuencia lineal, periodo y frecuencia natural.
14. ¿Cómo se relacionan τ, ω y f entre sí?
15. ¿Cómo podemos obtener frecuencia, fase y amplitud de un movimiento armónico a partir del vector rotatorio correspondiente?
16. ¿Cómo suma dos movimientos armónicos si tiene frecuencias diferentes?
17. ¿Qué son las pulsaciones?
18. Defina los términos *decibel* y *octava*.
19. Explique el fenómeno de Gibbs.
20. ¿Qué son las expansiones de medio rango?

1.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Si se pierde energía en cualquier forma durante la vibración, se considera que el sistema es amortiguado.
2. El principio de superposición es válido para sistemas lineales y no lineales.
3. La frecuencia con la cual vibra un sistema inicialmente perturbado por sí mismo se conoce como frecuencia natural.
4. Cualquier función periódica puede expandirse a una serie de Fourier.
5. Un movimiento armónico es un movimiento periódico.
6. La masa equivalente de varias masas en diferentes lugares se encuentra utilizando la equivalencia de energía cinética.
7. Las coordenadas generalizadas no necesariamente son coordenadas cartesianas.

8. Los sistemas discretos son los mismos que los sistemas de parámetro concentrado.
9. Considere la suma de movimientos armónicos, $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ con $x_1(t) = 15\cos \omega t$ y $x_2(t) = 20\cos(\omega t + 1)$. La amplitud A la da 30.8088.
10. Considere la suma de movimientos armónicos $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ con $x_1(t) = 15\cos \omega t$ y $x_2(t) = 20\cos(\omega t + 1)$. El ángulo de fase α es de 1.57 rad.

1.3 Llene el espacio en blanco con la palabra correcta:

1. Los sistemas experimentan peligrosamente grandes oscilaciones en ________.
2. La vibración no amortiguada se caracterizada por no tener pérdida de ___________.
3. Un sistema vibratorio se compone de un resorte, amortiguador y _________.
4. Si un movimiento se repite después de intervalos de tiempo iguales, se llama movimiento ________.
5. Cuando la aceleración es proporcional al desplazamiento y dirigida hacia la posición media, el movimiento se llama armónico ________.
6. El tiempo requerido para completar un ciclo de movimiento se llama ________ de vibración.
7. La cantidad de ciclos por unidad de tiempo se llama _______ de vibración.
8. Se dice que dos movimientos armónicos que tienen la misma frecuencia son _______.
9. La diferencia angular entre la ocurrencia de puntos semejantes de dos movimientos armónicos se llama _______.
10. Se puede considerar que los sistemas continuos o distribuidos tienen _______ grados de libertad.
11. Los sistemas con una cantidad finita de grados de libertad se conocen como sistemas ________.
12. La cantidad de grados de libertad de un sistema indica el mínimo de _________ independientes necesarias para describir las posiciones de todas las partes del sistema en cualquier instante.
13. Si un sistema vibra debido sólo a una perturbación inicial, se llama vibración _______.
14. Si un sistema vibra debido a una excitación externa se llama vibración _______.
15. La resonancia indica la coincidencia de la frecuencia de la excitación externa con una frecuencia ________ del sistema.
16. Una función $f(t)$ se denomina función impar si ________________.
17. Las expansiones de _______ intervalo se pueden usar para representar funciones definidas sólo en el intervalo 0 a τ.
18. El análisis ________ se ocupa de la representación de serie de Fourier de funciones periódicas.
19. La velocidad de rotación de 1 000 rpm (revoluciones por minuto) corresponde a _______ radianes/s.
20. Cuando la velocidad de una turbina es de 6 000 rpm, se requieren _______ segundos para que la turbina complete una revolución.

1.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones múltiples dadas a continuación:

1. El primer sismógrafo del mundo se inventó en
   (a) Japón **(b)** China **(c)** Egipto
2. Los primeros experimentos con péndulos simples fueron realizados por
   (a) Galileo **(b)** Pitágoras **(c)** Aristóteles
3. La obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* fue publicada por
   (a) Galileo **(b)** Pitágoras **(c)** Newton
4. Las formas de modo de placas, colocando arena sobre placas vibratorias, fueron observados por primera vez por
   (a) Chladni **(b)** D'Alembert **(c)** Galileo
5. La teoría de vigas gruesas fue presentada por primera vez por
   (a) Mindlin **(b)** Einstein **(c)** Timoshenko
6. La cantidad de grados de libertad de un péndulo simple es:
   (a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2
7. La vibración puede clasificarse de
   (a) una manera **(b)** dos maneras **(c)** varias maneras
8. El fenómeno de Gibbs indica un comportamiento anómalo en la representación de la serie de Fourier de una
   (a) función armónica **(b)** función periódica **(c)** función aleatoria

9. La representación gráfica de las amplitudes y ángulos de fase de varios componentes de frecuencia de una función periódica se conoce como
   (a) diagrama espectral **(b)** diagrama de frecuencia **(c)** diagrama armónico
10. Cuando un sistema vibra en un medio fluido, el amortiguamiento es
   (a) viscoso **(b)** Coulomb **(c)** sólido
11. Cuando partes de un sistema vibratorio se deslizan sobre una superficie seca, el amortiguamiento es
   (a) viscoso **(b)** Coulomb **(c)** sólido
12. Cuando la curva de esfuerzo-deformación del material de un sistema vibratorio presenta un bucle de histéresis, el amortiguamiento es
   (a) viscoso **(b)** Coulomb **(c)** sólido
13. La constante equivalente de dos resortes en paralelo con rigideces k_1 y k_2 es
   (a) $k_1 + k_2$ **(b)** $\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$
14. La constante de resorte equivalente de dos resortes en serie con rigideces k_1 y k_2 es
   (a) $k_1 + k_2$ **(b)** $\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$
15. La constante de resorte de una viga en voladizo con una masa m en el extremo es
   (a) $\dfrac{3EI}{l^3}$ **(b)** $\dfrac{l^3}{3EI}$ **(c)** $\dfrac{Wl^3}{3EI}$
16. Si $f(-t) = f(t)$, se dice que la función es
   (a) par **(b)** impar **(c)** continua

1.5. Correlacione lo siguiente:

1. Pitágoras (582-507 a.C)	**a.** publicó un libro sobre la teoría del sonido
2. Euclides (300 a.C.)	**b.** primera persona que investigó los sonidos musicales con base científica
3. Zhang Heng (132)	**c.** escribió un tratado llamado *Introduction to Harmonics*
4. Galileo (1564-1642)	**d.** fundador de la ciencia experimental moderna
5. Rayleigh (1877)	**e.** inventó el primer sismógrafo del mundo

1.6 Correlacione lo siguiente:

1. El desequilibrio en motores diesel	**a.** puede provocar la falla de turbinas y motores de avión
2. La vibración en máquinas herramienta	**b.** provoca incomodidad en la actividad humana durante el corte de metal
3. La vibración de hojas y discos	**c.** puede hacer que las ruedas de locomotoras se levanten de la vía
4. La vibración inducida por el viento	**d.** puede provocar la caída de puentes
5. La transmisión de la vibración	**e.** puede provocar traqueteo

1.7 Considere cuatro resortes con las constantes de resorte:

$k_1 = 20$ lb/pulg, $k_2 = 50$ lb/pulg, $k_3 = 100$ lb/pulg, $k_4 = 200$ lb/pulg

Correlacione las constantes de resorte equivalentes:

1. k_1, k_2, k_3 y k_4 están en paralelo	**a.** 18.9189 lb/pulg
2. k_1, k_2, k_3 y k_4 están en serie	**b.** 370.0 lb/pulg
3. k_1 y k_2 están en paralelo ($k_{eq} = k_{12}$)	**c.** 11.7647 lb/pulg
4. k_3 y k_4 están en paralelo ($k_{eq} = k_{34}$)	**d.** 300.0 lb/pulg
5. k_1, k_2 y k_3 están en paralelo ($k_{eq} = k_{123}$)	**e.** 70.0 lb/pulg
6. k_{123} está en serie con k_4	**f.** 170.0 lb/pulg
7. k_2, k_3 y k_4 están en paralelo ($k_{eq} = k_{234}$)	**g.** 350.0 lb/pulg
8. k_1 y k_{234} están en serie	**h.** 91.8919 lb/pulg

Problemas

Sección 1.4 Conceptos básicos de la vibración, y Sección 1.6 Procedimiento de análisis de la vibración

1.1* El estudio de la respuesta de un cuerpo humano sujeto a vibración y/o choque es importante en muchas aplicaciones. Estando de pie, las masas de la cabeza, el torso, las caderas, las piernas, la elasticidad y/o amortiguamiento del cuello, la columna vertebral, el abdomen y las piernas, influyen en las características de la respuesta. Desarrolle una secuencia de tres aproximaciones mejoradas para modelar el cuerpo humano.

1.2* La figura 1.62 muestra un cuerpo humano y un sistema de restricción (seguridad) en el momento en que un automóvil choca [1.47]. Sugiera un modelo matemático simple considerando la elasticidad, masa y amortiguamiento del asiento, el cuerpo humano, y las restricciones, para analizar la vibración del sistema.

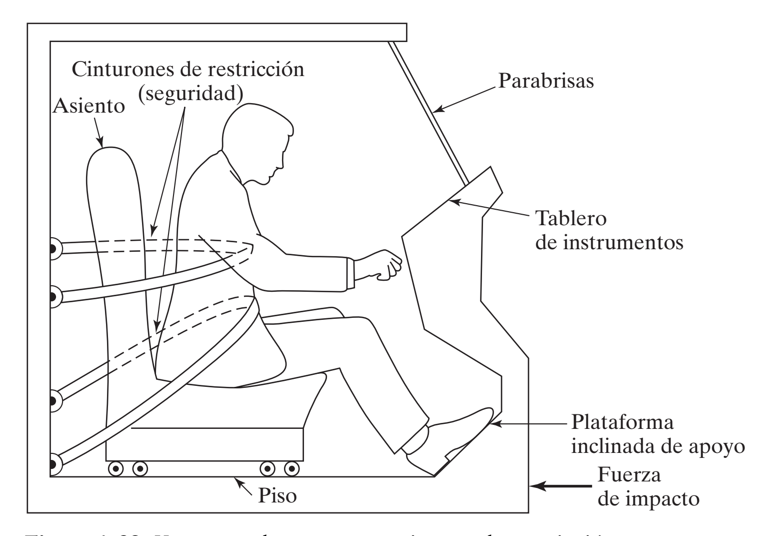


Figura 1.62 Un cuerpo humano y un sistema de restricción.

*El asterisco indica un problema de diseño o un problema sin respuesta única.

1.3* Un motor reciprocante está montado sobre una cimentación como se muestra en la figura 1.63. Las fuerzas y momentos desbalanceados desarrollados en el motor se transmiten al marco y la cimentación. Para reducir la transmisión de la vibración se coloca una almohadilla elástica entre el motor y el bloque de cimentación. Desarrolle dos modelos matemáticos del sistema siguiendo un refinamiento gradual del proceso de modelado.

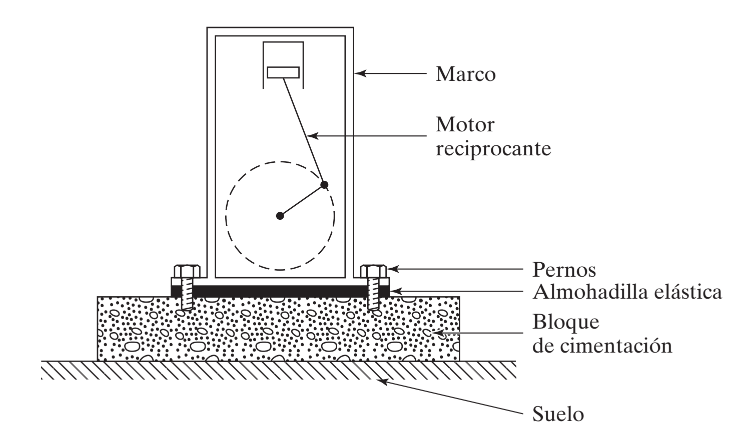


Figura 1.63 Un motor reciprocante sobre cimentación.

1.4* Un automóvil que viaja por un camino escabroso (figura 1.64) se puede modelar considerando (a) el peso de su carrocería, los pasajeros, los asientos, las ruedas delanteras y las ruedas traseras; (b) la elasticidad de las llantas (suspensión), los resortes principales y los asientos, y (c) el amortiguamiento de los asientos, los amortiguadores y las llantas. Desarrolle tres modelos matemáticos del sistema mediante un refinamiento gradual en el proceso de modelado.

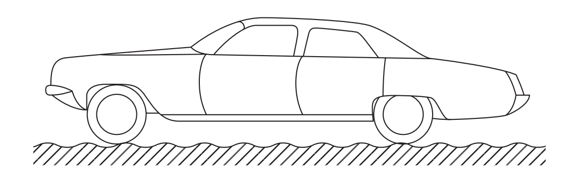


Figura 1.64 Automóvil viajando por un camino escabroso.

1.5* Las consecuencias del choque de frente de dos automóviles se pueden estudiar considerando el impacto del automóvil contra la barrera, como se muestra en la figura 1.65. Construya un modelo matemático considerando las masas de la carrocería del automóvil, el motor, la transmisión y la suspensión, así como la elasticidad de los amortiguadores, el radiador, la carrocería de metal, el tren motriz y los soportes de montaje del motor.

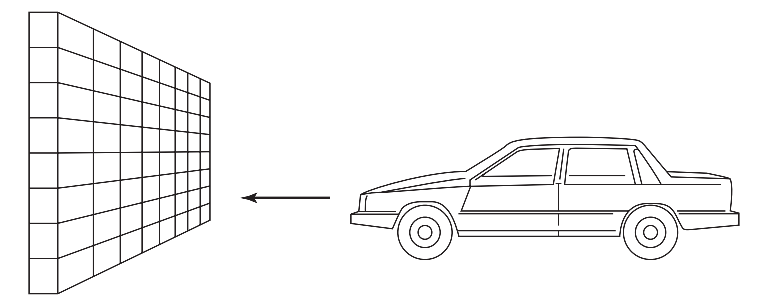


Figura 1.65 Automóvil en choque con una barrera.

1.6* Desarrolle un modelo matemático para el tractor y el arado de la figura 1.66 considerando la masa, elasticidad y amortiguamiento de las llantas, los amortiguadores y el arado (las hojas).

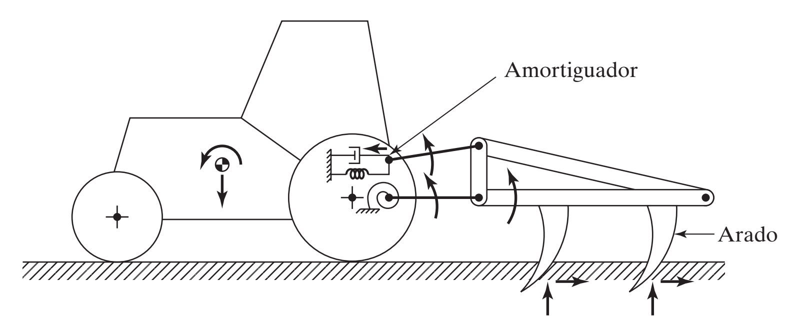


Figura 1.66 Tractor y arado.

Sección 1.7 Elementos de resorte

1.7 Determine la constante de resorte equivalente del sistema de la figura 1.67.

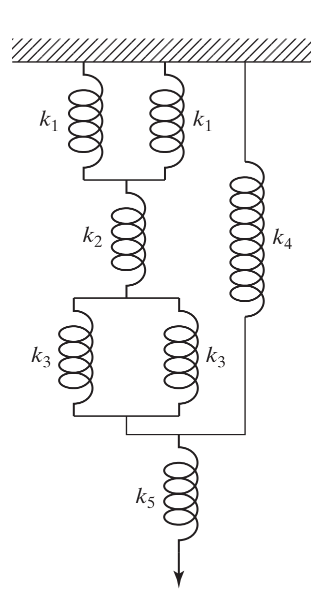


Figura 1.67 Resorte en serie-paralelo.

1.8 Considere un sistema de dos resortes con rigideces k_1 y k_2, dispuestos en paralelo como se muestra en la figura 1.68. La barra rígida a la cual están conectados los resortes permanece horizontal cuando la fuerza F es cero. Determine la constante de resorte equivalente del sistema (k_e) que relaciona la fuerza aplicada (F) con el desplazamiento resultante (x) como

$$F = k_e x$$

Sugerencia: Como las constantes de los dos resortes son diferentes y las distancias l_1 y l_2 no son las mismas, la barra rígida no permanecerá horizontal cuando se aplique la fuerza F.

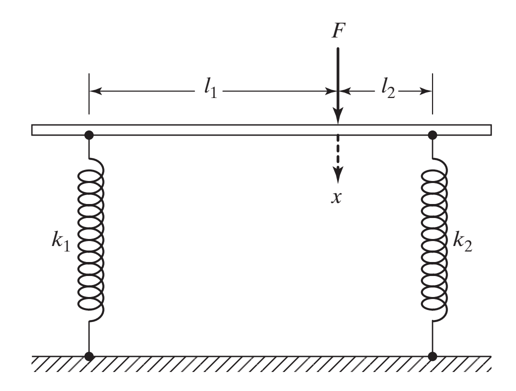


Figura 1.68 Resortes en paralelo sometidos a una carga.

1.9 En la figura 1.69 encuentre la constante de resorte equivalente del sistema en la dirección de θ.

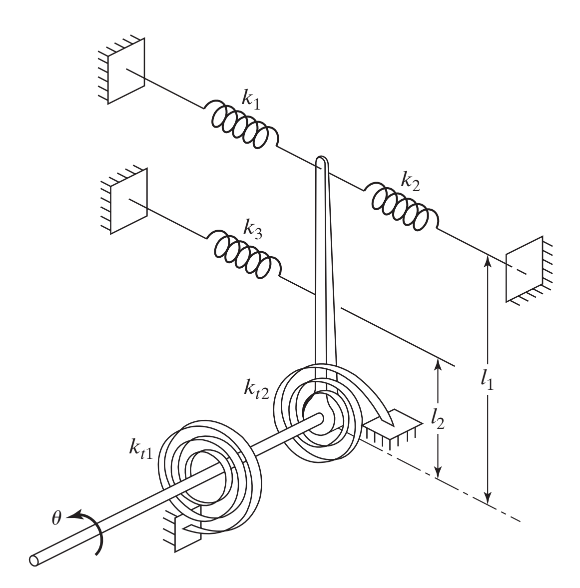


Figura 1.69

1.10 Encuentre la constante de resorte torsional equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.70. Suponga que k_1, k_2, k_3 y k_4 son torsionales y que k_5 y k_6 son constantes de resorte lineales.

1.11 Una máquina de masa $m = 500$ kg está montada en una viga de acero sólo apoyada de longitud $l = 2$ m que tiene una sección transversal (de profundidad = 0.1 y ancho = 1.2 m) y módulo de Young $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m^2. Para reducir la deflexión vertical de la viga, se fija un resorte de rigidez k a la mitad de su claro, como se muestra en la figura 1.71. Determine el valor de k necesario para reducir la deflexión de la viga en

a. 25 por ciento de su valor original.
b. 50 por ciento de su valor original.
c. 75 por ciento de su valor original.

Suponga que la masa de la viga es insignificante.

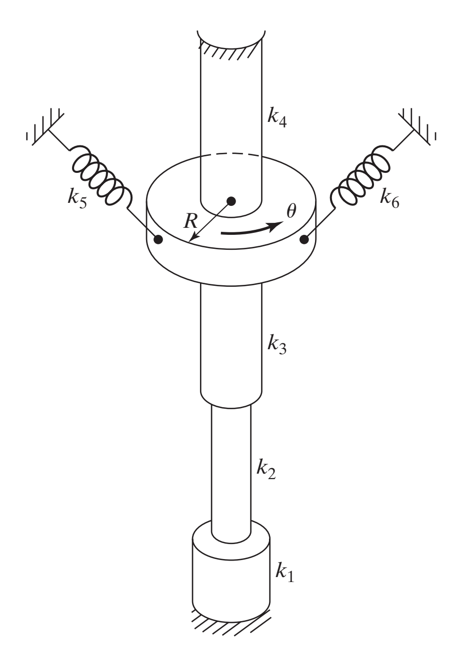


Figura 1.70

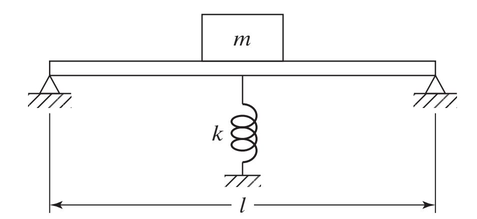


Figura 1.71

1.12 Una barra de longitud L y un módulo de Young E se someten a una fuerza axial. Compare las constantes de resorte de las barras con secciones transversales en la forma de un circulo sólido (de diámetro d), un cuadrado (de lado d) y un círculo hueco (de diámetro medio d y espesor de pared $t = 0.1d$). Determine cuál de estas secciones conduce a un diseño económico para un valor especificado de rigidez axial de la barra.

1.13 Una viga en voladizo de longitud L y módulo de Young E se somete a una fuerza de flexión en su extremo libre. Compare las constantes de resorte de vigas con secciones transversales en la forma de un circulo (de diámetro d), un cuadrado (de lado d) y un círculo hueco (de diámetro medio d y espesor de pared $t = 0.1d$). Determine cuál de estas secciones transversales conduce a un diseño económico para un valor especificado de rigidez de la flexión de la viga.

1.14 Un instrumento electrónico, que pesa 200 lb, está soportado por un apoyo de montaje de caucho cuya relación fuerza-deflexión está dada por $F(x) = 800x + 40x^3$, donde la fuerza (F) y la deflexión (x) están en libras y pulgadas, respectivamente. Determine lo siguiente:

a. La constante de resorte lineal equivalente del apoyo de montaje en su posición de equilibrio estático.
b. La deflexión del apoyo de montaje correspondiente a la constante de resorte lineal equivalente.

1.15 La relación fuerza-deflexión de un resorte helicoidal de acero utilizado en un motor se encuentra experimentalmente como $F(x) = 200x + 50x^2 + 10x^3$, donde la fuerza ($F$) y la deflexión ($x$) se miden en libras y pulgadas, respectivamente. Si el resorte experimenta una deflexión permanente de 0.5 pulg durante la operación del motor, determine la constante de resorte lineal equivalente del resorte a su deflexión permanente.

1.16 Cuatro barras rígidas idénticas, cada una de longitud a, se conectan a un resorte de rigidez k para formar una estructura sometida a una carga vertical P, como se muestra en las figuras 1.72(a) y (b). Determine la constante de resorte equivalente del sistema k_{eq} para cada caso, pasando por alto las masas de las barras y la fricción en las uniones.

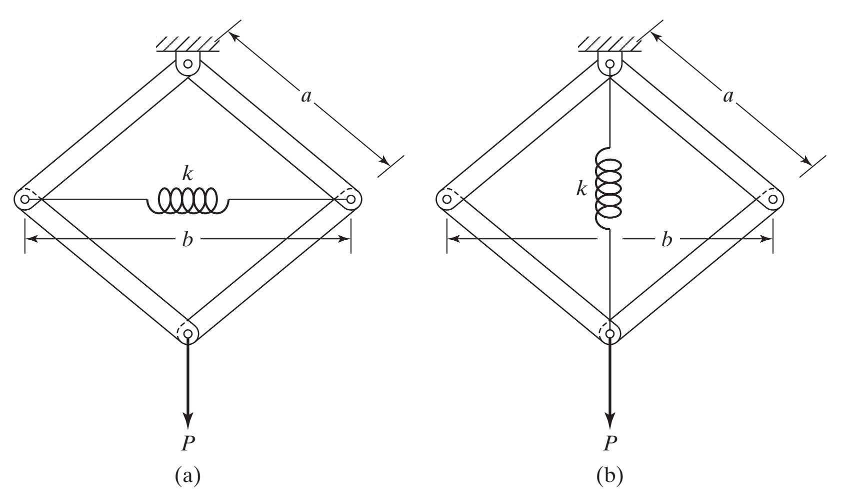


Figura 1.72

1.17 El trípode mostrado en la figura 1.73 se utiliza para montar un instrumento electrónico que encuentra la distancia entre dos puntos en el espacio. Las patas del trípode se ubican simétricamente con respecto al eje vertical medio, y cada pata forma un ángulo α con la vertical. Si cada pata tiene de longitud l y rigidez axial k, encuentre la rigidez de resorte equivalente del trípode en la dirección vertical.

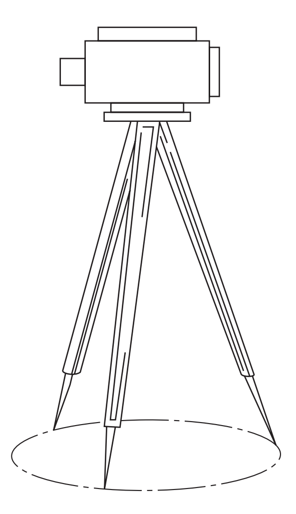


Figura 1.73

1.18 En la figura 1.74 se muestra la posición de equilibrio estático de una barra rígida sin masa, acoplada a una bisagra en el punto O y conectada con los resortes k_1 y k_2. Suponiendo que el desplazamiento (x) producido por la fuerza F aplicada en el punto A es pequeño, encuentre la constante de resorte equivalente del sistema, k_e, que relaciona la fuerza aplicada F con el desplazamiento x como $F = k_e x$.

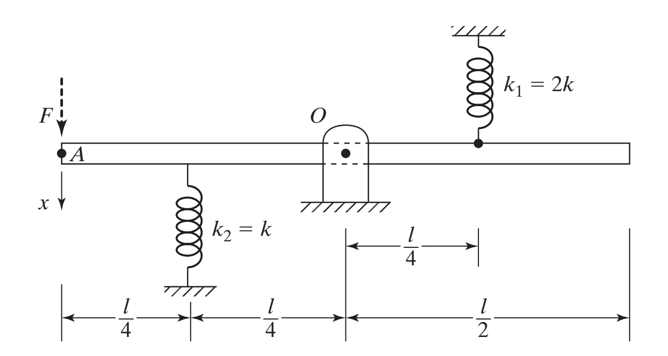


Figura 1.74 Barra rígida conectada por resortes.

1.19 La figura 1.75 muestra un sistema en el cual la masa m está directamente conectada a los resortes con rigideces k_1 y k_2 en tanto que el resorte con rigidez k_3 o k_4 entra en contacto con la masa basada en el valor de su desplazamiento. Determine la variación de la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa a medida que el desplazamiento (x) de ésta varía.

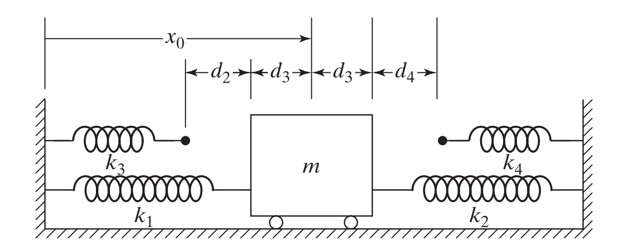


Figura 1.75 Masa conectada por resortes.

1.20 La figura 1.76 muestra una barra rígida uniforme de masa m pivotada en el punto O y conectada por resortes de rigideces k_1 y k_2. Considerando un pequeño desplazamiento angular θ de la barra rígida con respecto al punto O, determine la constante de resorte equivalente asociada con el momento de restauración.

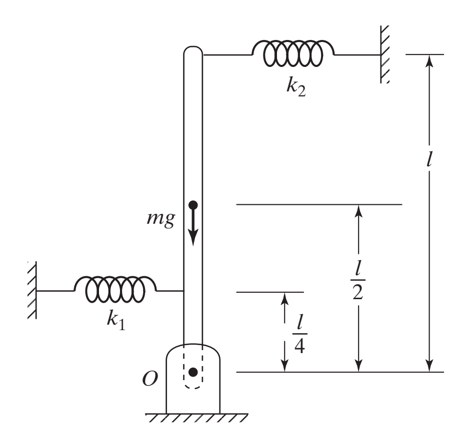


Figura 1.76 Barra rígida conectada por resortes.

1.21 La figura 1.77 muestra un manómetro de tubo en forma de U abierto por ambos extremos que contiene una columna de mercurio líquido de longitud l y peso específico γ. Considerando un pequeño desplazamiento x del menisco del manómetro a partir de su posición de equilibrio (o nivel de referencia), determine la constante de resorte equivalente asociada con la fuerza de restauración.

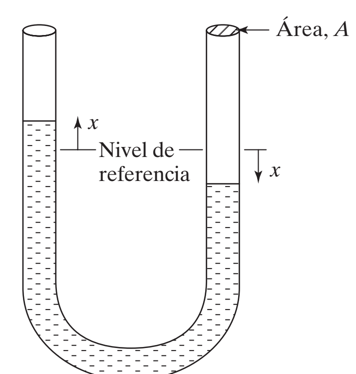


Figura 1.77 Manómetro de tubo en U.

1.22 Un barril de petróleo de diámetro d y masa m flota en un baño de agua de mar de densidad ρ_w como se muestra en la figura 1.78. Considerando un pequeño desplazamiento x del barril a partir de su posición de equilibrio, determine la constante de resorte equivalente asociada con la fuerza de restauración.

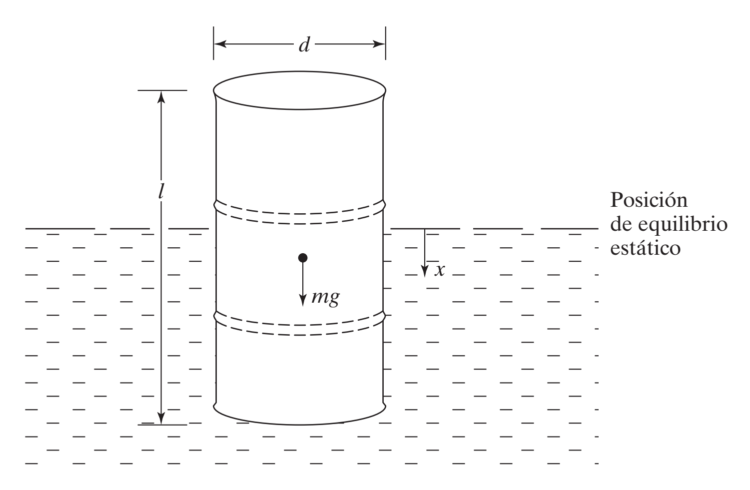


Figura 1.78 Barril de petróleo flotando en agua de mar.

1.23 Encuentre la constante de resorte equivalente y la masa equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.79 con referencias a θ. Suponga que las barras AOB y CD son rígidas con masa insignificante.

1.24 Encuentre la longitud de la flecha hueca uniforme equivalente de diámetro interno d y espesor t cuya constante de resorte axial es igual a la de la flecha cónica sólida que se muestra en la figura 1.80.

1.25 La figura 1.81 muestra una barra de tres escalones empotrada por uno de sus extremos y sometida a una fuerza axial F aplicada en el otro extremo. La longitud del escalón i es l_i y su área de sección transversal es A_i, $i = 1, 2, 3$. Todos los escalones son del mismo material con módulo de Young $E_i = E$, $i = 1, 2, 3$.

- **a.** Encuentre la constante de resorte (o rigidez) k_i del escalón i en la dirección axial ($i = 1, 2, 3$).
- **b.** Encuentre la constante de resorte equivalente (o rigidez) de la barra escalonada, k_{eq}, en la dirección axial de modo que $F = k_{eq}x$.
- **c.** Indique si los escalones se comportan como resortes en serie o en paralelo.

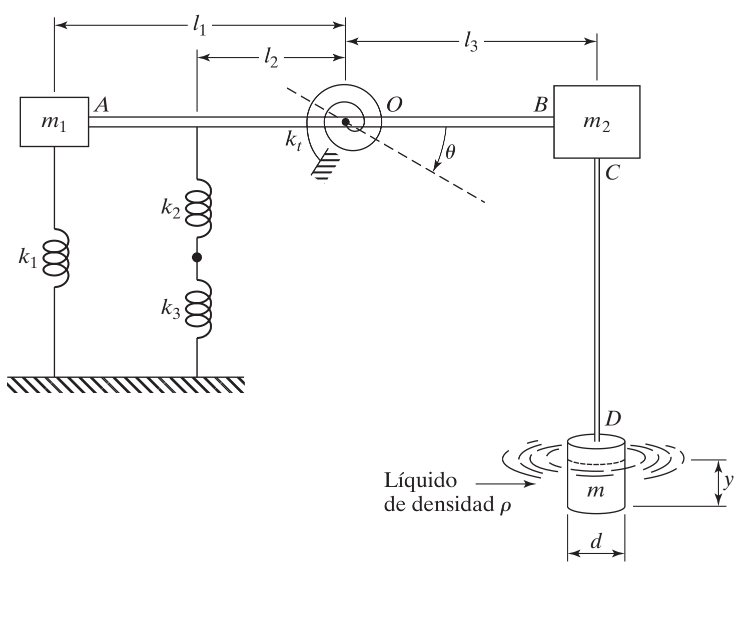


Figura 1.79

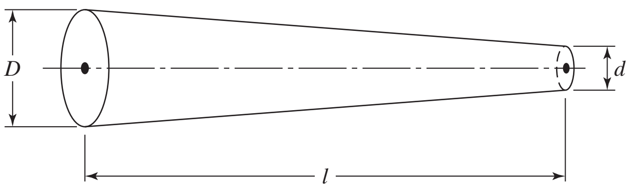


Figura 1.80

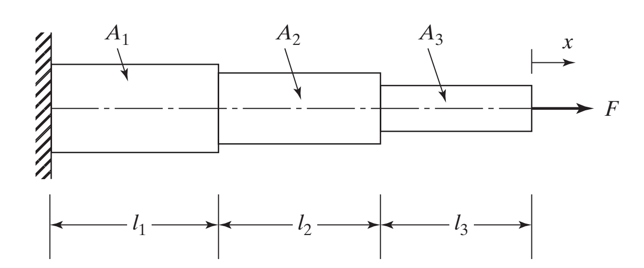


Figura 1.81 Barra escalonada sometida a una fuerza axial.

1.26 Determine la constante de resorte equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.82.

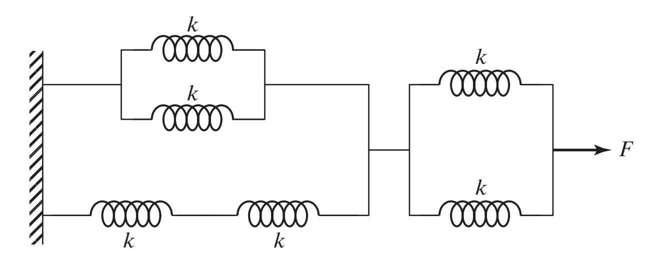


Figura 1.82 Resortes conectados en serie-paralelo.

1.27 La figura 1.83 muestra una flecha de tres escalones empotrada por un extremo y sometida a un momento de torsión T en el otro extremo. La longitud del escalón es l_i y su diámetro es D_i, $i = 1, 2, 3$. Todos los escalones son del mismo material con módulo de cortante $G_i = G$, $i = 1, 2, 3$.

a. Encuentre la constante de resorte torsional (o rigidez) k_{t_i} del escalón i ($i = 1, 2, 3$).
b. Encuentre la constante de resorte torsional equivalente (o rigidez) de la flecha escalonada, $k_{t_{eq}}$, de modo que $T = k_{t_{eq}}\theta$.
c. Indique si los escalones se comportan como resortes torsionales en serie o en paralelo.

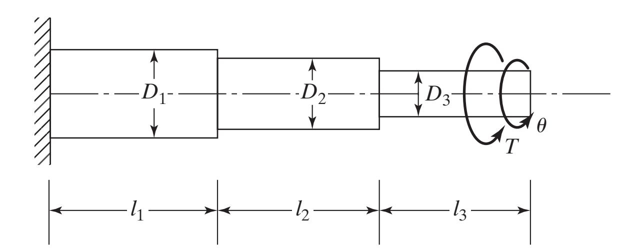


Figura 1.83 Flecha escalonada sometida a un momento de torsión.

1.28 $F = 500x + 2x^3$ describe la característica de fuerza-deflexión de un resorte, donde la fuerza (F) está en Newtons y la deflexión (x) está en milímetros. Encuentre (a) la constante de resorte linealizada en $x = 10$ mm y (b) las fuerzas ejercidas por el resorte en $x = 9$ mm y $x = 11$ mm utilizando la constante de resorte linealizada. Encuentre también el error en las fuerzas ejercidas por el resorte en (b).

1.29 La figura 1.84 muestra un resorte neumático. Este tipo de resorte se suele utilizar para obtener frecuencias naturales muy bajas al mismo tiempo que mantiene una deflexión cero sometida a cargas estáticas. Encuentre la constante de resorte de este resorte neumático, suponiendo que la presión p y el volumen v cambian adiabáticamente cuando se desplaza la masa m.

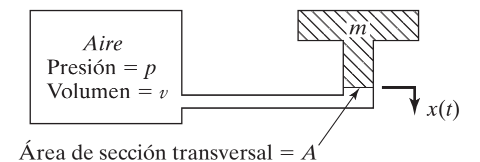


Figura 1.84

Sugerencia: pv^γ = constante en un proceso adiabático, donde γ es la relación de calores específicos. Para aire, $\gamma = 1.4$.

1.30 Encuentre la constante de resorte equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.85 en la dirección de la carga P.

1.31 Derive la expresión para la constante de resorte equivalente que relaciona la fuerza aplicada F con el desplazamiento resultante x del sistema que se muestra en la figura 1.86. Suponga que el desplazamiento del eslabón es pequeño.

1.32 La constante de resorte de un resorte helicoidal sometido a una carga axial está dada por

$$k = \frac{Gd^4}{8ND^3}$$

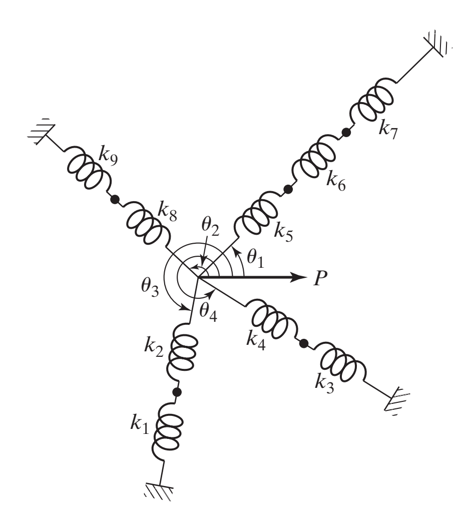


Figura 1.85

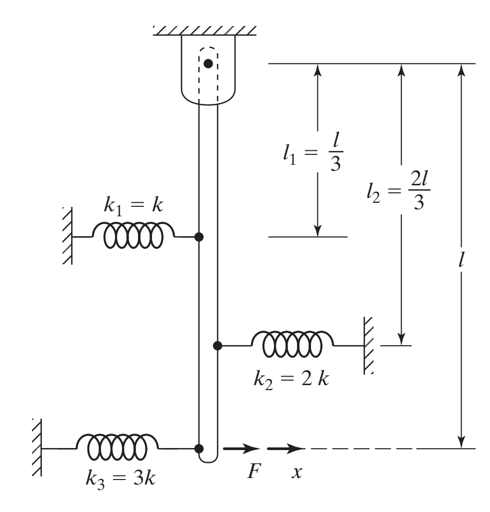


Figura 1.86 Barra rígida conectada por resortes.

donde G es el módulo de cortante, d es el diámetro del alambre, D es el diámetro de la espira y N es la cantidad de vueltas. Encuentre la constante de resorte y el peso de un resorte helicoidal de acero para los siguientes datos: $D = 0.2$m, $d = 0.005$ m, $N = 10$.

1.33 Dos resortes helicoidales, uno de acero y el otro de aluminio, tienen valores idénticos de d y D. (a) Si la cantidad de vueltas en el resorte de acero es de 10, determine la cantidad de vueltas requerida en el resorte de aluminio cuyo peso será igual al del resorte de acero, (b). Encuentre las constantes de los dos resortes.

1.34 La figura 1.87 muestra tres resortes, uno con rigidez $k_1 = k$ y cada uno de los otros dos con rigidez $k_2 = k$. El resorte con rigidez k_1 tiene una longitud l y cada uno de los resortes con rigidez k_2 tiene una longitud $l - a$. Encuentre la característica de deflexión del sistema.

1.35* Diseñe un resorte neumático con un recipiente cilíndrico y un pistón para lograr una constante de resorte de 75 lb/pulg. Suponga que la presión del aire disponible es de 200 lb/pulg^2.

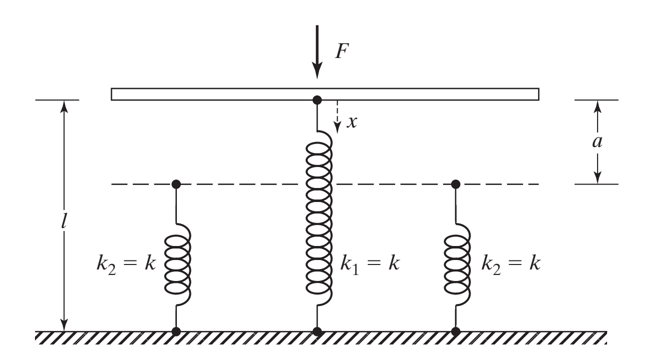


Figura 1.87 Comportamiento no lineal de resortes lineales.

1.36* La relación fuerza-deflexión (x) de un resorte no lineal está dada por

$$F = ax + bx^3$$

donde a y b son constantes. Encuentre la constante de resorte lineal equivalente cuando la deflexión sea de 0.01 m con $a = 20000$ N/m y $b = 40 \times 10^6$ N/m³.

1.37 Dos resortes no lineales, S_1 y S_2 están conectados en dos formas diferentes como se indica en la figura 1.88. La fuerza, F_i, en el resorte S_i está relacionada con su deflexión (x_i) como

$$F_i = a_i x_i + b_i x_i^3, \qquad i = 1, 2$$

donde a_i y b_i son constantes. Si $W = k_{eq} x$, donde x es la deflexión total del sistema, define una constante de resorte lineal equivalente k_{eq}, encuentre una expresión para k_{eq} en cada caso.

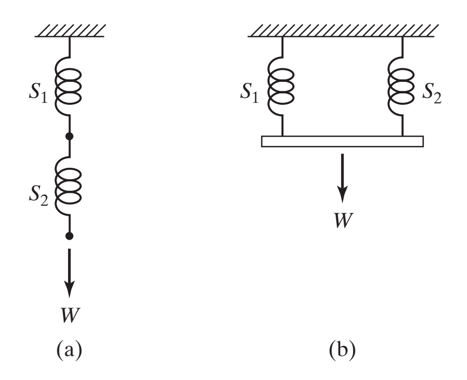


Figura 1.88

1.38* Diseñe un resorte helicoidal de acero sometido a compresión para satisfacer los siguientes requerimientos:

Rigidez del resorte (k) $\geq$ 8000 N/mm

Frecuencia de vibración natural fundamental (f_1) $\geq$ 0.4 Hz.

Índice de resorte (D/d) $\geq$ 6

Cantidad de vueltas activas (N) $\geq$ 10

La rigidez y la frecuencia natural fundamental del resorte están dadas por [1.43]:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3N} \quad \text{y} \quad f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

donde G = módulo de cortante, d = diámetro del alambre, D = diámetro de la espira, W = peso del resorte, y g = aceleración debida a la gravedad.

1.39 Encuentre la constante de resorte de la barra bimetálica que se muestra en la figura 1.89 en movimiento axial.

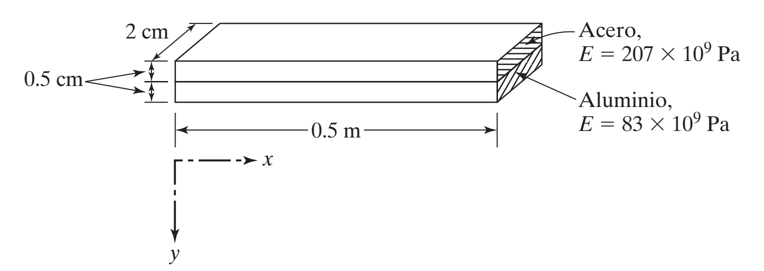


Figura 1.89

1.40 Considere un resorte de rigidez k alargado una distancia x_0 a partir de su longitud libre. Un extremo del resorte está fijo en el punto O y el otro está conectado a un rodillo como se muestra en la figura 1.90. El rodillo está restringido a moverse en la dirección horizontal sin fricción. Encuentre la relación fuerza (F)-desplazamiento (x) del resorte, cuando el rodillo se mueve una distancia horizontal x a la posición B. Analice la relación fuerza-desplazamiento resultante e identifique la constante de rigidez $\widetilde{k}$ a lo largo de la dirección de x.

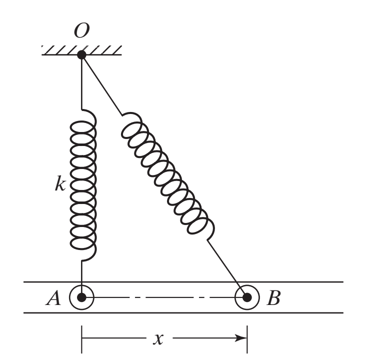


Figura 1.90 Un extremo del resorte con movimiento lateral.

1.41 Un extremo del resorte helicoidal está fijo y el otro está sometido a cinco fuerzas de tensión diferentes. Las longitudes del resorte medidas con varios valores de las fuerzas de tensión se dan a continuación.

Fuerza de tensión $F(N)$	0	100	250	330	480	570
Longitud total del resorte (mm)	150	163	183	194	214	226

Determine la relación fuerza-deflexión del resorte helicoidal.

1.42 En la figura 1.91 se muestra una flecha ahusada de hélice de acero sólido. Determine la constante de resorte torsional de la flecha.

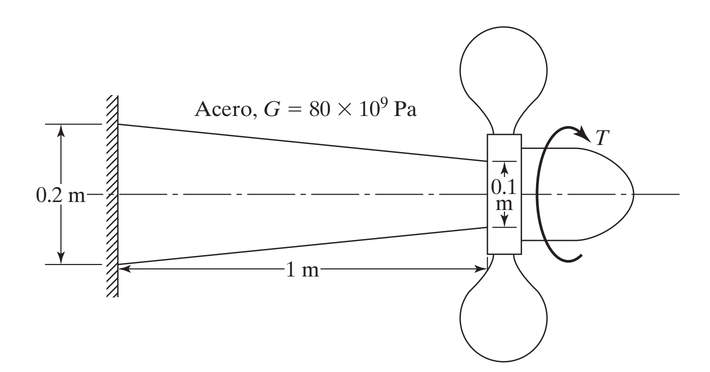


Figura 1.91

1.43 En la figura 1.92 se muestra una flecha de hélice compuesta, hecha de acero y aluminio.

a. Determine la constante de resorte torsional de la flecha.

b. Determine la constante de resorte torsional de la flecha compuesta cuando el diámetro interno del tubo de aluminio es de 5 cm en lugar de 10 cm.

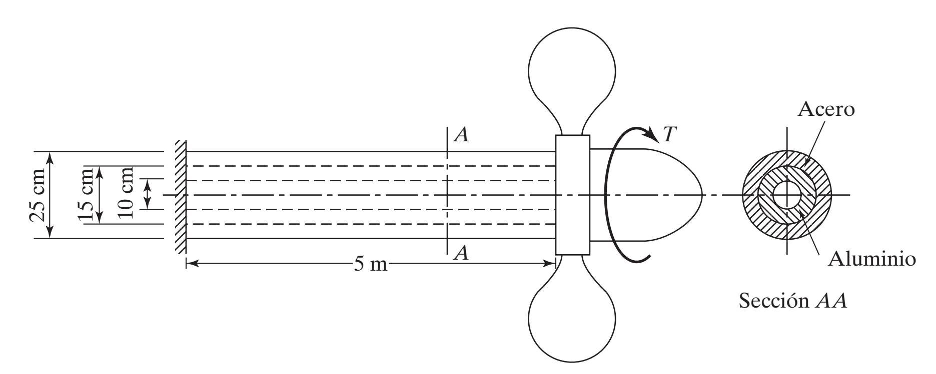


Figura 1.92

1.44 Considere dos resortes helicoidales con las siguientes características:

Resorte 1: material, acero; cantidad de vueltas, 10; diámetro medio, 12 pulg; diámetro del alambre, 2 pulg; longitud libre, 15 pulg; módulo de cortante, 12×10^6 lb/pulg^2.

Resorte 2: material, aluminio; cantidad de vueltas, 10; diámetro medio de la espira, 10 pulg; diámetro del alambre, 1 pulg; longitud libre, 15 pulg; módulo de cortante, 4×10^6 lb/pulg^2.

Determine la constante de resorte equivalente cuando (a) el resorte 2 se coloca dentro del resorte 1, y (b) si el resorte 2 se coloca sobre el resorte 1.

1.45 Resuelva el problema 1.44 suponiendo que los diámetros de los resortes 1 y 2 son de 1.0 pulg y 0.5 pulg, en vez de 2.0 pulg y 1.0 pulg, respectivamente.

1.46 El brazo de la excavadora que se muestra en la figura 1.93 se puede representar de forma aproximada como un tubo de acero de 10 pulg de diámetro externo, 9.5 pulg de diámetro interno y 100 pulg de longitud, con un coeficiente de amortiguamiento viscoso de 0.4. El brazo *DE* se puede representar de forma aproximada como un tubo de acero de 7 pulg de diámetro externo, 6.5 pulg de diámetro interno, y 75 pulg de longitud, con un coeficiente de amortiguamiento viscoso de 0.3. Estime la constante de resorte equivalente y el coeficiente de amortiguamiento equivalente de la excavadora suponiendo que la base *AC* esté fija.

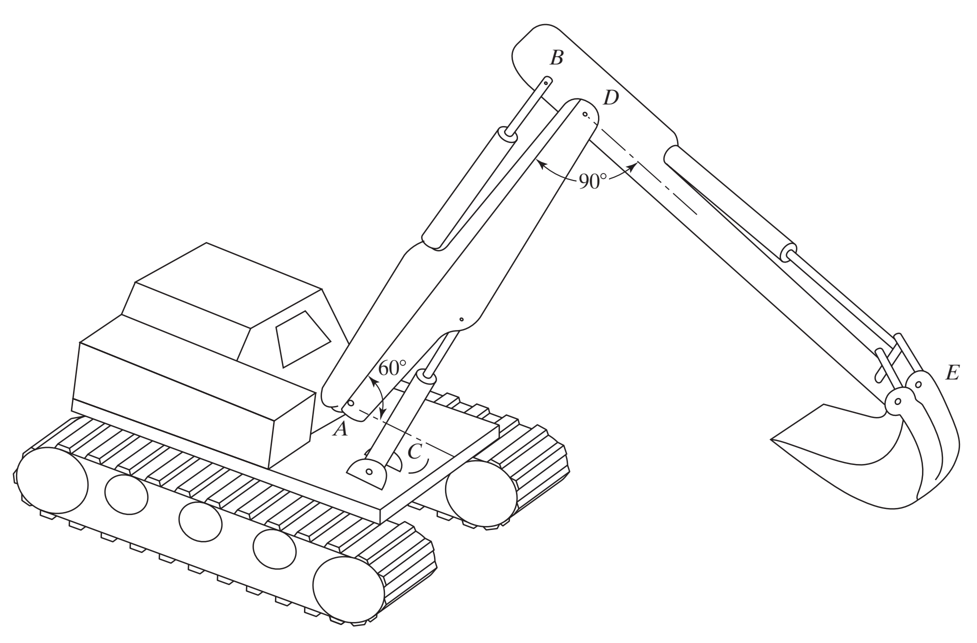


Figura 1.93 Excavadora.

1.47 Un intercambiador de calor se compone de seis tubos de acero inoxidable idénticos conectados en paralelo como se muestra en la figura 1.94. Si cada tubo tiene un diámetro externo de 0.30 pulg, un diámetro interno de 0.29 pulg y 50 pulg, determine la rigidez axial y la rigidez torsional con respecto al eje longitudinal del intercambiador de calor.

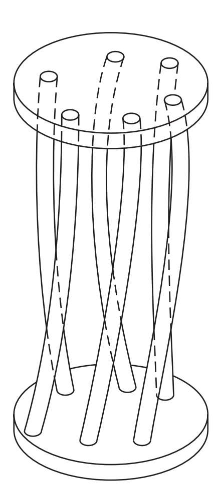


Figura 1.94 Intercambiador de calor.

Sección 1.8 Elementos de masa o inercia

1.48 Dos engranes, colocados en los extremos de los eslabones 1 y 2, se engranan entre sí y giran alrededor de O_1 y O_2, como se muestra en la figura 1.95. Si los eslabones 1 y 2 están conectados a los resortes, k_1 a k_4 y k_{t1} y k_{t2} como se muestra, encuentre la rigidez de resorte torsional equivalente y el momento de inercia de masa equivalente del sistema con referencia a θ_1. Suponga (a) que el momento de inercia de masa del

eslabón 1 (incluido el engrane) con respecto a O_1 es J_1 y que el del eslabón 2 (incluido el engrane) con respecto a O_2 es J_2, y (b) que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños.

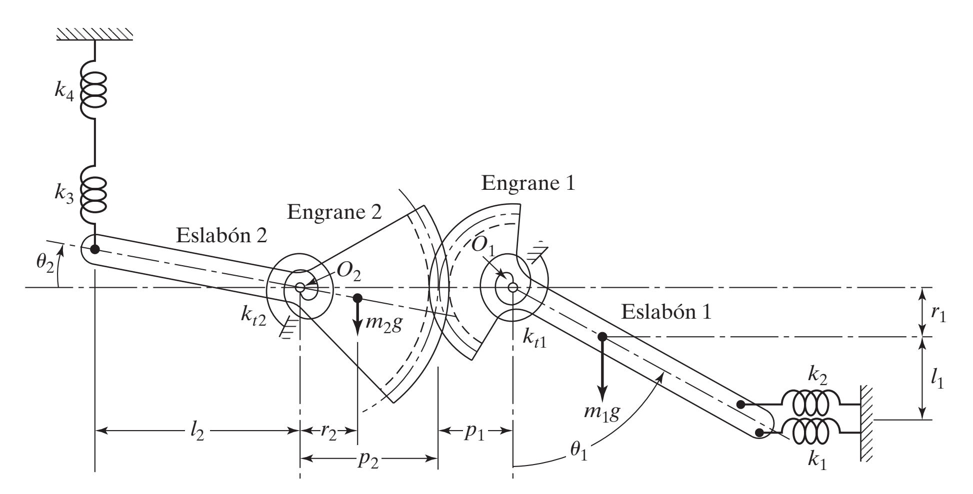


Figura 1.95 Dos engranes.

1.49 En la figura 1.96 encuentre la masa equivalente del ensamble de balancín con respecto a la coordenada x.

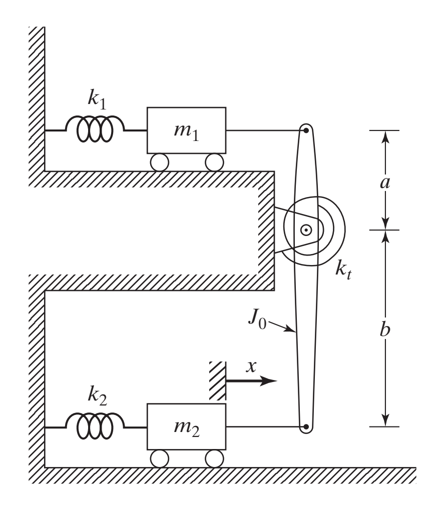


Figura 1.96 Ensamble de balancín.

1.50 Encuentre el momento de inercia de masa equivalente del tren de engranes que se muestra en la figura 1.97 con respecto a la flecha motriz. En la figura 1.97, J_i y n_i indican el momento de inercia de masa y la cantidad de dientes, respectivamente, del engrane i, $i = 1, 2, ..., 2N$.

1.51 Dos masas, con momentos de inercia de masa J_1 y J_2 se colocan en flechas rotatorias rígidas conectadas por medio de engranes, como se muestra en la figura 1.98. Si la cantidad de dientes en los engranes 1 y 2 son n_1 y n_2, respectivamente, encuentre el momento de inercia de masa equivalente correspondiente a θ_1.

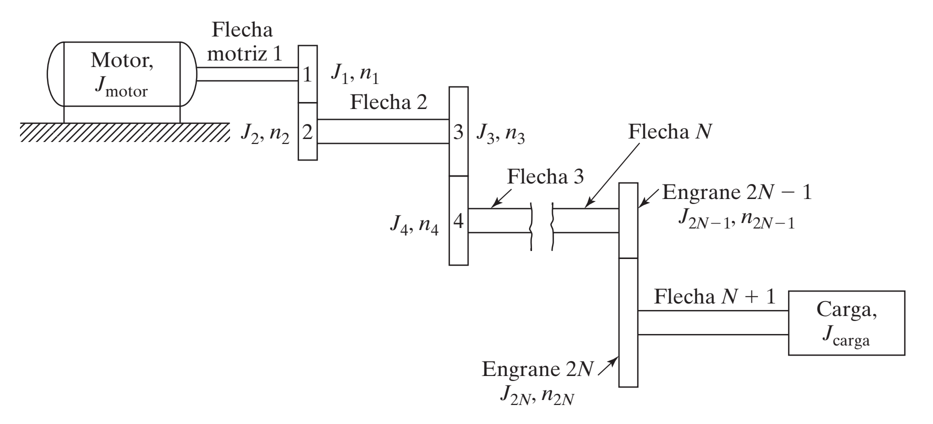


Figura 1.97

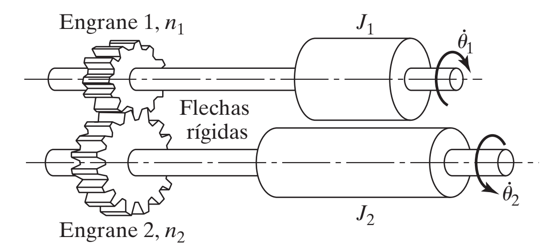


Figura 1.98 Masas rotacionales en flechas conectadas por engranes.

1.52 En la figura 1.99 se muestra un modelo simplificado de una bomba de petróleo, donde el movimiento rotatorio de la manivela se convierte en el movimiento reciprocante del pistón. Determine la masa equivalente m_{eq} del sistema en el lugar A.

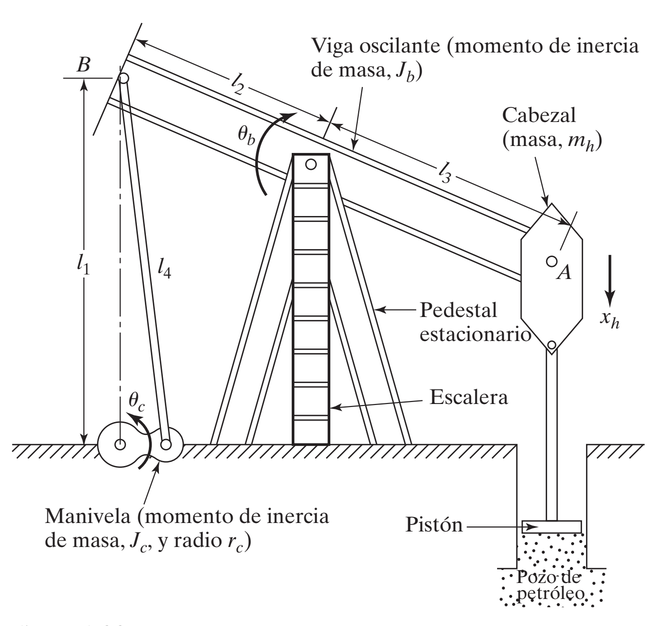


Figura 1.99

1.53 Encuentre la masa equivalente del sistema que se muestra en la figura 1.100.

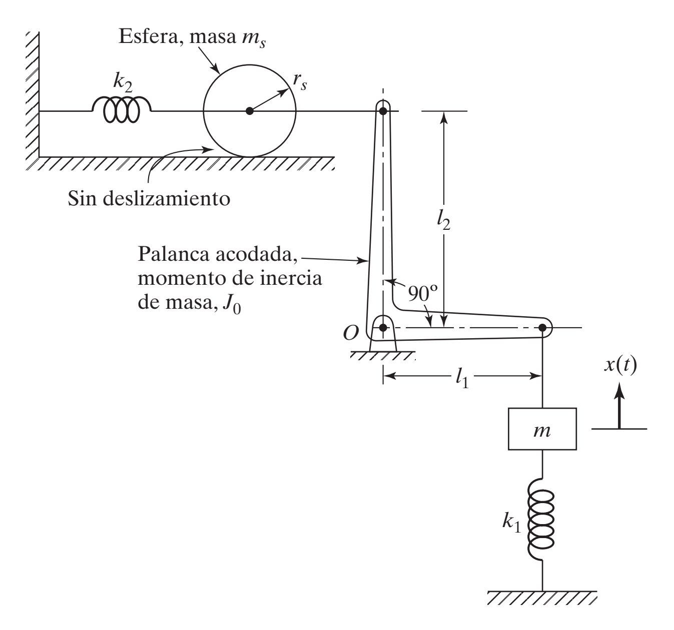


Figura 1.100

1.54 La figura 1.101 muestra un mecanismo de manivela corrediza de desvío con una longitud de manivela r, que conecta una biela de longitud l y desvío δ. Si la manivela tiene una masa y momento de inercia de m_r y J_r, respectivamente, en su centro de masa A, la biela de conexión tiene una masa y momento de inercia de m_c y J_c, respectivamente, en su centro de masa C, y el pistón tiene una masa m_p, determine la inercia rotacional equivalente del sistema con respecto al centro de rotación de la manivela, punto O.

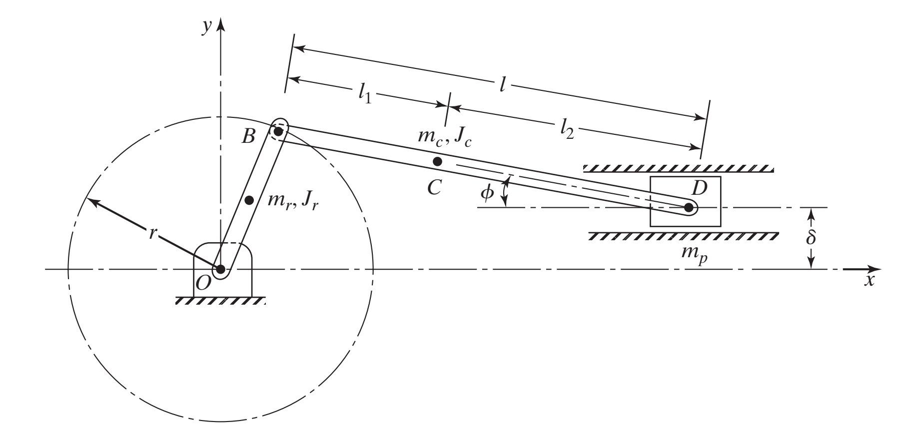


Figura 1.101 Mecanismo de manivela corrediza.

Sección 1.9 Elementos de amortiguamiento

1.55 Encuentre una constante de amortiguamiento equivalente única para los siguientes casos:

a. Cuando tres amortiguadores están en paralelo.
b. Cuando tres amortiguadores están en serie.

c. Cuando tres amortiguadores están conectados a una barra rígida (figura 1.102) y el amortiguador equivalente se encuentra en el sitio c_1.

d. Cuando se montan tres amortiguadores torsionales en flechas engranadas (figura 1.103) y el amortiguador equivalente se encuentra en c_{t_1}.

Sugerencia: La energía disipada por un amortiguador viscoso en un ciclo durante movimiento armónico está dada por $\pi c \omega X^2$, donde c es la constante de amortiguamiento, ω es la frecuencia, y X es la amplitud de la oscilación.

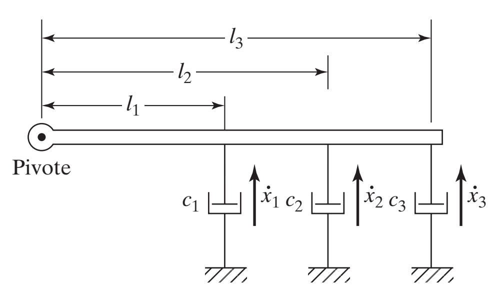


Figura 1.102 Amortiguadores conectados a una barra rígida.

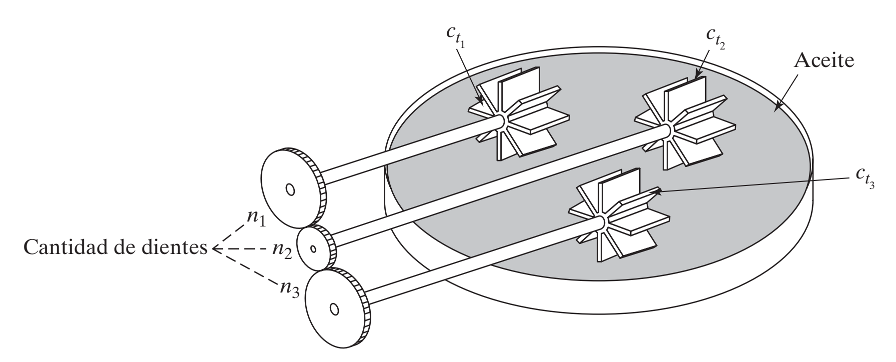


Figura 1.103 Amortiguadores montados en flechas engranadas.

1.56 Considere un sistema de dos amortiguadores, con constantes de amortiguamiento c_1 y c_2, dispuestos en paralelo como se muestra en la figura 1.104. La barra rígida a la cual están conectados los dos amortiguadores permanece horizontal cuando la fuerza F es cero. Determine la constante de amortiguamiento equivalente del sistema (c_e) que relaciona la fuerza aplicada (F) con la velocidad resultante (v) como $F = c_e v$.

Sugerencia: Como las constantes de amortiguamiento de los dos amortiguadores son diferentes y las distancias l_1 y l_2 no son iguales, la barra rígida no permanecerá horizontal cuando se aplique la fuerza F.

1.57* Diseñe un amortiguador viscoso de tipo pistón-cilindro para obtener una constante de amortiguamiento de l lb-s/pulg, con un fluido con viscosidad de 4 μreyn (1 reyn = 1 lb-s/pulg^2).

1.58* Diseñe un amortiguador (de pistón-cilindro tipo cilindro hidráulico) para obtener una constante de amortiguamiento de 10^5 lb-s/pulg utilizando aceite SAE 30 a 70F. El diámetro del pistón tiene que ser menor que 2.5 pulg.

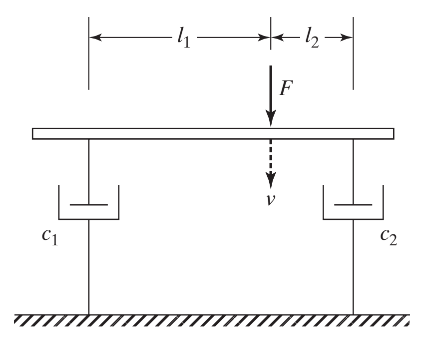


Figura 1.104 Amortiguadores en paralelo sometidos a una carga.

1.59 Desarrolle una expresión para la constante de amortiguamiento del amortiguador rotacional que se muestra en la figura 1.105 en función de D, d, l, h, ω y μ, donde ω indica la velocidad angular constante del cilindro interno, y d y h representan las holguras radial y axial entre los cilindros interno y externo.

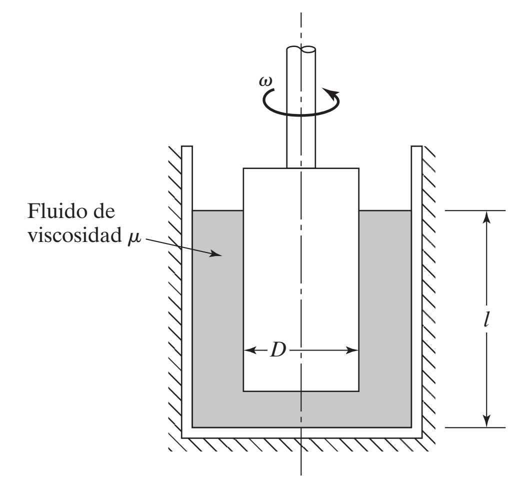


Figura 1.105

1.60 Considere dos amortiguadores no lineales con la misma relación fuerza-velocidad dada por $F = 1000v + 400v^2 + 20v^3$ con F en newtons y v en metros/segundo. Encuentre la constante de amortiguamiento linealizada de los amortiguadores a una velocidad de operación de 10 m/s.

1.61 Si los amortiguadores linealizados del problema 1.60 se conectan en paralelo, determine la constante de amortiguamiento equivalente resultante.

1.62 Si los amortiguadores linealizados del problema 1.60 están conectados en serie, determine la constante de amortiguamiento equivalente resultante.

1.63 La relación fuerza-velocidad de un amortiguador no lineal está dada por $F = 500v + 100v^2 + 50v^3$, donde F está en newtons y v está en metros/segundo. Encuentre la constante de amortiguamiento linealizada del amortiguador a una velocidad de operación de 5 m/s. Si se utiliza la constante de amortiguamiento linealizada resultante a una velocidad de operación de 10 m/s, determine el error implicado.

1.64 La determinación de la fuerza de amortiguamiento correspondiente a varios valores de la velocidad del amortiguador arrojó los siguientes resultados:

Fuerza de amortiguamiento (Newtons)	80	150	250	350	500	600
Velocidad del amortiguador (metros/segundo)	0.025	0.045	0.075	0.110	0.155	0.185

Determine la constante de amortiguamiento del amortiguador.

1.65 Una placa plana de 0.25 m^2 de área se mueve sobre una superficie plana paralela con una película de lubricante de 1.5 mm de espesor entre las dos superficies paralelas. Si la viscosidad del lubricante es de 0.5 Pa-s, determine lo siguiente:

a. Constante de amortiguamiento.
b. Fuerza de amortiguamiento desarrollada cuando la placa se mueve a una velocidad de 2 m/s.

1.66 Encuentre la constante de amortiguamiento torsional de una chumacera con los siguientes datos: Viscosidad del lubricante (μ): 0.35 Pa-s: Diámetro de la flecha (2 R): 0.05 m: Longitud del cojinete (l): 0.075 m: Holgura del cojinete (d): 0.005m. Si la flecha gira a una velocidad (N) de 3000 rpm, determine el par de torsión de amortiguamiento desarrollado.

1.67 Si cada uno de los parámetros (μ, R, l, d y N) de la chumacera descrita en el problema 1.66 se somete a un $\pm$ 5% de variación con respecto al valor correspondiente dado, determine la fluctuación de porcentaje en los valores de la constante de amortiguamiento torsional y el par de torsión de amortiguamiento desarrollado.

Nota: Las variaciones de los parámetros pueden tener varias causas, como un error de medición, tolerancias en las dimensiones de fabricación, y fluctuaciones en la temperatura de operación del cojinete.

1.68 Considere un pistón con un orificio en un cilindro lleno de un fluido de viscosidad μ como se muestra en la figura 1.106. Cuando el pistón se mueve en el cilindro, el fluido fluye a través del orificio y produce una fuerza de fricción o amortiguamiento. Derive una expresión para la fuerza que se requiere para mover el pistón con una velocidad v e indique el tipo de amortiguamiento implicado.

Sugerencia: La velocidad de flujo de masa del fluido (q) que pasa a través de un orificio está dada por $q = \alpha \sqrt{\Delta p}$, donde α es una constante para un área de fluido dada de sección transversal del cilindro (o área del pistón) y área del orificio [1.52].

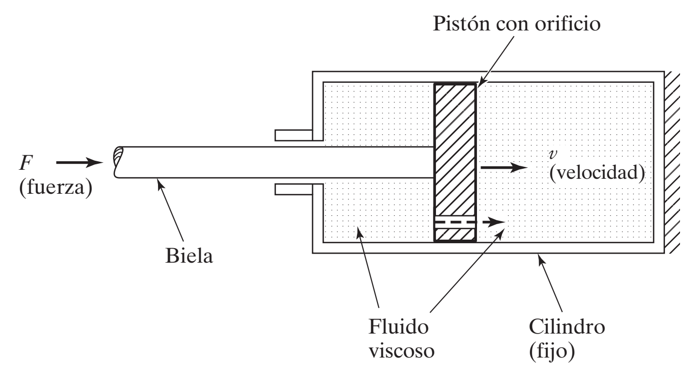


Figura 1.106 Pistón y cilindro con flujo a través de un orificio.

1.69 La relación fuerza (F)-velocidad ($\dot{x}$) de un amortiguador no lineal está dada por

$$F = a\dot{x} + b\dot{x}^2$$

donde a y b son constantes. Encuentre la constante de resorte linealizada equivalente cuando la velocidad relativa es de 5 m/s con $a = 5$ N-s/m y $b = 0.2$ N-s^2/m^2.

1.70 La constante de amortiguamiento (c) producida por la resistencia por fricción de una placa rectangular que se mueve en un fluido de viscosidad m está dada por (vea la figura 1.107):

$$c = 100\mu l^2 d$$

Diseñe un amortiguador tipo placa (mostrado en la figura 1.42) que produzca una constante de amortiguamiento idéntica por el mismo fluido.

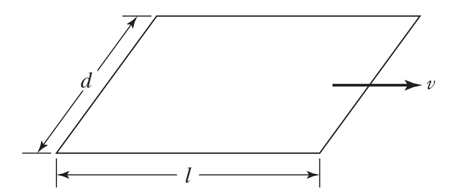


Figura 1.107

1.71 La constante de amortiguamiento (c) del amortiguador hidráulico que se muestra en la figura 1.108 está dada por [1.27]:

$$c = \frac{6\pi\mu l}{h^3}\left[\left(a - \frac{h}{2}\right)^2 - r^2\right]\left[\frac{a^2 - r^2}{a - \frac{h}{2}} - h\right]$$

Determine la constante de amortiguamiento del amortiguador hidráulico por los siguientes datos: $\mu = 0.3445$ Pa-s, $l = 10$ cm, $h = 0.1$ cm, $a = 2$ cm, $r = 0.5$ cm.

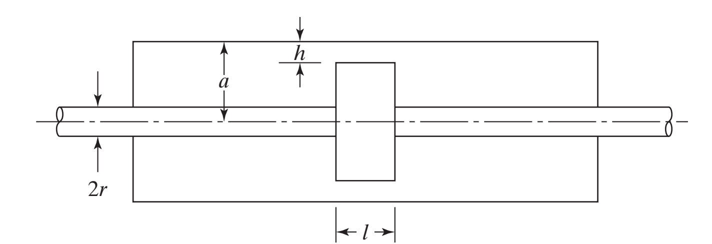


Figura 1.108

1.72 En el problema 1.71, tomando los datos dados como referencia, determine la variación de la constante de amortiguamiento c cuando

a. r cambia de 0.5 cm a 1.0 cm.
b. h cambia de 0.05 cm a 0.10 cm.
c. a cambia de 2 cm a 4 cm.

1.73 Una barra sin masa de 1 m de longitud y pivoteada en un extremo se somete a una fuerza F aplicada en el otro extremo. Dos amortiguadores traslacionales, con constantes de amortiguamiento $c_1 = 10$ N–s/m y $c_2 = 15$ N–s/m están conectados a la barra como se muestra en la figura 1.109. Determine la constante de amortiguamiento equivalente, c_{eq}, del sistema de modo que la fuerza F aplicada en el punto A pueda expresarse como $F = c_{eq}v$, donde v es la velocidad lineal del punto A.

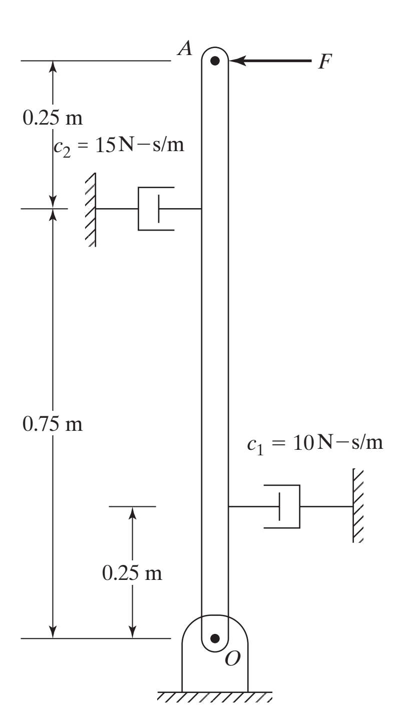


Figura 1.109 Barra rígida conectada por amortiguadores.

1.74 Encuentre una expresión para la constante de amortiguamiento traslacional equivalente del sistema mostrado en la figura 1.110 de modo que la fuerza F pueda expresarse como $F = c_{eq}v$, donde v es la velocidad de la barra rígida A.

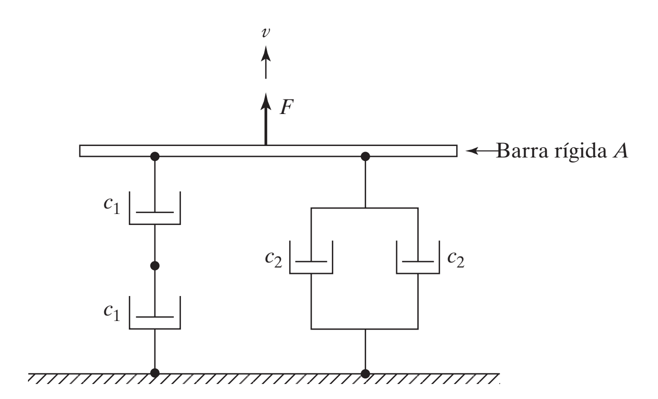


Figura 1.110 Amortiguadores conectados en serie-paralelo.

Sección 1.10 Movimiento armónico

1.75 Exprese el número complejo $5 + 2i$ en la forma exponencial $Ae^{i\theta}$.

1.76 Sume los dos números complejos $(1 + 2i)$ y $(3 - 4i)$ y exprese el resultado en la forma $Ae^{i\theta}$.

1.77 Reste el número complejo $(1 + 2i)$ de $(3 - 4i)$ y exprese el resultado en la forma $Ae^{i\theta}$.

1.78 Encuentre el producto de los números complejos $z_1 = (1 + 2i)$ y $z_2 = (3 - 4i)$ y exprese los resultados en la forma $Ae^{i\theta}$.

1.79 Encuentre el cociente, z_1/z_2, de los números complejos $z_1 = (1 + 2i)$ y $z_2 = (3 - 4i)$ y exprese el resultado en la forma $Ae^{i\theta}$.

1.80 La cimentación de un motor reciprocante se somete a movimientos armónicos en las direcciones x y y:

$$x(t) = X \cos \omega t$$
$$y(t) = Y \cos(\omega t + \phi)$$

donde X y Y son las amplitudes, ω es la velocidad angular y ϕ es la diferencia de fase.

a. Verifique si la resultante de los dos movimientos satisface la ecuación de la elipse dada por (vea la figura 1.111):

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} - 2\frac{xy}{XY}\cos\phi = \text{sen}^2\,\phi \tag{E.1}$$

b. Analice la naturaleza del movimiento dado por la ecuación (E.1) para los casos especiales de $\phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$, y $\phi = \pi$.

Nota: La figura elíptica representada por la ecuación (E.1) se conoce como figura de Lissajous y es útil para interpretar ciertos tipos de resultados experimentales (movimientos) desplegados por osciloscopios.

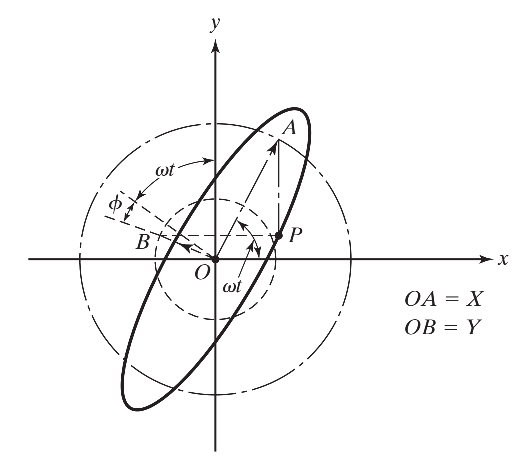


Figura 1.111 Figura de Lisajous.

1.81 La cimentación de un compresor neumático se somete a movimientos armónicos (con la misma frecuencia) en dos direcciones perpendiculares. El movimiento resultante, desplegado en un osciloscopio, aparece como se muestra en la figura 1.112. Encuentre las amplitudes de vibración en las dos direcciones y la diferencia de fase entre ellas.

1.82 Una máquina se somete al movimiento $x(t) = A\cos(50t + \alpha)$ mm. Las condiciones iniciales están dadas por $x(0) = 3$ mm y $\dot{x}(0) = 1.0$ m/s.

a. Encuentre las constantes A y α.

b. Exprese el movimiento en la forma $x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \,\text{sen}\, \omega t$, e identifique las constantes A_1 y A_2.

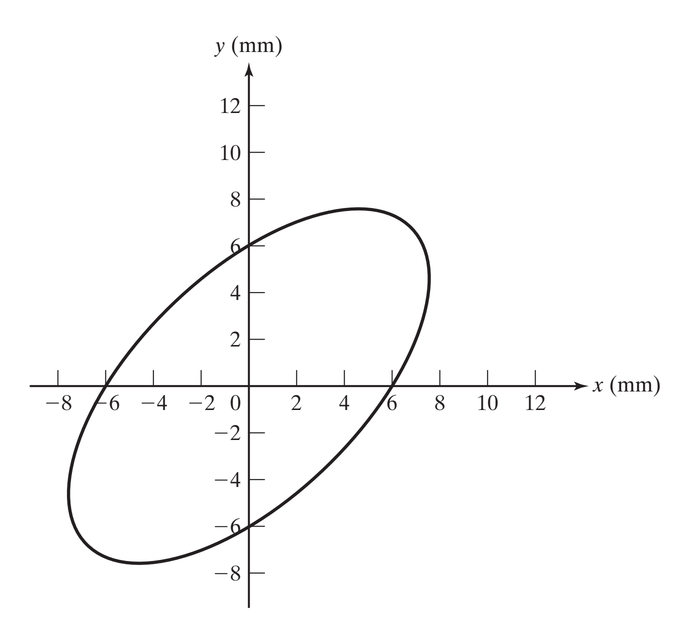


Figura 1.112

1.83 Demuestre que cualquier combinación lineal de sen ωt y cos ωt de modo que $x(t) = A_1 \cos \omega t + A_1 \text{ sen } \omega t$ (A_1, A_2 = constantes) representa un movimiento armónico simple.

1.84 Encuentre la suma de los dos movimientos armónicos $x_1(t) = 5 \cos(3t + 1)$ y $x_2(t) = 10 \cos(3t + 2)$. Use:

a. Relaciones trigonométricas.
b. Suma vectorial.
c. Representación de números complejos.

1.85 Si uno de los componentes del movimiento armónico $x(t) = 10 \text{ sen } (\omega t + 60°)$ es $x_1(t) = 5 \text{ sen}(\omega t + 30°)$, encuentre el otro componente.

1.86 Considere los dos movimientos armónicos $x_1(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}$ t y $x_2(t) = \text{sen } \pi t$. ¿Es la suma $x_1(t) + x_2(t)$ un movimiento periódico? De ser así, ¿cuál es su periodo?

1.87 Considere dos movimientos armónicos de diferentes frecuencias: $x_1(t) = 2 \cos 2t$ y $x_2(t) = \cos 3t$. ¿Es la suma $x_1(t) + x_2(t)$ un movimiento armónico? De ser así, ¿cuál es su periodo?

1.88 Considere los dos movimientos armónicos $x_1(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$ y $x_2(t) = \cos \pi t$. ¿Es la diferencia $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ un movimiento armónico? De ser así, ¿cuál es su periodo?

1.89 Encuentre las amplitudes máxima y mínima del movimiento combinado $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ cuando $x_1(t) = 3 \text{ sen } 30t$ y $x_2(t) = 3 \text{ sen } 29t$. Encuentre también la frecuencia de pulsacion correspondiente a $x(t)$.

1.90 Una máquina se somete a dos movimientos armónicos, y el movimiento resultante, tal como se despliega en un osciloscopio, se muestra en la figura 1.113. Encuentre las amplitudes y frecuencias de los dos movimientos.

1.91 Un movimiento armónico tiene una amplitud de 0.05 m y una frecuencia de 10 Hz. Encuentre su periodo, velocidad máxima y aceleración máxima.

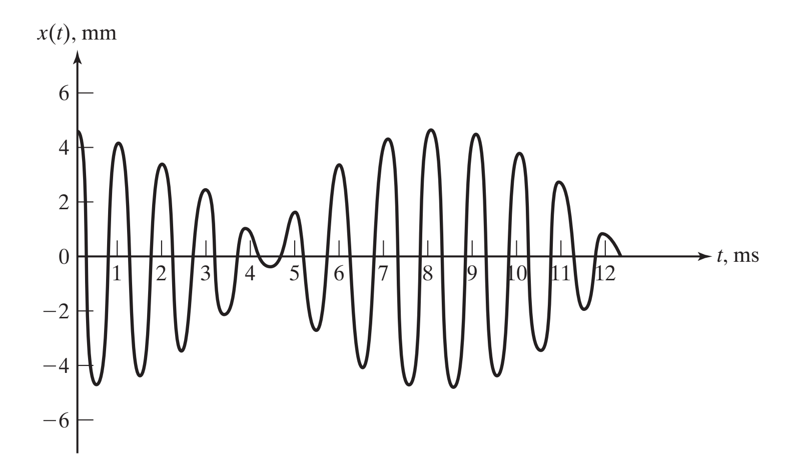


Figura 1.113

1.92 Un acelerómetro montado en la estructura de un edificio indica que ésta vibra armónicamente a 15 cps con una aceleración máxima de 0.5*g*. Determine la amplitud y la velocidad máxima de la estructura del edificio.

1.93 Se encontró que la amplitud máxima y la aceleración máxima de la cimentación de una bomba centrífuga son $x_{máx} = 0.25$ mm y $\ddot{x}_{máx} = 0.4g$. Encuentre la velocidad de operación de la bomba.

1.94 Una función exponencial se expresa como $x(t) = Ae^{-\alpha t}$ con los valores de $x(t)$ conocidos en $t = 1$ y $t = 2$ como $x(1) = 0.752985$ y $x(2) = 0.226795$. Determine los valores de A y α.

1.95 Cuando el desplazamiento x de una máquina está dado por $x(t) = 18 \cos 8t$, donde x está en milímetros y t en segundos, encuentre (a) el periodo de la máquina en segundos, y (b) la frecuencia de oscilación de la máquina en rad/s así como también en Hz.

1.96 Si el movimiento de una máquina se describe como $8 \operatorname{sen}(5t + 1) = A \operatorname{sen} 5t + B \cos 5t$, determine los valores de A y B.

1.97 Exprese la vibración de una máquina dada por $x(t) = -3.0 \operatorname{sen} 5t - 2.0 \cos 5t$ en la forma $x(t) = A \cos(5t + \phi)$.

1.98 Si el desplazamiento de una máquina está dado por $x(t) = 0.2 \operatorname{sen}(5t + 3)$, donde x está en metros y t en segundos, encuentre las variaciones de la velocidad y aceleración de la máquina. Encuentre también las amplitudes del desplazamiento, velocidad y aceleración de la máquina.

1.99 Si el desplazamiento de una máquina se describe como $x(t) = 0.15 \operatorname{sen} 4t + 2.0 \cos 4t$, donde x está en pulgadas y t en segundos, encuentre las expresiones para la velocidad y aceleración de la máquina. Encuentre también las amplitudes del desplazamiento, velocidad y aceleración de la máquina.

1.100 El desplazamiento de una máquina se expresa como $x(t) = 0.05 \operatorname{sen}(6t + \phi)$, donde x está en metros y t en segundos. Si se sabe que el desplazamiento de la máquina en el instante $t = 0$ se sabe que es de 0.04 m, determine el valor del ángulo de fase ϕ.

1.101 El desplazamiento de una máquina se expresa como $x(t) = A \operatorname{sen}(6t + \phi)$, donde x está en metros y t en segundos. Si se sabe que el desplazamiento y la velocidad de la máquina en el instante $t = 0$ son de 0.05 m y 0.005 m/s, determine el valor de A y ϕ.

1.102 Una máquina vibra con movimiento armónico simple a una frecuencia de 20 Hz y una aceleración de 0.5g. Determine el desplazamiento y velocidad de la máquina. Use el valor de g como 9.81 m/s^2.

1.103 Se sabe que el desplazamiento y aceleración de una turbina desbalanceada son de 0.5 mm y 0.5g, respectivamente. Encuentre la velocidad del rotor aplicando el valor de g como 9.81 m/s^2.

1.104 El valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados (rms) de una función, $x(t)$, se define como la raíz cuadrada del promedio del valor al cuadrado de $x(t)$ durante un periodo τ de tiempo:

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}[x(t)]^2\,dt}$$

Aplicando esta definición, determine el valor rms de la función

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t = X \text{ sen } \frac{2\pi t}{\tau}$$

1.105 Aplicando la definición dada en el problema 1.104, determine el valor rms de la función mostrada en la figura 1.54(a).

Sección 1.11 Análisis armónico

1.106 Demuestre que los componentes Fourier seno (b_n) son cero para funciones par, es decir, cuando $x(-t) = x(t)$. También demuestre que los componentes Fourier coseno (a_0 y a_n) son cero para funciones impar, es decir, cuando $x(-t) = -x(t)$.

1.107 Encuentre las expansiones de la serie de Fourier de las funciones mostradas en la figura 1.58(ii) e (iii). Encuentre, también, sus expansiones de serie de Fourier cuando el eje de tiempo se desplaza una distancia A.

1.108 La fuerza de impacto creada por un martillo de forja se modela como se muestra en la figura 1.114. Determine la expansión de la serie de Fourier de la fuerza de impacto.

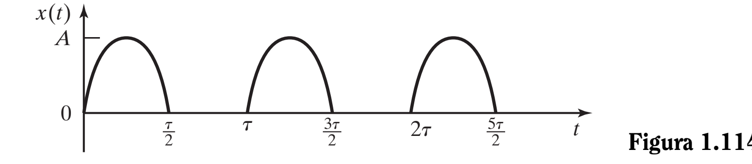


Figura 1.114

1.109 Encuentre la expansión de la serie de Fourier de la función periódica de la figura 1.115. También trace el espectro de frecuencia correspondiente.

1.110 Encuentre la expansión de la serie de Fourier de la función periódica de la figura 1.116. También trace el espectro de frecuencia correspondiente.

1.111 Encuentre la expansión de la serie de Fourier de la función periódica de la figura 1.117. También trace el espectro de frecuencia correspondiente.

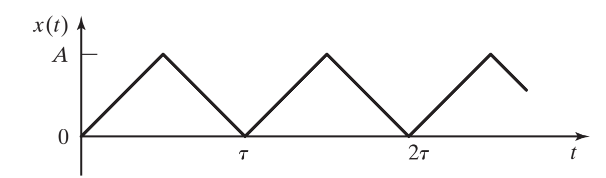


Figura 1.115

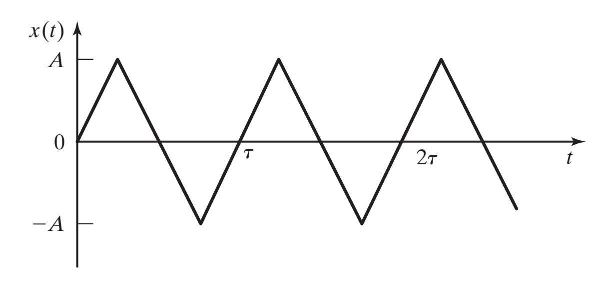


Figura 1.116

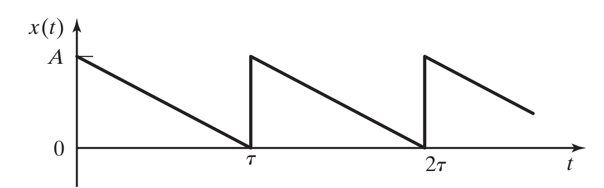


Figura 1.117

1.112 La serie de Fourier de una función periódica, $x(t)$, es una serie infinita dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) \tag{E.1}$$

donde

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\, dt \tag{E.2}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\, dt \tag{E.3}$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \qquad n\omega t\, dt \tag{E.4}$$

ω es la frecuencia circular y $2\pi/\omega$ es el periodo. En lugar de incluir el número infinito de términos en la ecuación (E.1), a menudo se trunca y se conservan sólo k términos como

$$x(t) \approx \widetilde{x}(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (\widetilde{a}_n \cos n\omega t + \widetilde{b}_n \operatorname{sen} n\omega t) \tag{E.5}$$

de modo que el error, $e(t)$, se convierte en

$$e(t) = x(t) - \widetilde{x}(t) \tag{E.6}$$

Determine los coeficientes $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{a}_n$, y $\widetilde{b}_n$, los cuales minimizan el cuadrado del error a lo largo de un periodo:

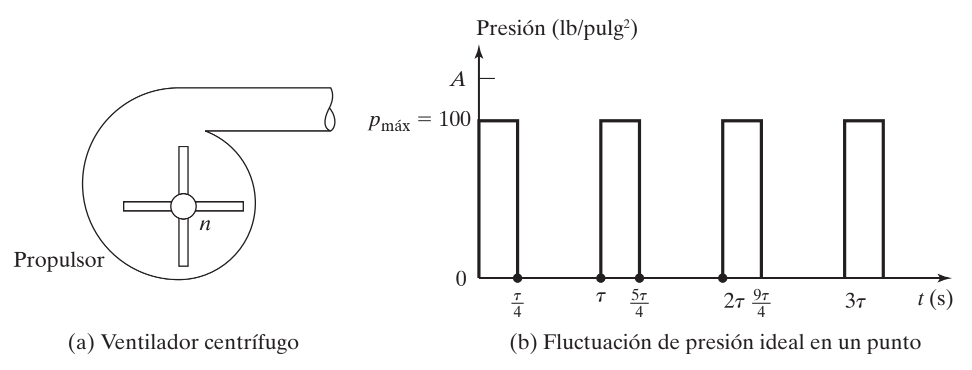
$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^2(t)\,dt \qquad \text{(E.7)}$$

Compare las expresiones de $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{a}_n$, y $\widetilde{b}_n$, con las ecuaciones (E.2) a (E.4) e indique su o sus observaciones.

1.113 Realice un análisis armónico, incluidos los primeros tres armónicos, de la función dada a continuación.

t_i	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18
x_i	9	13	17	29	43	59	63	57	49
t_i	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32		
x_i	35	35	41	47	41	13	7		

1.114 En un ventilador centrífugo (figura 1.118(a)), el aire en cualquier punto se somete a un impulso cada vez que un aspa pasa por el punto, como se muestra en la figura 1.118(b). La frecuencia de estos impulsos está determinada por la velocidad de rotación del propulsor n y la cantidad de aspas, N, en el propulsor. Para $n = 100$ rpm y $N = 4$, determine los primeros tres armónicos de la fluctuación de la presión mostrada en la figura 1.118(b).



(a) Ventilador centrífugo

(b) Fluctuación de presión ideal en un punto

Figura 1.118

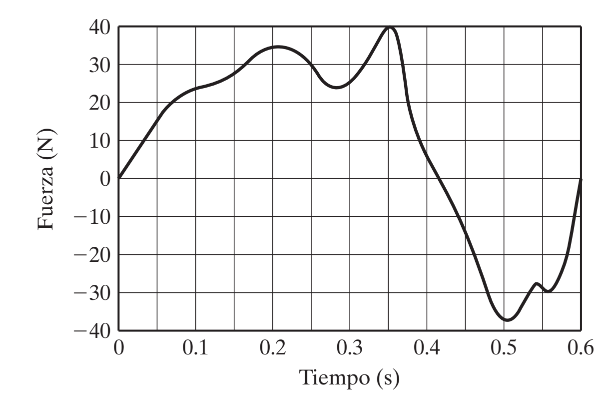
1.115 Resuelva el problema 1.114 con los valores de n y N como 200 rpm en lugar de 100 rpm y 4, respectivamente.

1.116 La variación del par de torsión (M_t) con el tiempo, de un motor de combustión interna, se da en la tabla 1.3. Realice un análisis armónico del par de torsión. Determine las amplitudes de los primeros tres armónicos.

Tabla 1.3

t (s)	*Mt* (N–m)	*t* (s)	*Mt* (N–m)	*t* (s)	*Mt* (N–m)
0.00050	770	0.00450	1890	0.00850	1050
0.00100	810	0.00500	1750	0.00900	990
0.00150	850	0.00550	1630	0.00950	930
0.00200	910	0.00600	1510	0.01000	890
0.00250	1010	0.00650	1390	0.01050	850
0.00300	1170	0.00700	1290	0.01100	810
0.00350	1370	0.00750	1190	0.01150	770
0.00400	1610	0.00800	1110	0.01200	750

1.117 Realice un análisis armónico de la función que se muestra en la figura 1.119 incluidos los primeros tres armónicos.



Sección 1.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

1.118 Trace la expansión de la serie de Fourier de la función $x(t)$ dada en el problema 1.113 utilizando MATLAB.

1.119 Utilice MATLAB para trazar la variación de la fuerza con el tiempo aplicando la expansión de la serie de Fourier determinada en el problema 1.117.

1.120 Utilice MATLAB para trazar la variación de la constante de amortiguamiento c con respecto a r, h y a, como se determinó en el problema 1.72.

1.121 Utilice MATLAB para trazar la variación de la rigidez de resorte (k) con la deformación (x) dada por las relaciones:

a. $k = 1000x - 100x^2$; $0 \leq x \leq 4$.

b. $k = 500 + 500x^2$; $0 \leq x \leq 4$.

1.122 Una masa se somete a dos movimientos armónicos dados por $x_1(t) = 3$ sen $30t$ y $x_2(t) = 3$ sen $29t$. Trace el movimiento resultante de la masa utilizando MATLAB e identifique la frecuencia y el periodo de pulsaciones.

Proyectos de diseño

1.123* En la figura 1.120 se muestra un mecanismo de manivela corrediza. Deduzca una expresión para el movimiento del pistón P en función de la longitud de la manivela r, la longitud de la biela l y la velocidad angular constante ω de la manivela.

a. Analice la factibilidad de utilizar el mecanismo para generar movimiento armónico.
b. Encuentre el valor de l/r para el cual la amplitud de cada armónico de mayor orden es más pequeño que el primer armónico por un factor de al menos 25.

1.124* La mesa vibratoria que se muestra en la figura 1.121 se utiliza para probar ciertos componentes electrónicos en situaciones de vibración. Se compone de dos engranes idénticos G_1 y G_2 que giran alrededor de los ejes O_1 y O_2 fijos al marco F. Dos masas iguales, m, se colocan simétricamente respecto al eje vertical medio como se muestra en la figura 1.121. Durante la rotación se desarrollará una fuerza vertical desbalanceada de magnitud $P = 2m\omega^2 r \cos\theta$, donde $\theta = \omega t$ y $\omega =$ velocidad angular de los engranes, que hará vibrar la mesa. Diseñe una mesa vibratoria que sea capaz de desarrollar una fuerza en el rango de 0-100 N durante un rango de frecuencia de 25-50 Hz.

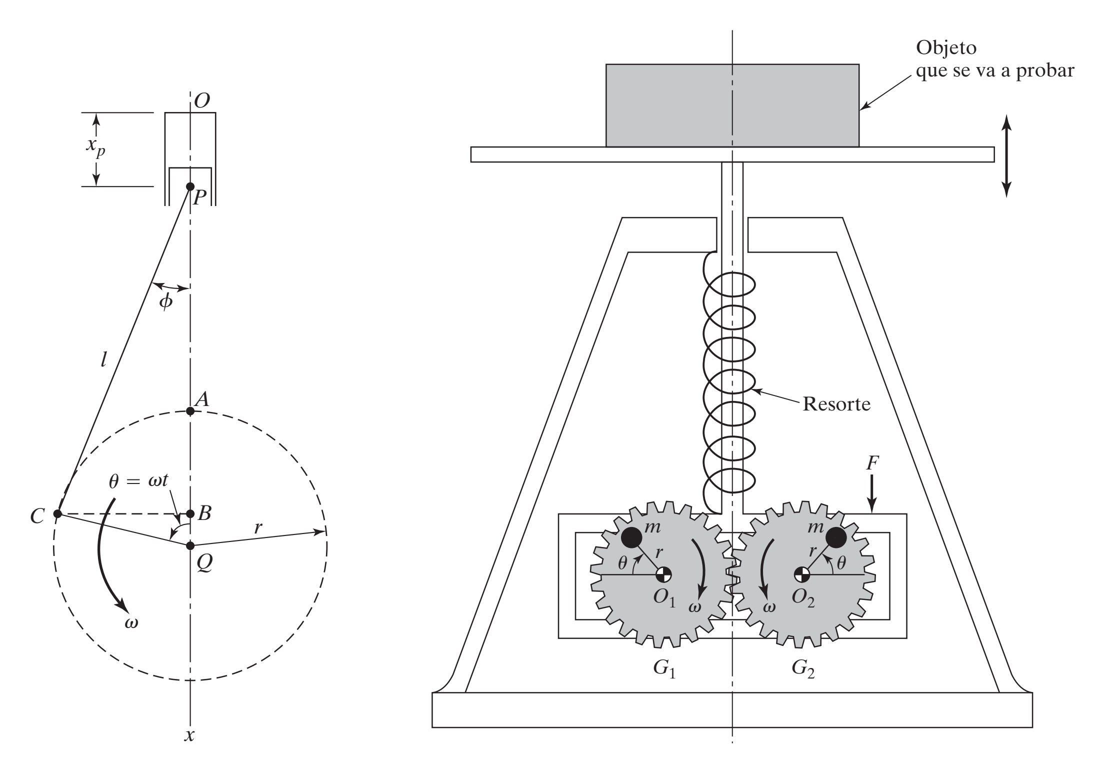


Figura 1.120

Figura 1.21 Mesa vibratoria.

1.125* El mecanismo que se muestra en la figura 1.122 se utiliza para regular el peso del material alimentado desde una tolva hasta una banda transportadora [1.44]. La manivela imparte un movimiento reciprocante a la biela por medio de la cuña. La amplitud del movimiento impartido a la biela se puede variar bajando o subiendo la cuña. Como la transportadora gira alrededor del punto O, cualquier sobrecarga en la transportadora hace que la palanca OA se incline hacia abajo y la cuña suba. Esto reduce la amplitud de la biela y por consiguiente la velocidad de alimentación. Diseñe un sistema regulador de peso para mantener el peso a 10 ± 0.1 lb por minuto.

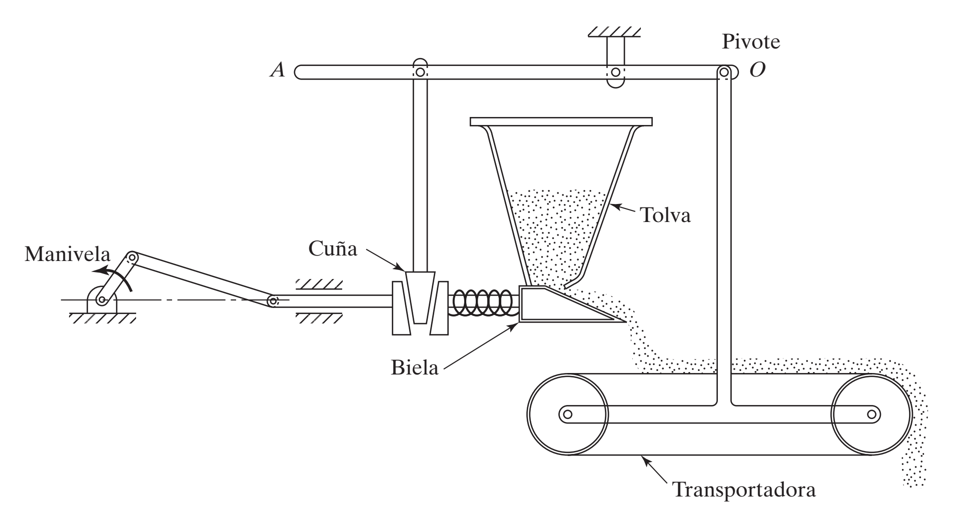


Figura 1.122 Sistema vibratorio regulador de peso.

1.126*La figura 1.123 muestra una compactadora vibratoria. Se compone de una leva con tres lóbulos paralelos y un rodillo seguidor oscilante. Al girar la leva, el rodillo sube y baja. Asimismo, el peso fijo en el extremo del seguidor sube y baja. El resorte mantiene el contacto entre el rodillo y la leva. Diseñe una compactadora vibratoria que pueda aplicar una fuerza de 200 lb a una frecuencia de 50 Hz.

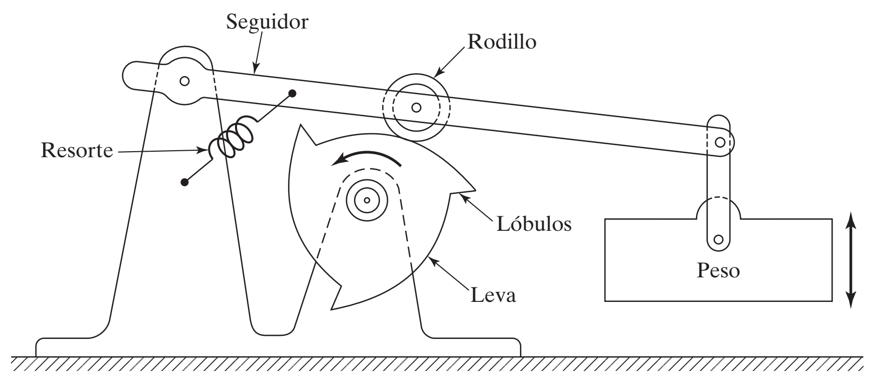


Figura 1.123 Compactadora vibratoria.

1.127*Los cucharones alimentadores vibratorios tienen un amplio uso en procesos automáticos con un alto volumen de partes idénticas que se tienen que orientar y suministrar a una velocidad constante para un trabajado adicional [1.45, 1.46]. Básicamente, un cucharón alimentador vibratorio está separado de la base por un conjunto de miembros elásticos inclinados (resortes), como se muestra en la figura 1.124. Una bobina electromagnética montada entre el cucharón y la base proporciona la fuerza motriz al cucharón. El movimiento vibratorio del cucharón hace que los componentes se muevan a lo largo del conducto de suministro espiral localizado en el interior del cucharón con un movimiento de sacudida. Las herramientas especiales se fijan en posiciones adecuadas a lo largo del conducto espiral para rechazar las piezas defectuosas o que están fuera de tolerancia, o aquellas que tienen una orientación incorrecta. ¿Qué factores deben considerarse en el diseño de tales cucharones alimentadores vibratorios?

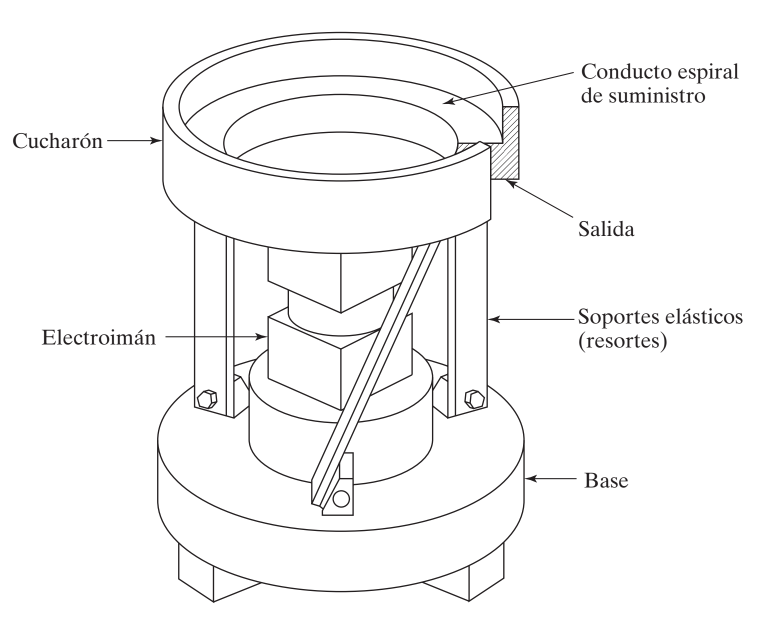


Figura 1.124 Cucharón alimentador vibratorio.

1.128* El intercambiador tubular de calor que se muestra en la figura 1.125(a) se puede modelar como se muestra en la figura 1.125(b) para un análisis de vibración simplificado. Encuentre el área de sección transversal de los tubos de modo que la rigidez total del intercambiador de calor exceda un valor de 200×10^6 N/m en la dirección axial y de 20×10^6 N–m/rad en la dirección tangencial. Suponga que los tubos tienen la misma longitud y sección transversal, y que están equidistantes.

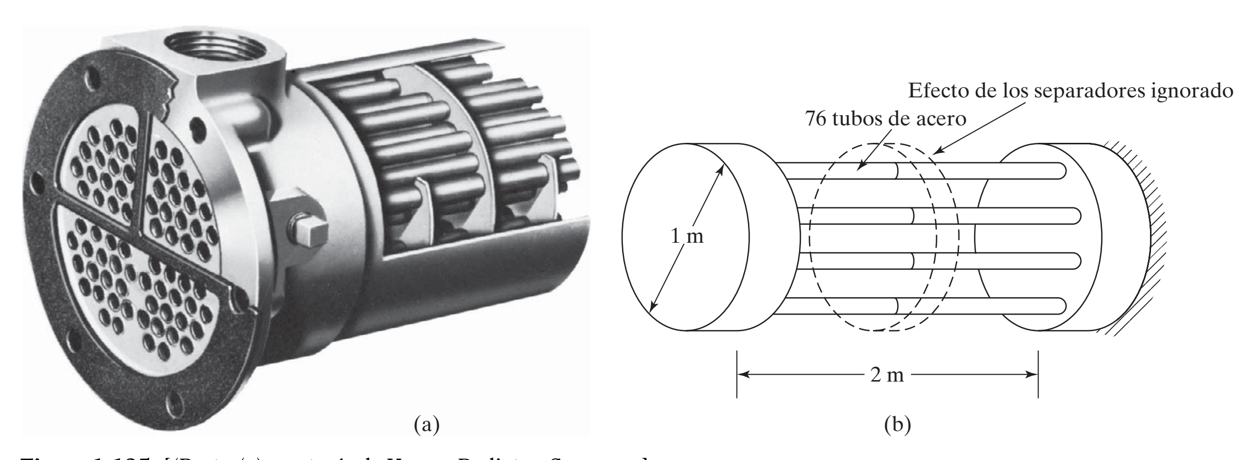


Figura 1.125 [(Parte (a), cortesía de Young Radiator Company].

CAPÍTULO 2

Vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad

Sir Isaac Newton
(1642-1727)

Filósofo naturalista inglés, profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge y presidente de la Royal Society. Su obra *Principia Mathematica* (*Principios de matemáticas*, 1687), la cual trata sobre las leyes y condiciones del movimiento, se considera como el trabajo científico más grande que alguna vez se haya producido. Las definiciones de fuerza, masa y momento, así como sus tres leyes del movimiento surgen continuamente en la dinámica. De manera muy apropiada, la unidad de fuerza llamada "newton" en unidades SI resulta ser el peso aproximado de una manzana promedio, el objeto que al caer le indujo a estudiar las leyes de la gravedad. (Ilustración de David Eugene Smith, *History of Mathematics*, *Vol. 1, General Survey of the History of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1958).

Esquema del capítulo

Este capítulo empieza con una consideración de la vibración libre de un sistema de un solo grado de libertad no amortiguado (resorte y masa). Vibración libre significa que la masa se pone en movimiento debido a una perturbación inicial sin ninguna fuerza aplicada externamente que la fuerza del resorte, la fuerza del amortiguador o la fuerza de la gravedad. Para estudiar la respuesta de vibración libre de la masa tenemos que derivar la ecuación regente, conocida como *ecuación de movimiento*. La ecuación del movimiento del sistema traslacional se obtiene siguiendo cuatro métodos. Se define la frecuencia natural de vibración del sistema, y se presenta la solución de la ecuación de movimiento utilizando las condiciones iniciales apropiadas. Se muestra la solución para representar el movimiento armónico. Se presenta la ecuación de movimiento y la solución correspondiente de la vibración libre de un sistema torsional no amortiguado. Se consideran la respuesta de sistemas de primer orden y la constante de tiempo. El método de Rayleigh, basado en el principio de conservación de la energía, Se presenta con ejemplos ilustrativos.

Luego se considera la derivación de la ecuación para la vibración libre de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado y su solución. Se presentan los conceptos de constante de amortiguamiento crítico, relación de amortiguamiento y frecuencia de vibración amortiguada. Se explican las diferencias entre sistemas subamortiguados, críticamente amortiguados y sobreamortiguados. Se estudian la energía disipada en el amortiguamiento viscoso y los conceptos de amortiguamiento específico y coeficiente de pérdida. Los sistemas torsionales viscosamente amortiguados también se consideran análogos con los sistemas traslacionales viscosamente amortiguados con aplicaciones. Se consideran la representación gráfica de las raíces características y las soluciones correspondientes, así como el concepto de variaciones de parámetro y gráficas del lugar geométrico de las raíces. Se presentan las ecuaciones de movimiento y sus soluciones de sistemas de un solo grado de libertad con amortiguamiento de Coulomb e histerético. También se presenta el concepto de rigidez compleja. La idea de estabilidad y su importancia se explican junto con un ejemplo. La determinación de las respuestas de sistemas de un solo grado de libertad utilizando MATLAB se ilustra con ejemplos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Obtener la ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad por medio de técnicas adecuadas como la segunda ley del movimiento de Newton, el principio de D'Alembert, el principio de desplazamientos virtuales y el principio de conservación de la energía.
- Linealizar la ecuación no lineal de movimiento.
- Resolver un sistema de resorte-masa-amortiguador para diferentes tipos de respuesta de vibración libre según la cantidad de amortiguamiento.
- Calcular la frecuencia natural, la frecuencia amortiguada, el decremento logarítmico y la constante de tiempo.
- Determinar si un sistema es o no estable.
- Encontrar las respuestas de sistemas con amortiguamiento de Coulomb e histerético.
- Encontrar la respuesta de vibración utilizando MATLAB.

2.1 Introducción

Se dice que un sistema experimenta vibración libre cuando oscila sólo debido a una perturbación inicial sin que más adelante actúen fuerzas externas. Algunos ejemplos son las oscilaciones del péndulo del reloj del abuelo, el movimiento oscilatorio vertical percibido por un ciclista después de pasar por un tope y el movimiento de un niño en un columpio después de un empujón inicial.

La figura 2.1(a) muestra un sistema de resorte y masa que representa el sistema vibratorio más simple posible. Se llama *sistema de un solo grado de libertad*, ya que una coordenada (x) es suficiente para especificar la posición de la masa en cualquier momento. No existe ninguna fuerza externa aplicada a la masa, de ahí que el movimiento resultante de una perturbación inicial será una vibración libre.

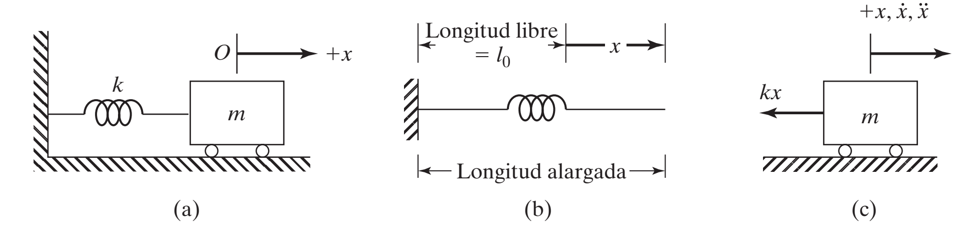


Figura 2.1 Sistema de resorte y masa en posición horizontal.

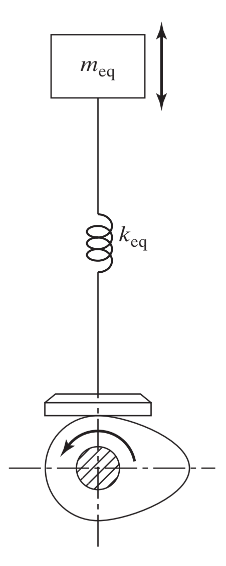


Figura 2.2 Sistema de resorte y masa equivalente del sistema de leva y seguidor de la figura 1.32.

Como no hay elemento alguno que disipe energía durante el movimiento de la masa, la amplitud del movimiento permanece constante con el tiempo; es un sistema *no amortiguado*. En la práctica, excepto en el vacío, la amplitud de vibración libre se reduce gradualmente al paso del tiempo por la resistencia ofrecida por el medio circundante (digamos el aire). Se dice que tales vibraciones son *amortiguadas*. El estudio de la vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad no amortiguados y amortiguados es fundamental para entender temas de vibración más avanzados.

Varios sistemas mecánicos y estructurales se pueden idealizar como sistemas de un solo grado de libertad. En muchos sistemas prácticos, la masa está distribuida, pero para un análisis simple se puede considerar como una sola masa puntual. Asimismo, la elasticidad del sistema, la cual puede estar distribuida por todo el sistema, también se puede idealizar como un solo resorte. Por ejemplo, para el sistema de seguidor y leva que se muestra en el ejemplo 1.39, una masa equivalente (m_{eq}) reemplazó a las varias masas en el ejemplo 1.7. Los elementos del sistema seguidor (varilla de empuje, balancín, válvula y resorte de válvula) son elásticos pero pueden reducirse a un resorte equivalente único de rigidez k_{eq}. Para un análisis simple, el sistema leva-seguidor puede idealizarse por lo tanto como un sistema de resorte-masa de un solo grado de libertad, como se muestra en la figura 2.2.

Del mismo modo, la estructura que se muestra en la figura 2.3 puede considerarse como una viga en voladizo empotrada en el suelo. Para estudiar la vibración transversal, la masa de la parte superior se puede considerar como una masa puntual y la estructura de soporte (viga) se puede representar como un resorte para obtener el modelo de un solo grado de libertad que se ve en la figura 2.4. La estructura del edificio de la figura 2.5(a) también puede idealizarse como un sistema de resorte-masa, como se muestra en la figura 2.5(b). En este caso, como la constante de resorte k es simplemente la relación de fuerza a deflexión, se puede determinar a partir de las propiedades geométricas y materiales de las columnas. La masa del sistema idealizado es igual a la del piso si suponemos que la masa de las columnas es insignificante.

Figura 2.3 La aguja espacial (estructura).

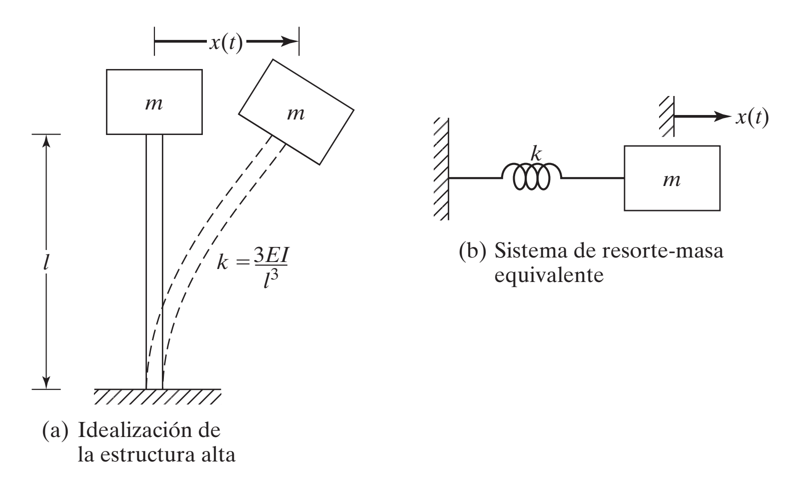


Figura 2.4 Modelado de una estructura alta como un sistema de resorte-masa.

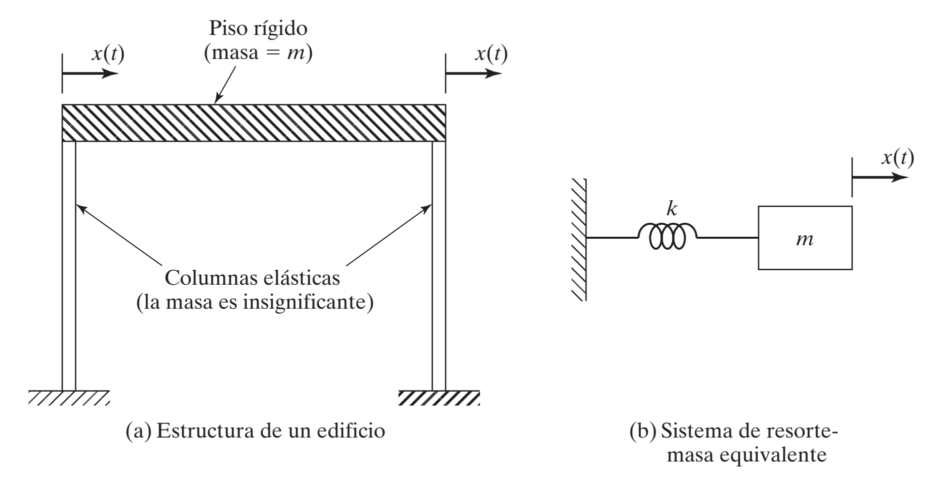


Figura 2.5 Idealización de la estructura de un edificio.

2.2 Vibración libre de un sistema traslacional no amortiguado

2.2.1 Ecuación de movimiento basada en la segunda ley del movimiento de Newton

Utilizando la segunda ley del movimiento de Newton, en esta sección consideraremos la derivación de la ecuación de movimiento. El procedimiento que utilizaremos se resume entonces como sigue:

1. Seleccione una coordenada adecuada para describir la posición de la masa o el cuerpo rígido en el sistema. Utilice una coordenada lineal para describir el movimiento lineal de una masa puntual o el centroide de un cuerpo rígido, y una coordenada angular para describir el movimiento angular de un cuerpo rígido.

2. Determine la configuración de equilibrio estático del sistema y mida el desplazamiento de la masa o el cuerpo rígido con respecto a su posición de equilibrio estático.

3. Trace el diagrama de cuerpo libre de la masa o el cuerpo rígido cuando se le imparten un desplazamiento y velocidad positivos. Indique todas las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre la masa o cuerpo rígido.

4. \Aplique la segunda ley del movimiento de Newton a la masa o cuerpo rígido que presenta el diagrama de cuerpo libre. La segunda ley del movimiento de Newton se puede formular como sigue:

La velocidad de cambio de la cantidad de movimiento (momento) de una masa es igual a la fuerza que actúa en ella.

Por lo tanto, si una masa *m* se desplaza una distancia $\vec{x}(t)$ cuando una fuerza resultante $\vec{F}(t)$ actúa en ella en la misma dirección, la segunda ley del movimiento de Newton da

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right)$$

Si la masa *m* es constante, esta ecuación se reduce a

$$\vec{F}(t) = m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = m\ddot{\vec{x}} \tag{2.1}$$

donde

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

es la aceleración de la masa. La ecuación (2.1) se puede expresar en una frase:

La fuerza resultante que actúa sobre la masa = masa × aceleración

Para un cuerpo rígido sometido a movimiento de rotación, la ley de Newton da

$$\overrightarrow{M}(t) = J\ddot{\vec{\theta}} \tag{2.2}$$

donde $\overrightarrow{M}$ es el momento resultante que actúa en el cuerpo y $\vec{\theta}$ y $\ddot{\vec{\theta}} = d^2\theta(t)/dt^2$ son el desplazamiento angular resultante y la aceleración angular resultantes, respectivamente. La ecuación (2.1) o la (2.2) representan la ecuación del movimiento del sistema vibratorio.

El procedimiento se aplica ahora al sistema de un solo grado de libertad no amortiguado que se muestra en la figura 2.1(a). Aquí la masa está apoyada sobre rodillos libres de fricción y puede trasladarse en la dirección horizontal. Cuando la masa de desplaza una distancia +*x* a partir de su posición de equilibrio, la fuerza en el resorte es *kx*, y el diagrama de cuerpo libre se representa como se muestra en la figura 2.1(c). La aplicación de la ecuación (2.1) a la masa *m* da la ecuación de movimiento

$$F(t) = -kx = m\ddot{x}$$

o

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

2.2.2 Ecuación de movimiento utilizando otros métodos

Como se manifestó en la sección 1.6, las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio se pueden derivar mediante varios métodos. En esta sección se consideran las aplicaciones del principio de D'Alembert, el principio de desplazamientos virtuales y el principio de conservación de la energía.

Principio de D'Alembert. Las ecuaciones de movimiento, (2.1) y (2.2), se pueden volver a escribir como

$$\vec{F}(t) - m\ddot{\vec{x}} = 0 \tag{2.4a}$$

$$\vec{M}(t) - J\ddot{\vec{\theta}} = 0 \tag{2.4b}$$

Estas ecuaciones pueden considerarse como ecuaciones de equilibrio siempre que $-m\ddot{\vec{x}}$ y $-J\ddot{\vec{\theta}}$ se traten como una fuerza y un momento. Esta fuerza ficticia (o momento) se conoce como fuerza de inercia (o momento de inercia) y el estado artificial de equilibrio implicado por la ecuación (2.4a) o la (2.4b) se conoce como equilibrio dinámico. Este principio, implicado en la ecuación (2.4a) o la (2.4b), se conoce como principio de D'Alembert. Aplicándolo al sistema de la figura 2.1(c) se obtiene la ecuación de movimiento:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

Principio de desplazamientos virtuales. El principio de desplazamientos virtuales establece que "si un sistema que está en equilibrio por la acción de un conjunto de fuerzas se somete a un desplazamiento virtual, entonces el trabajo virtual total realizado por la fuerza será cero". En este caso el desplazamiento virtual se define como un desplazamiento infinitesimal imaginario instantáneo. Debe ser un desplazamiento físicamente posible compatible con las restricciones del sistema. El trabajo virtual se define como el realizado por todas las fuerzas, incluidas las de inercia en un problema dinámico, producidas por un desplazamiento virtual.

Consideremos un sistema de resorte-masa en una posición desplazada como se muestra en la figura 2.6(a), donde x simboliza el desplazamiento de la masa. La figura 2.6(b) muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa con las fuerzas reactiva y de inercia indicadas. Cuando la masa experimenta un desplazamiento virtual δx, como se muestra en la figura 2.6(b), el trabajo virtual realizado por cada fuerza se calcula como sigue:

$$\text{Trabajo virtual realizado por la fuerza del resorte} = \delta W_s = -(kx)\delta x$$

$$\text{Trabajo virtual realizado por la fuerza de inercia} = \delta W_i = -(m\ddot{x})\,\delta x$$

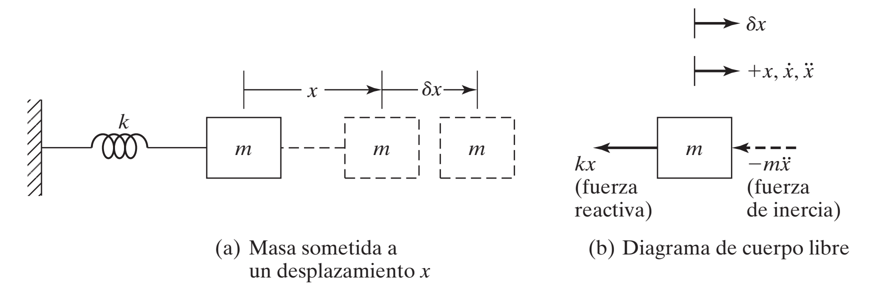


Figura 2.6 Masa sometida a un desplazamiento virtual.

Cuando el trabajo virtual total realizado por todas las fuerzas se hace igual a cero, obtenemos

$$-m\ddot{x}\delta x - kx\,\delta x = 0 \tag{2.5}$$

Como el desplazamiento virtual puede tener un valor arbitrario, $\delta x = 0$, la ecuación (2.5) da la ecuación de movimiento del sistema de resorte-masa como

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

Principio de conservación de la energía. Se dice que un sistema es conservador si no se pierde energía debido a fricción o a miembros no elásticos que disipan energía. Si otras fuerzas externas no realizan trabajo en un sistema conservador (aparte de la gravedad u otras fuerzas potenciales), entonces la energía total del sistema permanece constante. Como la energía de un sistema vibratorio es parcialmente potencial y parcialmente cinética, la suma de estas dos energías permanece constante. La energía cinética T se almacena en la masa por efecto de su velocidad y la energía potencial U se almacena en el resorte a causa de su deformación elástica. Por lo tanto el principio de conservación de energía se expresa como:

$$T + U = \text{constante}$$

o

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \tag{2.6}$$

Las energías cinética y potencial resultan de

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2.7}$$

y

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{2.8}$$

La sustitución de las ecuaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación (2.6) da por resultado la ecuación deseada

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

2.2.3 Ecuación del movimiento de un sistema de resorte-masa en posición vertical

Consideremos la configuración del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 2.7(a). La masa cuelga en el extremo inferior del resorte, el cual a su vez está fijo por su extremo superior a un soporte rígido. En reposo, la masa colgará en una posición llamada *posición de equilibrio estático*, en la cual la fuerza del resorte dirigida hacia arriba balancea con exactitud la fuerza de gravedad dirigida hacia abajo que actúa en la masa. En esta posición la longitud del resorte es $l_0 + \delta_{est}$, donde δ_{est} es la deflexión estática, el alargamiento producido por el peso de la masa m. En la figura 2.7(a), vemos que, para equilibrio estático,

$$W = mg = k\delta_{est} \tag{2.9}$$

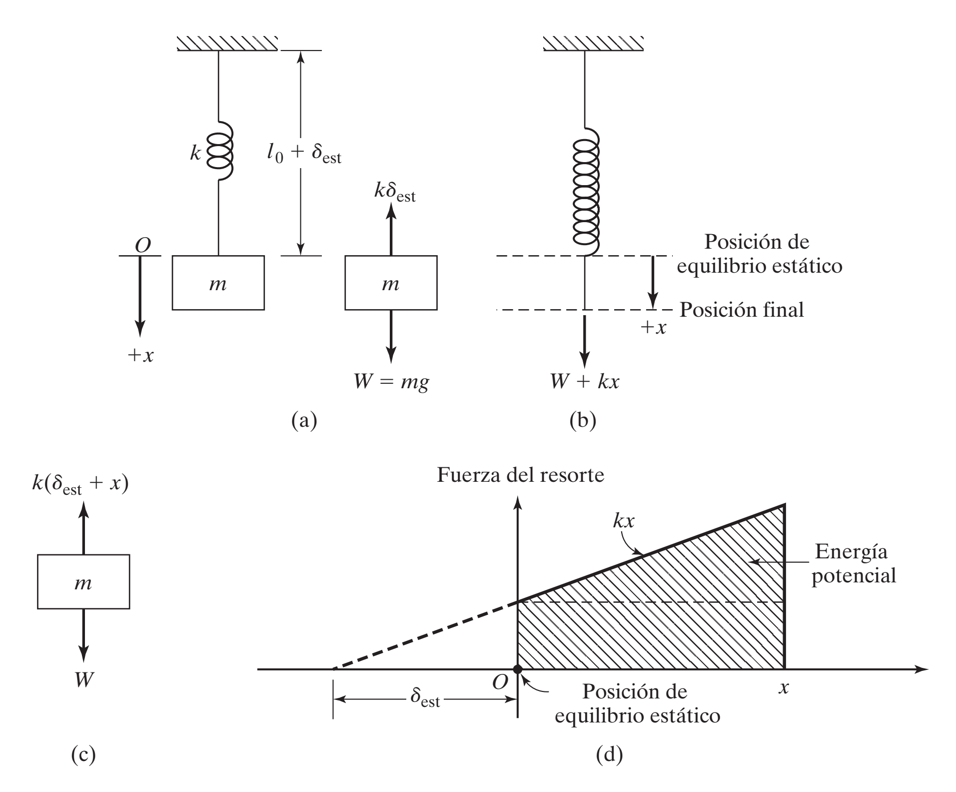


Figura 2.7 Un sistema de resorte-masa en posición vertical.

donde g es la aceleración de la gravedad. Si la masa se deflexiona una distancia $+x$ con respecto a su posición de equilibrio estático, entonces la fuerza del resorte es $-k(x + \delta_{est})$, como se muestra en la figura 2.7(c). La aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton a la masa m da

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{est}) + W$$

y como $k\delta_{est} = W$, obtenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.10}$$

Vemos que las ecuaciones (2.3) y (2.10) son idénticas. Esto indica que cuando una masa se mueve en dirección vertical, podemos ignorar su peso, siempre que midamos x a partir de su posición de equilibrio estático.

Nota: La ecuación (2.10), la ecuación de movimiento del sistema que se muestra en la figura 2.7, también puede derivarse aplicando el principio de D'Alembert, el principio de desplazamientos virtuales, o bien el principio de conservación de la energía. Si utilizamos el último, por ejemplo, notamos que la expresión para la energía cinética, T, permanece igual que la ecuación (2.7). Sin embargo, la expresión para la energía potencial, U, se tiene que derivar al considerar el peso de la masa. Por eso observamos que la fuerza del resorte en la posición de equilibrio estático ($x = 0$) es mg. Cuando el resorte se deforma una cantidad x, su energía potencial es (vea la figura 2.7(d)):

$$mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Además, la energía potencial del sistema debido al cambio de elevación de la masa (observemos que $+x$ está dirigida hacia abajo) es $-mgx$. Por lo tanto la energía potencial neta del sistema respecto de la posición de equilibrio estático es

$$U = \text{energía potencial del resorte}$$

$$+ \text{ cambio de la energía potencial debido al cambio de elevación de la masa } m$$

$$= mgx + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

Como las expresiones de T y U no cambian, la aplicación del principio de conservación de la energía da la misma ecuación de movimiento, ecuación (2.3).

2.2.4 Solución

La solución de la ecuación (2.3) se obtiene suponiendo que

$$x(t) = Ce^{st} \tag{2.11}$$

donde C y s son constantes que deben determinarse. La sustitución de la ecuación (2.11) en la ecuación (2.3) da por resultado

$$C(ms^2 + k) = 0$$

Puesto que C no puede ser cero, tenemos

$$ms^2 + k = 0 \tag{2.12}$$

y por consiguiente

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \pm i\omega_n \tag{2.13}$$

donde $i = (-1)^{1/2}$ y

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

La ecuación (2.12) se conoce como ecuación *auxiliar* o *característica* correspondiente a la ecuación diferencial (2.3). Los dos valores de s dados por la ecuación (2.13) son las raíces de la ecuación característica, también conocidas como *valores eigen* o *valores característicos* del problema. Como ambos valores de s satisfacen la ecuación (2.12), la solución general de la ecuación (2.3) puede expresarse como

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \tag{2.15}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Utilizando identidades

$$e^{\pm i\alpha t} = \cos \alpha t \pm i \operatorname{sen} \alpha t$$

La ecuación (2.15) se puede volver a escribir como

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t \tag{2.16}$$

donde A_1 y A_2 son constantes nuevas. Las constantes C_1 y C_2 o A_1 y A_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales del sistema. Se tienen que especificar dos condiciones para evaluar estas constantes de forma única. Observemos que el número de condiciones que se tiene que especificar es igual al orden de ecuación diferencial regente. En este caso, si los valores de desplazamiento $x(t)$ y velocidad $\dot{x}(t) = (dx/dt)(t)$ se especifican como x_0 y $\dot{x}_0$ en $t = 0$, tenemos, de acuerdo con la ecuación (2.16),

$$\begin{aligned} x(t = 0) &= A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t = 0) &= \omega_n A_2 = \dot{x}_0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por consiguiente, $A_1 = x_0$ y $A_2 = \dot{x}_0/\omega_n$. Por lo tanto la solución de la ecuación (2.3) sujeta a las condiciones iniciales de la ecuación (2.17) está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{2.18}$$

2.2.5 Movimiento armónico

Las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.18) son funciones de tiempo armónicas. El movimiento es simétrico con respecto a la posición de equilibrio de la masa m. La velocidad es un máximo y la aceleración es cero cada vez que la masa pasa por esta posición. En los desplazamientos extremos, la velocidad es cero y la aceleración es un máximo. Como esto representa movimiento armónico simple (vea la sección 1.10), el sistema de resorte-masa se conoce como *oscilador armónico*. La cantidad ω_n dada por la ecuación (2.14) representa la frecuencia natural de vibración del sistema.

La ecuación (2.16) se puede expresar en una forma diferente si introducimos la notación

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \phi \\ A_2 &= A \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde A y ϕ son las constantes nuevas, las cuales se pueden expresar en función de A_1 y A_2 como

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \text{amplitud}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1} \right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right) = \text{ángulo de fase} \tag{2.20}$$

Si introducimos la ecuación (2.19) en la ecuación (2.16), la solución puede escribirse como

$$x(t) = A \cos (\omega_n t - \phi) \tag{2.21}$$

Utilizando las relaciones

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 \operatorname{sen} \phi_0 \\ A_2 &= A_0 \cos \phi_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

La ecuación (2.16) también puede expresarse como

$$x(t) = A_0 \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi_0) \tag{2.23}$$

donde

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{2.24}$$

y

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right) \tag{2.25}$$

La naturaleza de la oscilación armónica se puede representar gráficamente como en la figura 2.8(a). Si $\vec{A}$ implica un vector de magnitud A, el cual forma un ángulo $\omega_n t - \phi$ con respecto al eje vertical (x), entonces se ve que la solución, la ecuación (2.21), es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje x. Las constantes A_1 y A_2 de la ecuación (2.16), dadas por la ecuación (2.19), son simplemente los componentes rectangulares de $\vec{A}$ a lo largo de dos ejes ortogonales que forman los ángulos ϕ y $-(\frac{\pi}{2} - \phi)$ con respecto al vector A. Como el ángulo $\omega_n t - \phi$ es una función lineal de tiempo, se incrementa linealmente con el tiempo; por lo tanto todo el diagrama gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una velocidad angular ω_n. A medida que gira el diagrama (figura 2.8a), la proyección de $\vec{A}$

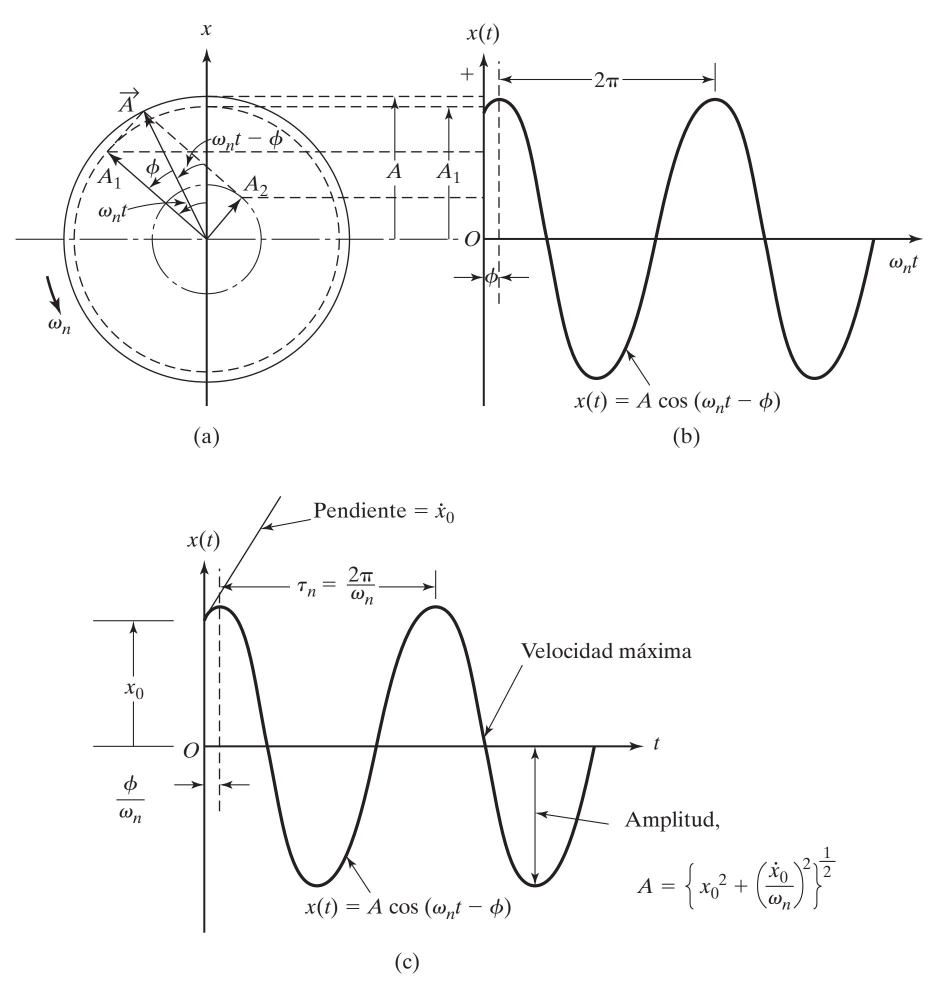


Figura 2.8 Representación gráfica del movimiento de un oscilador armónico.

sobre el eje x varía armónicamente de modo que el movimiento se repite cada vez que el vector $\vec{A}$ describe un ángulo de 2π. La proyección de $\vec{A}$, es decir $x(t)$, se muestra en la figura 2.8(b) como una función de $\omega_n t$, y como una función de t en la figura 2.8(c). El ángulo de fase ϕ también puede interpretarse como el ángulo entre el origen y el primer pico.

Observemos los siguientes aspectos del sistema de resorte-masa.

1. Si el sistema de resorte-masa está en una posición vertical, como se muestra en la figura 2.7(a), la frecuencia circular natural puede expresarse como

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{2.26}$$

La constante de resorte k puede expresarse en función de la masa m de acuerdo con la ecuación (2.9) como

$$k = \frac{W}{\delta_{\text{est}}} = \frac{mg}{\delta_{\text{est}}} \tag{2.27}$$

La sustitución de la ecuación (2.27) en la ecuación (2.14) da

$$\omega_n = \left(\frac{g}{\delta_{\text{est}}}\right)^{1/2} \tag{2.28}$$

De aquí que la frecuencia natural en ciclos por segundo y el periodo natural los den

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{g}{\delta_{\text{est}}}\right)^{1/2} \tag{2.29}$$

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi\left(\frac{\delta_{\text{est}}}{g}\right)^{1/2} \tag{2.30}$$

Por lo tanto, cuando la masa vibra en una dirección vertical, podemos calcular la frecuencia natural y el periodo de vibración con sólo medir la deflexión estática δ_{est}. No tenemos que conocer la rigidez k del resorte ni la masa m.

2. Según la ecuación (2.21) la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$ de la masa m en el instante t puede obtenerse como

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = -\omega_n A \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi) = \omega_n A \cos\left(\omega_n t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi) = \omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi + \pi) \tag{2.31}$$

La ecuación (2.31) muestra que la velocidad se adelanta un ángulo $\pi/2$ al desplazamiento y que la aceleración se adelanta un ángulo π al desplazamiento.

3. Si el desplazamiento inicial (x_0) es cero, la ecuación (2.21) se vuelve

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\cos\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\operatorname{sen}\omega_n t \tag{2.32}$$

Sin embargo, si la velocidad inicial ($\dot{x}_0$) es cero, la solución es

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t \tag{2.33}$$

4. La respuesta de un sistema de un solo grado de libertad se puede representar en el plano de desplazamiento (x)-velocidad, conocido como espacio de estado o plano de fase. Para esto consideramos el desplazamiento dado por la ecuación (2.21) y la velocidad correspondiente:

$$x(t) = A \cos (\omega_n t - \phi)$$

o

$$\cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x}{A}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \operatorname{sen} (\omega_n t - \phi) \tag{2.34}$$

o

$$\operatorname{sen}(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}}{A\omega_n} = -\frac{y}{A} \tag{2.35}$$

donde $y = \dot{x}/\omega_n$. Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (2.34) y (2.35), obtenemos

$$\cos^2(\omega_n t - \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega_n t - \phi) = 1$$

o

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \tag{2.36}$$

La gráfica de la ecuación (2.36) en el plano (x, y) es un círculo, como se muestra en la figura 2.9a, y constituye la representación en el plano de fase o espacio de estado del sistema no amortiguado. El radio del círculo, A, se determina a partir de las condiciones iniciales de movimiento. Observemos que la gráfica de la ecuación (2.36) en el plano (x, $\dot{x}$) será una elipse, como se muestra en la figura 2.9(b).

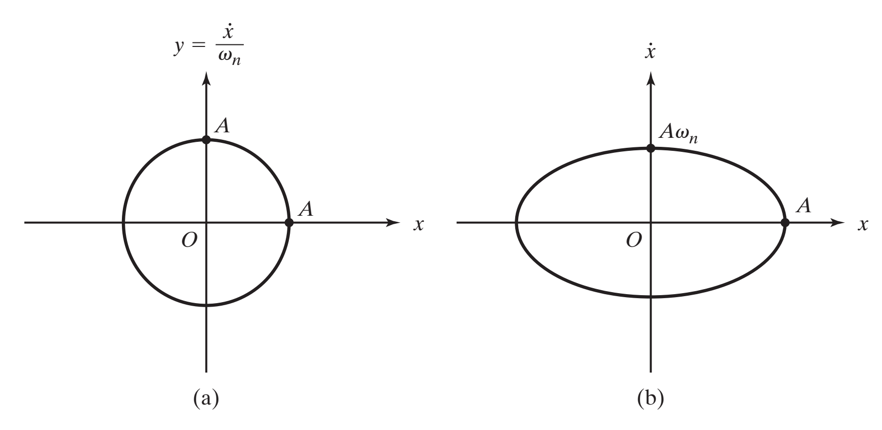


Figura 2.9 Representación del plano de fase de un sistema no amortiguado.

Ejemplo 2.1 Respuesta armónica de un tanque de agua

La columna del tanque de agua que se muestra en la figura 2.10(a) tiene 300 pies de altura y es de concreto reforzado con una sección transversal tubular de 8 pies de diámetro interno y de 10 pies de diámetro externo. El tanque pesa 6×10^5 lb cuando está lleno de agua. Ignorando la masa de la columna y suponiendo el módulo de Young del concreto reforzado como 4×10^6 lb/pulg^2, determine lo siguiente:

a. La frecuencia natural y el periodo natural de la vibración transversal del tanque de agua.
b. La respuesta de vibración del tanque de agua debido a un desplazamiento transversal inicial de 10 pulg.
c. Los valores máximos de la velocidad y aceleración experimentadas por el tanque de agua.

Solución: Suponiendo que el tanque de agua es una masa puntual, que la columna tiene una sección transversal uniforme, y que la masa de la columna es insignificante, el sistema puede modelarse como una viga en voladizo con una carga concentrada (peso) en el extremo libre como se muestra en la figura 2.10(b).

a. La deflexión transversal de la viga, δ, producida por una carga P está dada por $\frac{Pl^3}{3EI}$, donde l es la longitud, E es el módulo de Young, e I es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga. La rigidez de la viga (columna del tanque) está dada por

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

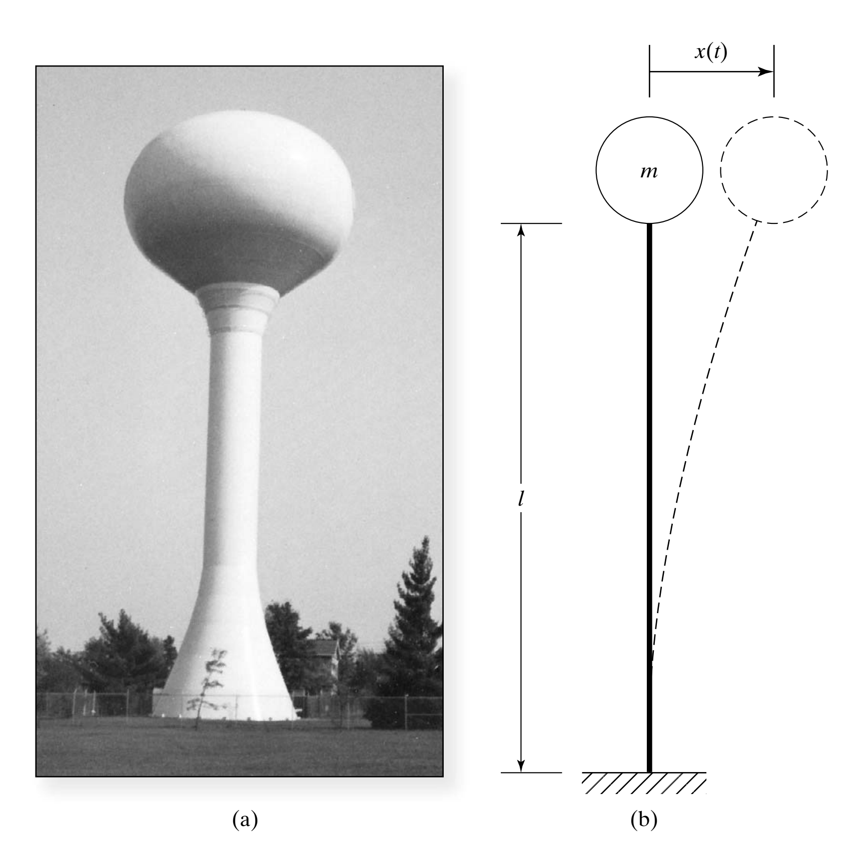


Figura 2.10 Tanque elevado. (Fotografía cortesía de West Lafayette Water Company).

En este caso, $l = 3600$ pulg, $E = 4 \times 10^6$ lb/pulg^2

$$I = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}(120^4 - 96^4) = 600.9554 \times 10^4 \text{ pulg}^4$$

y por consiguiente

$$k = \frac{3(4 \times 10^6)(600.9554 \times 10^4)}{3600^3} = 1545.6672 \text{ lb/pulg}$$

la frecuencia natural del tanque de agua en la dirección transversal está dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1545.6672 \times 386.4}{6 \times 10^5}} = 0.9977 \text{ rad/s}$$

El periodo natural de la vibración transversal del tanque está dado por

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{0.9977} = 6.2977 \text{ sec}$$

b. Utilizando el desplazamiento inicial de $x_0 = 10$ pulg y la velocidad inicial del tanque de agua ($\dot{x}_0$) como cero, la respuesta armónica del tanque de agua puede expresarse, utilizando la ecuación (2.23), como

$$x(t) = A_0 \text{ sen } (\omega_n t + \phi_0)$$

donde la amplitud del desplazamiento transversal (A_0) está dado por

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = x_0 = 10 \text{ pulg}$$

y el ángulo de fase (ϕ_0) por

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto

$$x(t) = 10 \text{ sen}\left(0.9977t + \frac{\pi}{2} \right) = 10 \cos 0.9977t \text{ pulg} \tag{E.1}$$

c. La velocidad del tanque de agua se determina diferenciando la ecuación (E.1) como

$$\dot{x}(t) = 10(0.9977) \cos\left(0.9977t + \frac{\pi}{2} \right) \tag{E.2}$$

y por consiguiente

$$\dot{x}_{\text{máx}} = A_0 \omega_n = 10(0.9977) = 9.977 \text{ pulg/s}$$

La aceleración del tanque de agua se determina diferenciando la ecuación (E.2) como

$$\ddot{x}(t) = -10(0.9977)^2 \text{ sen}\left(0.9977t + \frac{\pi}{2} \right) \tag{E.3}$$

y por consiguiente el valor máximo de la aceleración está dado por

$$\ddot{x}_{\text{máx}} = A_0(\omega_n)^2 = 10(0.9977)^2 = 9.9540 \text{ pulg/s}^2$$

■

Ejemplo 2.2 Respuesta de vibración libre debido a impacto

Una viga en voladizo soporta una masa M en el extremo libre como se muestra en la figura 2.11(a). Una masa m cae desde una altura h sobre la masa M y se adhiere a ella sin rebotar. Determine la vibración transversal resultante de la viga.

Solución: Cuando la masa m caiga desde una altura h, chocará con la masa M a una velocidad de $v_m = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración por la gravedad. Como la masa m se adhiere a M sin rebotar, la velocidad de la masa combinada $(M + m)$ inmediatamente después del impacto ($\dot{x}_0$) se puede hallar aplicando el principio de conservación de momento:

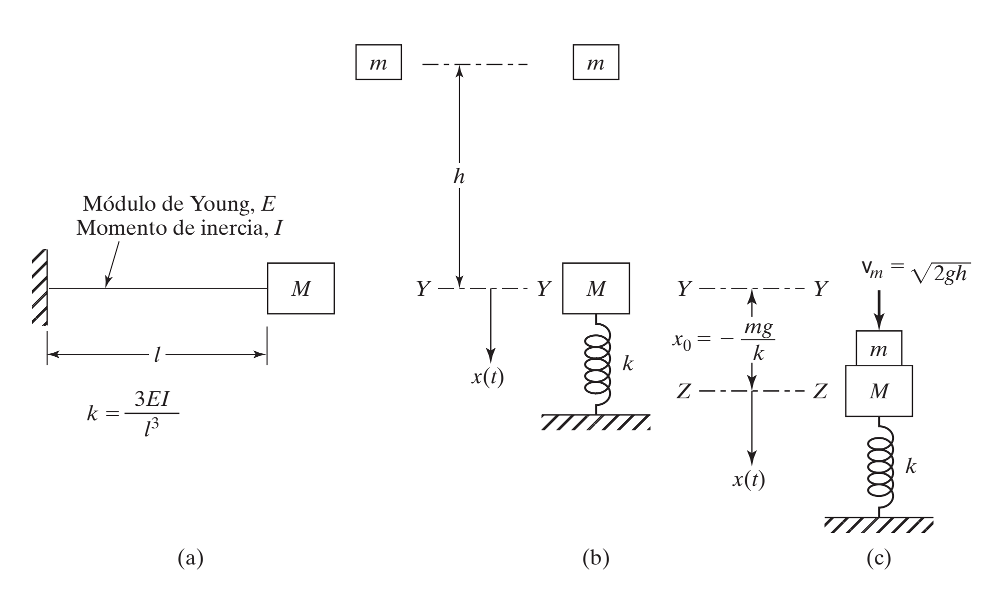
$$mv_m = (M + m)\dot{x}_0$$

o

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m}\right)v_m = \left(\frac{m}{M + m}\right)\sqrt{2gh} \tag{E.1}$$

La posición de equilibrio estático de la viga con la nueva masa $(M + m)$ se encuentra a una distancia de $\frac{mg}{k}$ debajo de la posición de equilibrio estático de la masa original (M) como se muestra en la figura 2.11(c). Aquí k denota la rigidez de la viga en voladizo, dada por

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$



YY = posición de equilibrio estático de M
ZZ = posición de equilibrio estático de $M + m$

Figura 2.11 Respuesta por impacto.

Como la vibración de la viga con la nueva masa ($M + m$) ocurre en torno a su propia posición de equilibrio estático, las condiciones iniciales del problema se pueden formular como

$$x_0 = -\frac{mg}{k}, \qquad \dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m}\right)\sqrt{2gh} \tag{E.2}$$

Por lo tanto, la vibración transversal libre resultante de la viga se puede expresar como (vea la ecuación (2.21)):

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

donde

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(M + m)}}$$

con x_0 y $\dot{x}_0$ dadas por la ecuación (E.2).

■

Ejemplo 2.3 Módulo de Young obtenido con una medición de la frecuencia natural

Se encontró que la frecuencia natural de vibración transversal de una viga de sección transversal cuadrada de 5 mm × 5 mm y longitud de 1 m, simplemente apoyada que soporta una masa de 2.3 kg en su parte media, es de 30 rad/s. Determine el módulo de Young de elasticidad de la viga.

Solución: Ignorando el peso propio de la viga, la frecuencia natural de vibración transversal de la viga se expresa como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.1}$$

donde

$$k = \frac{192EI}{l^3} \tag{E.2}$$

donde E es el módulo de Young, l es la longitud, e I es el momento de inercia de área de la viga:

$$I = \frac{1}{12}(5 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-3})^3 = 0.5208 \times 10^{-10}\ \text{m}^4$$

Como $m = 2.3$ kg, $l = 1.0$ m y $\omega_n = 30.0$ rad/s, las ecuaciones (E.1) y (E.2) dan

$$k = \frac{192EI}{l^3} = m\omega_n^2$$

o

$$E = \frac{m\omega_n^2 l^3}{192I} = \frac{2.3(30.0)^2(1.0)^3}{192(0.5208 \times 10^{-10})} = 207.0132 \times 10^9\ \text{N/m}^2$$

Esto indica que probablemente el material de la viga es acero al carbón.

■

Ejemplo 2.4 Frecuencia natural del cubo de un camión de bomberos

El cubo de un camión de bomberos se encuentra en el extremo de una pluma telescópica, como se muestra en la figura 2.12(a). El cubo, junto con el bombero, pesa 2000 N. Encuentre la frecuencia natural de vibración del cubo en la dirección vertical.

Datos: Módulo de Young del material: $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m^2; longitudes: $l_1 = l_2 = l_3 = 3$ m; áreas de sección transversal: $A_1 = 20$ cm^2, $A_2 = 10$ cm^2; $A_3 = 5$ cm^2.

Solución: Para determinar la frecuencia natural de vibración del sistema, encontramos la rigidez equivalente de la pluma en la dirección vertical y utilizamos una idealización de un sistema de un solo grado de libertad. Para esto asumimos que la masa de la pluma telescópica es insignificante y que la pluma se deforma sólo en la dirección axial (sin deformarse). Como la fuerza inducida en cualquier sección transversal O_1O_2 es igual a la carga axial aplicada en el extremo de la pluma, como se muestra en la figura 2.12(b), la rigidez axial de la pluma (k_b) está dada por

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b_1}} + \frac{1}{k_{b_2}} + \frac{1}{k_{b_3}} \tag{E.1}$$

donde k_{b_i} simboliza la rigidez axial del $i$ésimo segmento de la pluma:

$$k_{b_i} = \frac{A_i E_i}{l_i}; \qquad i = 1, 2, 3 \tag{E.2}$$

Con los datos conocidos ($l_1 = l_2 = l_3 = 3$ m, $A_1 = 20$ cm^2, $A_2 = 10$ cm^2, $A_3 = 5$ cm^2, $E_1 = E_2 = E_3 = 2.1 \times 10^{11}$ N/m^2),

$$k_{b_1} = \frac{(20 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 14 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b_2} = \frac{(10 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_{b_3} = \frac{(5 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 3.5 \times 10^7 \text{ N/m}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.1) da

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{14 \times 10^7} + \frac{1}{7 \times 10^7} + \frac{1}{3.5 \times 10^7} = \frac{1}{2 \times 10^7}$$

o

$$k_b = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$$

La rigidez, k, de la pluma telescópica en la dirección vertical es

$$k = k_b \cos^2 45° = 10^7 \text{ N/m}$$

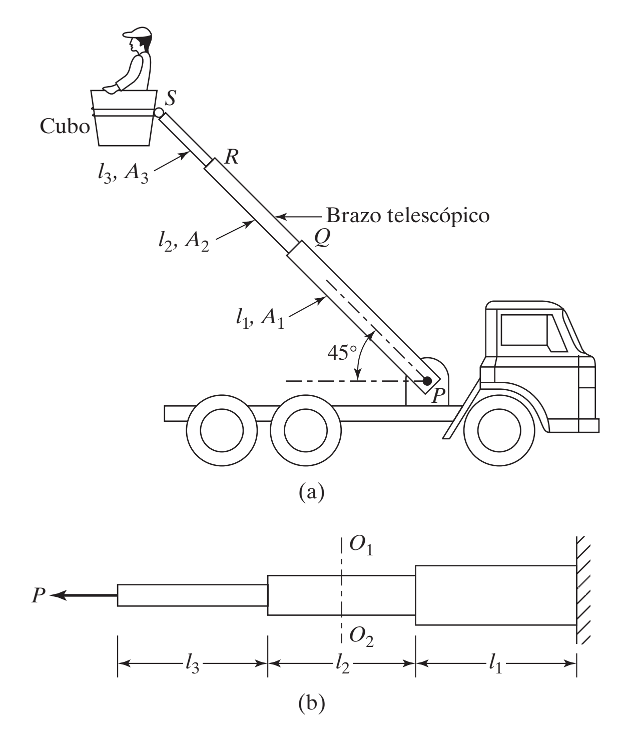


Figura 2.12 Pluma telescópica de un camión de bomberos.

La frecuencia de la vibración natural del cubo en la dirección vertical está dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(10^7)(9.81)}{2000}} = 221.4723 \text{ rad/s}$$

■

Ejemplo 2.5 Frecuencia natural de un sistema de poleas

Determine la frecuencia natural del sistema que se muestra en la figura 2.13(a). Suponga que las poleas no tienen fricción y que su masa es insignificante.

Solución: Para determinar la frecuencia natural encontramos la rigidez equivalente del sistema y lo resolvemos como un problema de un solo grado de libertad. Como no hay fricción en las poleas y su masa es insignificante, la tensión en la cuerda es constante y es igual al peso W de la masa m. Por el equilibrio estático de las poleas y la masa (vea la figura 2.13(b)), se puede ver que la fuerza dirigida hacia arriba que actúa en la polea 1 es $2W$ y que la fuerza dirigida hacia abajo que actúa en la polea 2 es $2W$. El centro de la polea 1 (punto A) sube una distancia $2W/k_1$ y el centro de la polea 2 (punto B) baja una distancia $2W/k_2$. Por lo tanto, el movimiento total de la masa m (punto O) es

$$2\left(\frac{2W}{k_1} + \frac{2W}{k_2}\right)$$

cuando la cuerda a ambos lados de la polea permite que la masa baje. Si k_{eq} denota la constante de resorte equivalente del sistema,

$$\frac{\text{Peso de la masa}}{\text{Constante de resorte equivalente}} = \text{Desplazamiento neto de la masa}$$

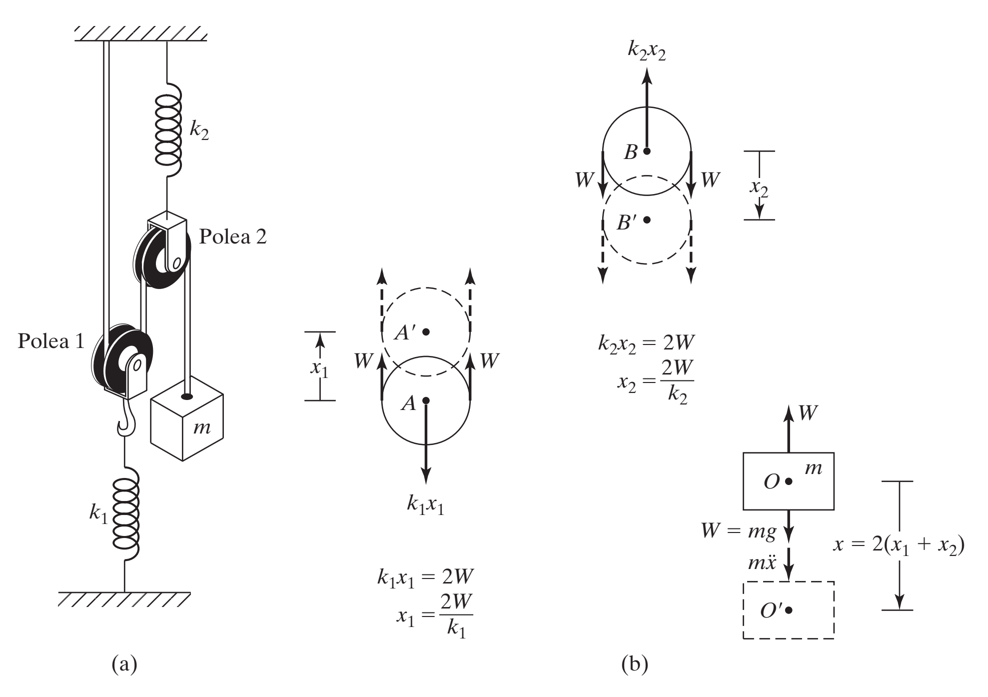


Figura 2.13 Sistema de poleas.

$$\frac{W}{k_{eq}} = 4W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{4W(k_1 + k_2)}{k_1k_2}$$

$$k_{eq} = \frac{k_1k_2}{4(k_1 + k_2)} \tag{E.1}$$

Si la masa m se desplaza una distancia x de la posición de equilibrio estático, la ecuación de movimiento de la masa se escribe como

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0 \tag{E.2}$$

y por consiguiente, la frecuencia natural está dada por

$$\omega_n = \left(\frac{k_{eq}}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{k_1k_2}{4m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{rad/s} \tag{E.3}$$

o

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{ciclos/s} \tag{E.4}$$

■

2.3 Vibración libre de un sistema torsional no amortiguado

Si un cuerpo rígido oscila con respecto a un eje de referencia específico, el movimiento resultante se conoce como *vibración torsional*. En este caso, el desplazamiento del cuerpo se mide en función de una coordenada angular. En un problema de vibración torsional, el momento de restauración puede ser el resultado de la torsión de un miembro elástico o del momento desbalanceado de una fuerza o par.

La figura 2.14 muestra un disco, el cual tiene un momento polar de inercia de masa J_0, montado en un extremo de una flecha circular sólida, el otro extremo del cual está fijo. Sea θ la rotación angular del disco alrededor de la flecha; θ también representa el ángulo de torsión de la flecha. Por la teoría de torsión de flechas circulares [2.1], tenemos la relación

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta \tag{2.37}$$

donde M_t es el par de torsión que produce la torsión θ, G es el módulo de cortante, l es la longitud de la flecha, I_0 es el momento polar de inercia de la sección transversal de la flecha, dado por

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \tag{2.38}$$

y d es el diámetro de la flecha. Si el disco se desplaza un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio, la flecha produce un par de torsión de restauración de magnitud M_t. Por lo tanto, la flecha actúa como un resorte torsional con una constante de resorte torsional

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32l} \tag{2.39}$$

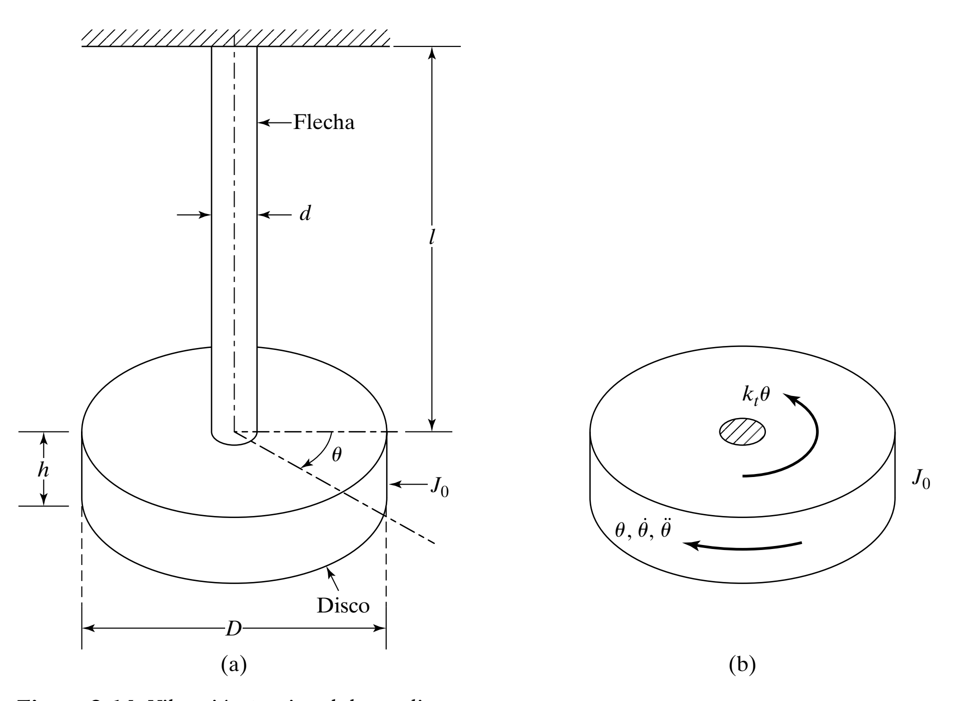


Figura 2.14 Vibración torsional de un disco.

2.3.1 Ecuación de movimiento

La ecuación del movimiento angular del disco alrededor de su eje se deriva aplicando la segunda ley de Newton o cualquiera de los métodos mencionados en la sección 2.2.2. Considerando el diagrama de cuerpo libre del disco (figura 2.14b), podemos derivar la ecuación de movimiento si aplicamos la segunda ley del movimiento de Newton:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \tag{2.40}$$

la cual es idéntica a la ecuación (2.3) si el momento polar de inercia de masa J_0, el desplazamiento angular θ y la constante de resorte torsional k_t, se reemplazan con la masa m, el desplazamiento x y la constante de resorte lineal k, respectivamente. Por lo tanto, la frecuencia circular natural del sistema torsional es

$$\omega_n = \left(\frac{k_t}{J_0}\right)^{1/2} \tag{2.41}$$

y el periodo y frecuencia de vibración en ciclos por segundo son

$$\tau_n = 2\pi \left(\frac{J_0}{k_t}\right)^{1/2} \tag{2.42}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \quad \frac{k_t}{J_0}^{1/2} \tag{2.43}$$

Observemos los siguientes aspectos de este sistema:

1. Si la sección transversal de la flecha que soporta el disco no es circular, se tiene que utilizar una constante de resorte torsional adecuada [2.4, 2.5].

2. El momento polar de inercia de masa de un disco está dado por

$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{W D^2}{8g}$$

donde ρ es la densidad de masa, h es el espesor, D es el diámetro y W es el peso del disco.

3. El sistema torsional de resorte-inercia mostrado en la figura 2.14 se conoce como *péndulo torsional*. Una de las aplicaciones más importantes de un péndulo torsional es un reloj mecánico, donde una rueda de trinquete convierte la oscilación regular de un pequeño péndulo torsional en los movimientos de las manecillas.

2.3.2 Solución

La solución general de la ecuación (2.40) se obtiene, como en el caso de la ecuación (2.3):

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t \tag{2.44}$$

donde la ecuación (2.41) da ω_n y A_1 y A_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales. Si

$$\theta(t = 0) = \theta_0 \quad \text{y} \quad \dot{\theta}(t = 0) = \frac{d\theta}{dt}(t = 0) = \dot{\theta}_0 \tag{2.45}$$

Las constantes A_1 y A_2 se determinan como sigue:

$$A_1 = \theta_0$$
$$A_2 = \dot{\theta}_0 / \omega_n \tag{2.46}$$

Se ve que la ecuación (2.44) también representa un movimiento armónico simple.

Ejemplo 2.6 Frecuencia natural de un péndulo compuesto

Cualquier cuerpo rígido con su pivote en un punto que no es su centro oscilará alrededor del pivote por su propia fuerza de gravedad. Tal sistema se conoce como péndulo compuesto (figura 2.15). Determine la frecuencia natural del sistema.

Solución: Sean O el punto de suspensión y G el centro de masa del péndulo compuesto como se muestra en la figura 2.15. Deje que el cuerpo rígido oscile en el plano xy de modo que se pueda usar la coordenada θ para describir su movimiento. Sea d la distancia entre O y G y J_0 el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto al eje z (perpendicular tanto a x como a y). Con un desplazamiento θ, el par de torsión de restauración (debido al peso del cuerpo W) es (Wd sen θ) y la ecuación de movimiento es

$$J_0\ddot{\theta} + Wd \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{E.1}$$

Observe que la ecuación (E.1) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo grado. Aunque es posible determinar una solución exacta de esta ecuación (vea la seccion 13.3, en inglés, en el sitio Web), las soluciones exactas no se pueden encontrar con la mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales. Una solución aproximada de la ecuación (E.1) se puede encontrar por uno de dos métodos. Se puede utilizar un procedimiento numérico para integrar la ecuación (E.1). Por otra parte, la ecuación (E.1) puede ser aproximada por una ecuación lineal cuya solución exacta es fácil de determinar. Para utilizar el último procedimiento, suponemos desplazamientos angulares pequeños de modo que θ sea pequeño y sen $\theta \approx \theta$. Por consiguiente, la ecuación (E.1) se puede representar de forma aproximada por la ecuación lineal:

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\theta = 0 \tag{E.2}$$

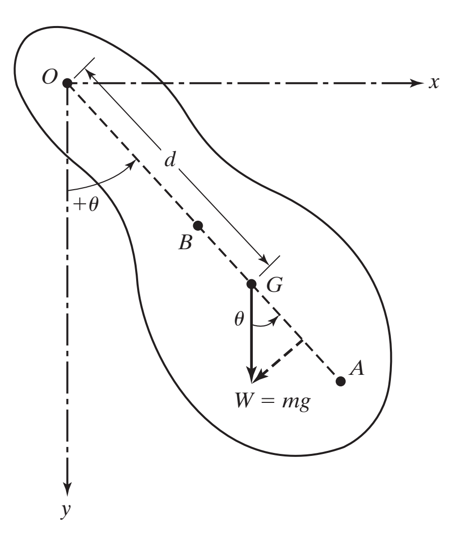


Figura 2.15 Péndulo compuesto.

Esta ecuación da la frecuencia natural del péndulo compuesto:

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{mgd}{J_0}\right)^{1/2} \tag{E.3}$$

Comparando la ecuación (E.3) con la frecuencia natural de un péndulo simple, $\omega_n = (g/l)^{1/2}$ (vea el problema 2.61), podemos determinar la longitud del péndulo simple equivalente:

$$l = \frac{J_0}{md} \tag{E.4}$$

Si mk_0^2 reemplaza a J_0, donde k_0 es el radio de giro del cuerpo alrededor de O, las ecuaciones (E.3) y (E.4) se escriben como

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_0^2}\right)^{1/2} \tag{E.5}$$

$$l = \left(\frac{k_0^2}{d}\right) \tag{E.6}$$

Si k_G indica el radio de giro del cuerpo alrededor de G, tenemos

$$k_0^2 = k_G^2 + d^2 \tag{E.7}$$

y la ecuación (E.6) se escribe como

$$l = \left(\frac{k_G^2}{d} + d\right) \tag{E.8}$$

Si la línea OG se extiende hasta el punto A de modo que

$$GA = \frac{k_G^2}{d} \tag{E.9}$$

La ecuación (E.8) se vuelve

$$l = GA + d = OA \tag{E.10}$$

Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación (E.5), ω_n está dada por

$$\omega_n = \left\{\frac{g}{(k_0^2/d)}\right\}^{1/2} = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{OA}\right)^{1/2} \tag{E.11}$$

Esta ecuación demuestra que no importa si el cuerpo gira alrededor de O o A, su frecuencia natural es la misma. El punto A se conoce como *centro de percusión*.

■

Centro de percusión. Los conceptos de péndulo compuesto y centro de percusión se pueden utilizar en muchas aplicaciones prácticas:

1. Se le puede dar forma a un martillo de modo que el centro de percusión quede en la cabeza y el centro de rotación en el mango. En este caso, la fuerza de impacto en la cabeza del martillo no provocará ninguna reacción normal en el mango (figura 2.16(a)).

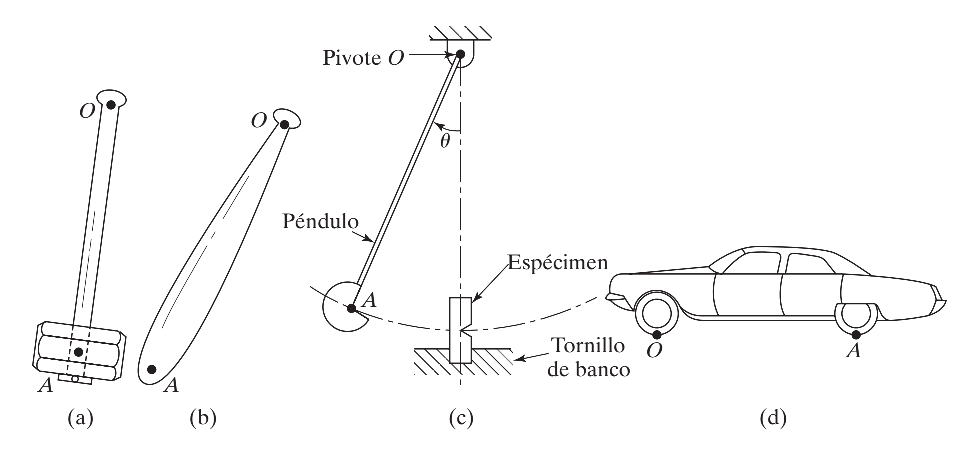


Figura 2.16 Aplicaciones del centro de percusión.

2. En un bate de béisbol, si por un lado se hace que la pelota choque en el centro de percusión mientras que el centro de rotación está en las manos, el bateador no experimentará ninguna reacción perpendicular al bate (figura 2.16(b)). Pero si por otro lado la pelota choca con el bat cerca del extremo o cerca de las manos, el bateador experimentará dolor en las manos debido a la reacción perpendicular al bate.
3. En la prueba Izod (impacto) de materiales, el espécimen se inserta en un tornillo de banco fijo en la base de la máquina (vea la figura 2.16(c)). Se libera un péndulo desde una altura estándar, y el péndulo al pasar por su posición más baja golpea el extremo libre del espécimen. La deformación y flexión del péndulo se pueden reducir si el centro de percusión se localiza cerca del borde de golpeo. En este caso, el pivote se libera de cualquier reacción impulsiva.
4. En un automóvil (mostrado en la figura 2.16(d)), si las ruedas delanteras golpean un tope, los pasajeros no sentirán ninguna reacción si el centro de percusión del vehículo se localiza cerca del eje trasero. Asimismo, si las ruedas traseras golpean un tope en el punto A, no se sentirá ninguna reacción en el eje delantero (punto O) si el centro de percusión se localiza cerca del eje delantero. Lo deseable, por consiguiente, es tener el centro de oscilación del vehículo en un eje y el centro de percusión en el otro eje [2.2].

2.4 Respuesta de sistemas de primer orden y constante de tiempo

Consideremos un rotor de turbina montado sobre cojinetes como se muestra en la figura 2.17(a). El fluido viscoso (lubricante) en los cojinetes produce un par de torsión de amortiguamiento viscoso durante la rotación del rotor de la turbina. Suponiendo que el momento de inercia de masa del rotor con respecto al eje de rotación como J y la constante de amortiguamiento rotacional de los cojinetes como c_t, la aplicación de la segunda ley de movimiento de Newton da la ecuación de movimiento del rotor como

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0 \tag{2.47}$$

donde ω es la velocidad angular del rotor, $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ es la velocidad de cambio de la velocidad angular, y se supone que el par de torsión externo aplicado al sistema es cero. Suponemos la velocidad angular inicial, $\omega(t = 0) = \omega_0$ como la entrada y la velocidad angular del rotor como la salida del sistema. Observemos que se considera la velocidad angular, en lugar del desplazamiento angular, como la salida para obtener la ecuación de movimiento como una ecuación diferencial de primer grado.

La solución de la ecuación de movimiento del rotor, la ecuación (2.47), se encuentra al considerar las solución de prueba como

$$\omega(t) = Ae^{est} \tag{2.48}$$

donde A y s son constantes desconocidas. Utilizando las condiciones iniciales, $\omega(t = 0) = \omega_0$, la ecuación (2.48) se escribe como

$$\omega(t) = \omega_0 e^{est} \tag{2.49}$$

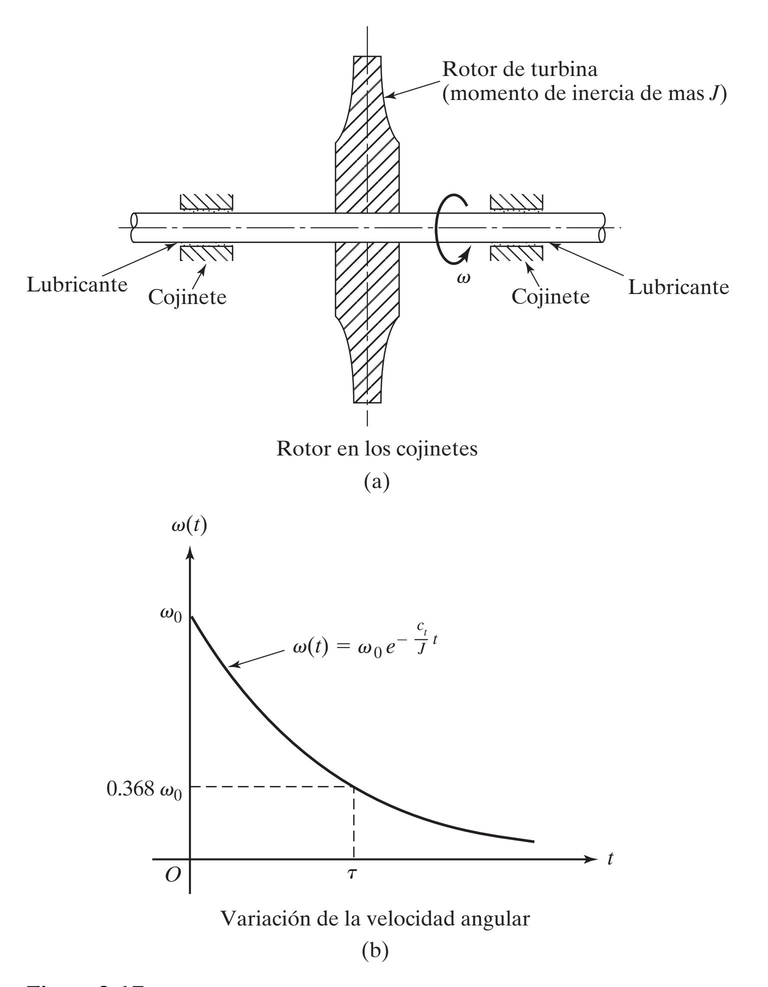


Figura 2.17

Si sustituimos la ecuación (2.49) en la ecuación (2.47), obtenemos

$$\omega_0 e^{est}(Js + c_t) = 0 \tag{2.50}$$

Como $\omega_0 = 0$ no hace que se "mueva" el rotor, suponemos que $\omega_0 \neq 0$ y la ecuación se satisface sólo si

$$Js + c_t = 0 \tag{2.51}$$

La ecuación (2.51) se conoce como ecuación característica de la cual reulta $s = -\frac{c_t}{J}$. Por lo tanto la solución, ecuación (2.49), se escribe como

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}t} \tag{2.52}$$

La variación de la velocidad angular, dada por la ecuación (2.52), con el tiempo se muestra en la figura 2.17(b). La curva se inicia en ω_0, mengua y tiende a cero a medida que t se incrementa sin límite. Cuando se manejan respuestas exponencialmente menguantes, como las dadas por la ecuación (2.52), es conveniente describir la respuesta en función de una cantidad conocida como *constante de tiempo* (τ). La constante de tiempo se define como el valor de tiempo que hace el exponente en la ecuación (2.52) igual a –1. Como se sabe que el exponente de la ecuación (2.52) es $-\frac{c_t}{J}t$,la constante de tiempo será igual a

$$\tau = \frac{J}{c_t} \tag{2.53}$$

de modo que, para $t = \tau$, la ecuación (2.52) da,

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}\tau} = \omega_0 e^{-1} = 0.368\omega_0 \tag{2.54}$$

Por lo tanto, la respuesta se reduce a 0.368 veces su valor inicial en un tiempo igual a la constante de tiempo del sistema.

2.5 Método de la energía de Rayleigh

Para un sistema de un solo grado de libertad, la ecuación de movimiento se derivó con el método de energía de la sección 2.2.2. En esta sección lo utilizaremos para determinar las frecuencias naturales de sistemas de un solo grado de libertad. El principio de conservación de la energía, en el contexto de un sistema vibratorio no amortiguado, se puede volver a formular como

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \tag{2.55}$$

donde los subíndices 1 y 2 implican dos instantes de tiempo diferentes. Específicamente, utilizamos el subíndice 1 para indicar el tiempo en que la masa pasa por su posición de equilibrio estático y elegimos $U_1 = 0$ como referencia para la energía potencial. Si el subíndice 2 indica el tiempo correspondiente al desplazamiento máximo de la masa, tenemos $T_2 = 0$. Por consiguiente, la ecuación (2.55) se escribe como

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 \tag{2.56}$$

Si el sistema está experimentando movimiento armónico, entonces T_1 y U_2 indican los valores máximos de T y U, respectivamente, y la ecuación se vuelve

$$T_{\text{máx}} = U_{\text{máx}} \tag{2.57}$$

La aplicación de la ecuación (2.57), conocida también como *método de energía de Rayleigh*, da la frecuencia natural del sistema directamente, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.7 Manómetro de motor diesel

El escape de un motor diesel de cuatro tiempos de un cilindro se tiene que conectar a un silenciador, y la presión en ese lugar se tiene que medir con un manómetro de tubo en U simple (vea la figura 2.18). Calcule la longitud mínima del tubo del manómetro de modo que la frecuencia natural de oscilación de la columna de mercurio sea 3.5 veces más lenta que las frecuencias de las fluctuaciones de presión en el silenciador a una velocidad del motor de 600 rpm. La frecuencia de fluctuación de la presión en el silenciador es igual a

$$\frac{\text{Cantidad de cilindros} \times \text{Velocidad del motor}}{2}$$

Solución:

1. *Frecuencia natural de oscilación de la columna de líquido:* Considere el nivel de referencia mostrado en la figura 2.18 como la posición de equilibrio del líquido. Si x denota el desplazamiento de la columna de líquido a partir de la posición de equilibrio, el cambio de la energía potencial es

U = energía potencial de la columna de líquido expandido + energía potencial de la columna de líquido contraído

= (peso del mercurio expandido × desplazamiento del C.G. del segmento) + (peso del mercurio contraído × desplazamiento del C.G. del segmento)

$$= (Ax\gamma)\frac{x}{2} + (Ax\gamma)\frac{x}{2} = A\gamma x^2 \tag{E.1}$$

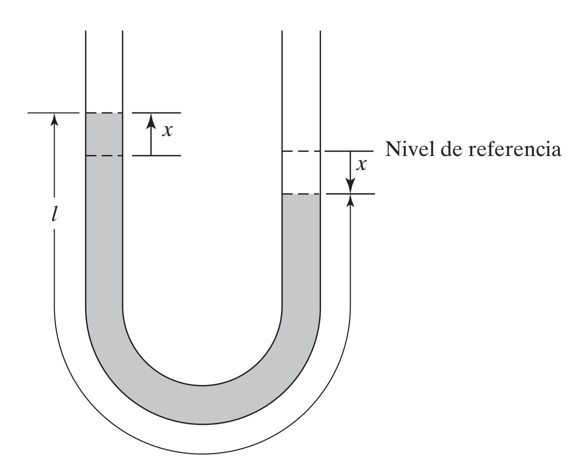


Figura 2.18 Manómetro de tubo en U.

donde A es el área de sección transversal de la columna de mercurio y γ es el peso específico del mercurio. El cambio de la energía cinética está dado por

$$T = \frac{1}{2}(\text{masa de mercurio})(\text{velocidad})^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{Al\gamma}{g}\dot{x}^2 \quad \text{(E.2)}$$

donde l es la longitud de la columna de mercurio. Suponiendo movimiento armónico, podemos escribir

$$x(t) = X \cos \omega_n t \quad \text{(E.3)}$$

donde X es el desplazamiento máximo y ω_n es la frecuencia natural. Si sustituimos la ecuación (E.3) en las ecuaciones (E.1) y (E.2), obtenemos

$$U = U_{\text{máx}} \cos^2 \omega_n t \quad \text{(E.4)}$$
$$T = T_{\text{máx}} \operatorname{sen}^2 \omega_n t \quad \text{(E.5)}$$

donde

$$U_{\text{máx}} = A\gamma X^2 \quad \text{(E.6)}$$

y

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{A\gamma l \omega_n^2}{g} X^2 \quad \text{(E.7)}$$

Igualando $U_{\text{máx}}$ a $T_{\text{máx}}$, obtenemos la frecuencia natural:

$$\omega_n = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} \quad \text{(E.8)}$$

2. *Longitud de la columna de mercurio*: La frecuencia de las fluctuaciones de la presión en el silenciador

$$= \frac{1 \times 600}{2}$$
$$= 300 \text{ rpm}$$
$$= \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\pi \text{ rad/s} \quad \text{(E.9)}$$

Por lo tanto, la frecuencia de las oscilaciones de la columna de líquido en el manómetro es $10\pi/3.5 = 9.0$ rad/s. Aplicando la ecuación (E.8), obtenemos

$$\left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} = 9.0 \quad \text{(E.10)}$$

o

$$l = \frac{2.0 \times 9.81}{(9.0)^2} = 0.243 \text{ m} \quad \text{(E.11)}$$

■

Ejemplo 2.8 Efecto de la masa en ω_n de un resorte

Determine el efecto de la masa del resorte en la frecuencia natural del sistema resorte-masa que se muestra en la figura 2.19.

Solución: Para determinar el efecto de la masa del resorte en la frecuencia natural del sistema resorte-masa, sumamos la energía cinética del sistema a la de la masa adjunta y utilizamos el método de energía para determinar la frecuencia natural. Sea l la longitud total del resorte. Si x indica el desplazamiento del extremo inferior del resorte (o masa m), el desplazamiento a la distancia y del soporte es $y(x/l)$. Asimismo, si $\dot{x}$ denota la velocidad de la masa m, la velocidad de un elemento de resorte situado a una distancia y del soporte es $y(\dot{x}/l)$. La energía cinética del elemento de resorte de longitud dy es

$$dT_s = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{l}dy\right)\left(\frac{y\dot{x}}{l}\right)^2 \tag{E.1}$$

donde m_s es la masa del resorte. La energía cinética total del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} T &= \text{energía cinética de la masa } (T_m) + \text{energía cinética del resorte } (T_s) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_{y=0}^{l} \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{l}dy\right)\left(\frac{y^2\dot{x}^2}{l^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2 \end{aligned} \tag{E.2}$$

La energía potencial total del sistema está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{E.3}$$

Suponiendo un movimiento armónico

$$x(t) = X \cos \omega_n t \tag{E.4}$$

donde X es el desplazamiento máximo de la masa y ω_n es la frecuencia natural, las energías cinética y potencial se expresan como

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_s}{3}\right)X^2\omega_n^2 \tag{E.5}$$

$$U_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kX^2 \tag{E.6}$$

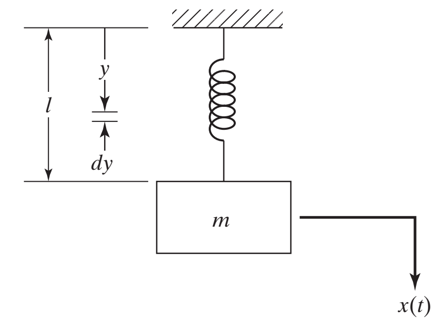


Figura 2.19 Masa equivalente de un resorte.

Igualando $T_{\text{máx}}$ y $U_{\text{máx}}$, obtenemos la expresión para la frecuencia natural:

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}} \right)^{1/2} \tag{E.7}$$

Así se contiene el efecto de la masa del resorte al agregar un tercio de su masa a la masa principal [2.3].

■

Ejemplo 2.9 Efecto de la masa de la columna sobre la frecuencia natural del tanque de agua

Encuentre la frecuencia de vibración transversal del tanque de agua considerado en el ejemplo 2.1 y la figura 2.10 con la masa de la columna incluida.

Solución: Para incluir la masa de la columna, determinamos la masa equivalente de la columna en el extremo libre mediante la equivalencia de energía cinética y utilizamos un modelo de un solo grado de libertad para hallar la frecuencia natural de vibración. La columna del tanque se considera como una viga en voladizo con un extremo empotrado (suelo) y una masa *M* (tanque de agua) en el otro extremo. La deflexión estática de una viga en voladizo producida por una carga concentrada es (vea la figura 2.20):

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{Px^2}{6EI}(3l - x) = \frac{y_{\text{máx}} x^2}{2l^3}(3l - x) \\ &= \frac{y_{\text{máx}}}{2l^3}(3x^2 l - x^3) \end{aligned} \tag{E.1}$$

La energía cinética máxima de la viga ($T_{\text{máx}}$) es

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \{\dot{y}(x)\}^2 \, dx \tag{E.2}$$

donde *m* es la masa total y (*m*/*l*) es la masa por unidad de longitud de la viga. Se puede utilizar la ecuación (E.1) para expresar la variación de la velocidad $\dot{y}(x)$, como

$$\dot{y}(x) = \frac{\dot{y}_{\text{máx}}}{2l^3}(3x^2 l - x^3) \tag{E.3}$$

y por consiguiente la ecuación (E.2) se escribe como

$$\begin{aligned} T_{\text{máx}} &= \frac{m}{2l} \left(\frac{\dot{y}_{\text{máx}}}{2l^3} \right)^2 \int_0^l (3x^2 l - x^3)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} \frac{\dot{y}^2_{\text{máx}}}{4l^6} \left(\frac{33}{35} l^7 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{33}{140} m \right) \dot{y}^2_{\text{máx}} \end{aligned} \tag{E.4}$$

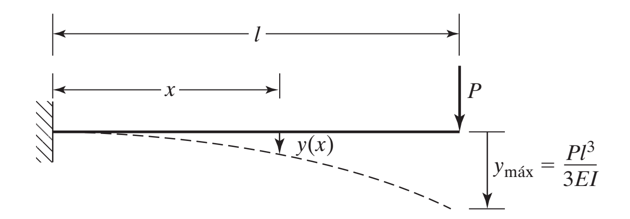


Figura 2.20 Masa equivalente de la columna.

Si m_{eq} indica la masa equivalente de la viga en voladizo (tanque de agua) en el extremo libre, su energía cinética máxima se expresa como

$$T_{máx} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{y}^2_{máx} \tag{E.5}$$

Si igualamos las ecuaciones (E.4) y (E.5), obtenemos

$$m_{eq} = \frac{33}{140} m \tag{E.6}$$

Por lo tanto, la masa efectiva total que actúa en el extremo de la viga en voladizo es

$$M_{efec} = M + m_{eq} \tag{E.7}$$

donde M es la masa del tanque de agua. La frecuencia natural de vibración transversal del tanque de agua es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M_{efec}}} = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{33}{140} m}} \tag{E.8}$$

2.6 Vibración libre con amortiguamiento viscoso

2.6.1 Ecuación de movimiento

Como se manifestó en la sección 1.9, la fuerza de amortiguamiento viscoso F es proporcional a la velocidad $\dot{x}$ o v y se expresa como

$$F = -c\dot{x} \tag{2.58}$$

donde c es la constante de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento viscoso y el signo indica que la fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección de la velocidad. En la figura 2.21 se muestra un sistema de un solo grado de libertad con un amortiguador viscoso. Si x se mide a partir de la posición de equilibrio de la masa m, la aplicación de la ley de Newton da por resultado la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

o

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.59}$$

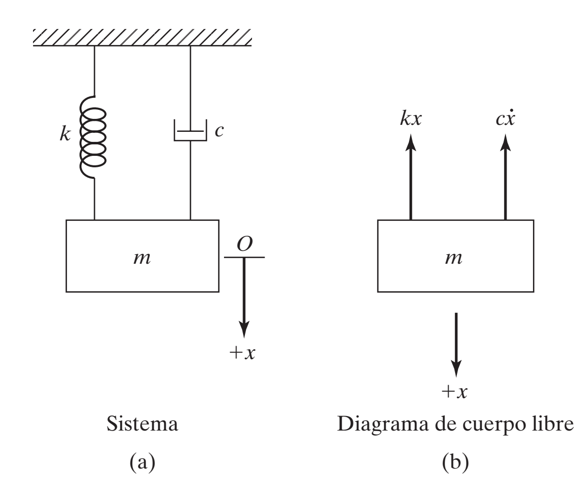


Figura 2.21 Sistema de un solo grado de libertad con amortiguador viscoso.

2.6.2 Solución

Para resolver la ecuación (2.59), suponemos una solución en la forma

$$x(t) = Ce^{st} \tag{2.60}$$

donde C y s son constantes indeterminadas. La inserción de esta función en la ecuación (2.59) nos lleva a la ecuación característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{2.61}$$

cuyas raíces son

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.62}$$

Estas raíces dan dos soluciones a la ecuación (2.59):

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t} \tag{2.63}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.59) es una combinación de las dos soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \\ &= C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se tienen que determinar a partir de las condiciones iniciales del sistema.

Constante de amortiguamiento crítico y la relación de amortiguamiento. El amortiguamiento crítico c_c se define como el valor de la constante de amortiguamiento c con la cual el radical en la ecuación (2.62) se vuelve cero:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

o

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{2.65}$$

Para cualquier sistema amortiguado, la relación de amortiguamiento ζ se define como la relación de la constante de amortiguamiento a la constante de amortiguamiento crítico:

$$\zeta = c/c_c \tag{2.66}$$

Utilizando las ecuaciones (2.66) y (2.65), podemos escribir

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta\omega_n \tag{2.67}$$

y por consiguiente

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \tag{2.68}$$

Así, la solución, ecuación (2.64), se escribe como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \tag{2.69}$$

La naturaleza de las raíces s_1 y s_2 y por consiguiente el comportamiento de la solución, ecuación (2.69), dependen de la magnitud del amortiguamiento. Se ve que el caso $\zeta = 0$ conduce a las vibraciones no amortiguadas que se analizan en la sección 2.2. Por consiguiente, suponemos que $\zeta \neq 0$ y ponemos a consideración los tres casos siguientes.

Caso 1. *Sistema no amortiguado* ($\zeta < 1$ o $c < c_c$ o $c/2m < \sqrt{k/m}$). En esta condición $(\zeta^2 - 1)$ es negativa y las raíces s_1 y s_2 se expresan como

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n$$
$$s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n$$

y la solución, la ecuación (2.69), se puede escribir de diferentes formas:

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \\
&= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}\right\} \\
&= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\} \\
&= e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1'\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + C_2'\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}
\end{aligned}$$

$$= X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi_0\right)$$

$$= X e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right) \tag{2.70}$$

donde (C_1', C_2'), (X, ϕ) y (X_0, ϕ_0) son constantes arbitrarias que se tienen que determinar a partir de las condiciones iniciales.

En las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$, C_1' y C_2', se determinan como sigue:

$$C_1' = x_0 \quad \text{y} \quad C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \tag{2.71}$$

y por consiguiente la solución es

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \operatorname{sen}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\} \tag{2.72}$$

Las constantes (X, ϕ) y (X_0, ϕ_0) se expresan como

$$X = X_0 = \sqrt{(C_1')^2 + (C_2')^2} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0\zeta\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \tag{2.73}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{C_1'}{C_2'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}\right) \tag{2.74}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2'}{C_1'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{2.75}$$

El movimiento descrito por la ecuación (2.72) es un movimiento armónico amortiguado de frecuencia angular $\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$, pero porque del factor $e^{-\zeta\omega_n t}$ la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo, como se muestra en la figura 2.22. La cantidad

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{2.76}$$

se conoce como *frecuencia de vibración amortiguada*. Se ve que la frecuencia de vibración amortiguada ω_d siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada ω_n. La disminución en la frecuencia de vibración amortiguada con la cantidad creciente de amortiguamiento, dada por la ecuación (2.76), se muestra gráficamente en la figura 2.23. El caso subamortiguado es muy importante en el estudio de vibraciones mecánicas, ya que es el único caso que conduce a un movimiento oscilatorio [2.10].

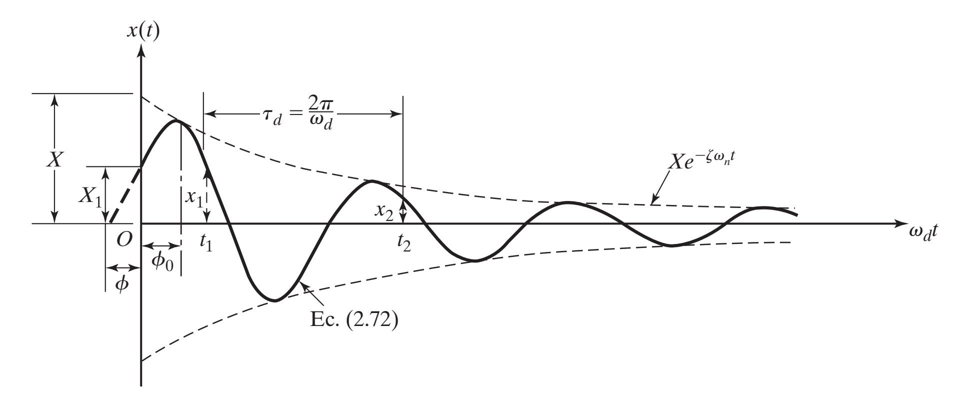


Figura 2.22 Solución subamortiguada.

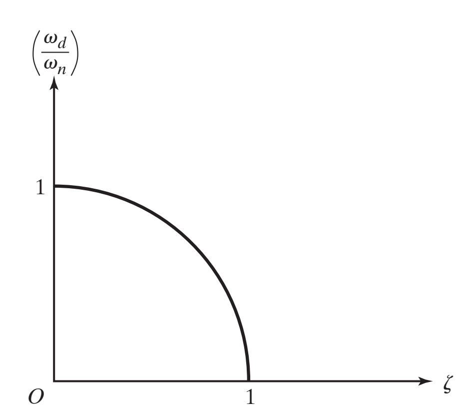


Figura 2.23 Variación de ω_d con amortiguamiento.

Caso 2. *Sistema críticamente amortiguado* ($\zeta = 1$, c_c o $c/2m = \sqrt{k/m}$). En este caso las dos raíces s_1 y s_2 en la ecuación (2.68) son iguales:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \tag{2.77}$$

Por las raíces repetidas, la ecuación (2.6)[1] da la solución de la ecuación (2.59) como sigue:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{2.78}$$

[1]También se puede obtener la ecuación (2.78) si se hace que $\boldsymbol{\zeta}$ tienda a la unidad en el límite en la ecuación (2.72). A medida que $\zeta \rightarrow 1$, $\omega_n \rightarrow 0$;, de ahí que cos $\omega_d t \rightarrow 1$ y sen $\omega_d t \rightarrow \omega_d t$. Por lo tanto, la ecuación (2.72) da por resultado

$$x(t) = e^{-\omega_n t}(C_1' + C_2'\omega_d t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

donde $C_1 = C_1'$ y $C_2 = C_2'\omega_d$ son constantes nuevas.

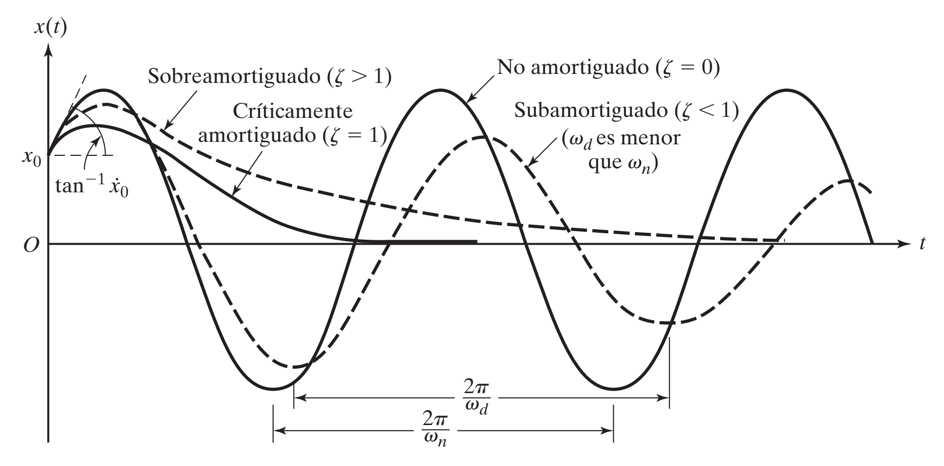


Figura 2.24 Comparación del movimiento con diferentes tipos de amortiguamiento.

La aplicación de las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ en este caso resulta

$$C_1 = x_0$$
$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \tag{2.79}$$

y la solución es

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \tag{2.80}$$

Se ve que el movimiento representado por la ecuación (2.80) es *aperiódico* (es decir, no periódico). Como $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$, el movimiento finalmente se reduce a cero, como se indica en la figura 2.24.

Caso 3. *Sistema sobreamortiguado* ($\zeta > 1$ o $c > c_c$ o $c/2m \sqrt{k/m}$). Cuando $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$, la ecuación (2.68) muestra que las raíces s_1 y s_2 son reales y distintas y están dadas por

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$
$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

con $s_2 \ll s_1$. En este caso, la solución, ecuación (2.69), se expresa como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \tag{2.81}$$

En las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$, las constantes C_1 y C_2 se obtienen como sigue:

$$C_1 = \frac{x_0\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{-x_0\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \tag{2.82}$$

La ecuación (2.81) muestra que el movimiento es aperiódico independientemente de las condiciones iniciales impuestas en el sistema. Como las raíces s_1 y s_2 son negativas, el movimiento se reduce exponencialmente con el tiempo, como se muestra en la figura 2.24.

Observe los siguientes aspectos de estos sistemas:

1. La representación gráfica de los diferentes tipos de raíces características s_1 y s_2, así como las respuestas correspondientes (soluciones) del sistema se presentan en la sección 2.7. La representación de las raíces s_1 y s_2 con valores variables de los parámetros del sistema c, k y m en el plano complejo (conocidas como gráficas del lugar geométrico de las raíces) se considera en la sección 2.8.
2. Un sistema críticamente amortiguado tendrá el amortiguamiento mínimo requerido para movimiento aperiódico; por consiguiente la masa regresa a la posición de reposo en el tiempo más corto posible sin sobrepaso. La propiedad de amortiguamiento crítico se utiliza en muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, las armas de fuego grandes tienen amortiguadores hidráulicos con valor de amortiguamiento crítico, de modo que regresen a su posición original después de recular en un tiempo mínimo sin vibrar. Si el amortiguamiento fuera mayor que el valor crítico, se presentaría una demora antes del siguiente disparo.
3. La respuesta de un sistema libre amortiguado de un solo grado de libertad se puede representar en el plano de fase o espacio de estado como se indica en la figura 2.25.

2.6.3 Decremento logarítmico

El decremento logarítmico representa la velocidad a la cual se reduce la amplitud de una vibración libre amortiguada. Se define como el logaritmo natural de la relación de cualquiera de las dos amplitudes sucesivas. Sean t_1 y t_2 los tiempos correspondientes a dos amplitudes sucesivas (desplazamientos), medidas un ciclo aparte para un sistema subamortiguado, como en la figura 2.22. Utilizando la ecuación (2.70), podemos formar la relación

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi_0)} \tag{2.83}$$

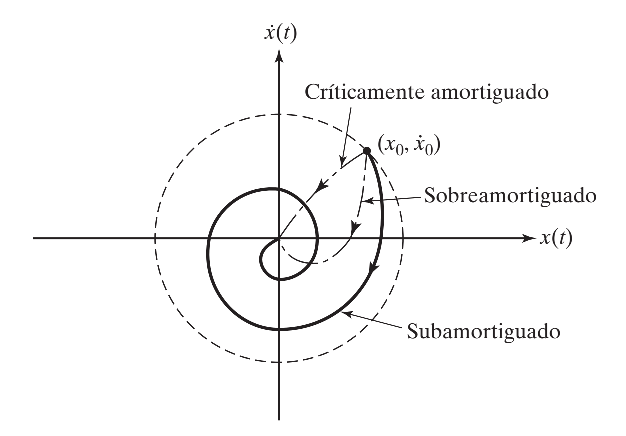


Figura 2.25 Plano de fase de un sistema amortiguado.

Pero $t_2 = \tau_1 + \tau_d$, donde $t_d = 2\pi/\omega_d$ es el periodo de vibración amortiguada. Por consiguiente cos $(\omega_d t_2 - \phi_0) = \cos(2\pi + \omega_d t_1 - \phi_0) = \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)$, y la ecuación (2.83) se escribe como

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d} \tag{2.84}$$

El decremento logarítmico δ se obtiene por la ecuación (2.84):

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \zeta\omega_n\tau_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}\cdot\frac{c}{2m} \tag{2.85}$$

Para amortiguamiento pequeño, la ecuación (2.85) se puede escribir como

$$\delta \simeq 2\pi\zeta \qquad \text{si} \qquad \zeta \ll 1 \tag{2.86}$$

La figura 2.26 muestra la variación del decremento logarítmico δ con la ζ dada por las ecuaciones (2.85) y (2.86). Se observa que con valores hasta $\zeta = 0.3$, las dos curvas son difíciles de distinguir.

El decremento logarítmico no tiene unidades y en realidad es otra forma de la relación de amortiguamiento ζ sin unidades. Una vez conocida δ, ζ se determina resolviendo la ecuación (2.85):

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \tag{2.87}$$

Si utilizamos la ecuación (2.86) en lugar de la ecuación (2.85), tenemos

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \tag{2.88}$$

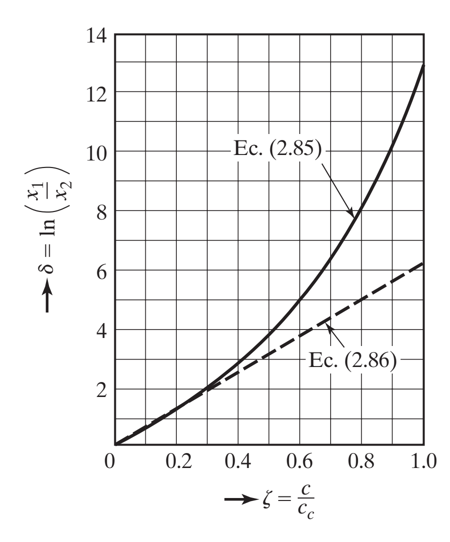


Figura 2.26 Variación del decremento logarítmico con amortiguamiento.

Si no se conoce el amortiguamiento en el sistema dado, podemos determinarlo experimentalmente midiendo cualquiera de los dos desplazamientos consecutivos x_1 y x_2. Tomando el logaritmo natural de la relación de x_1 y x_2, obtenemos δ. Si utilizamos la ecuación (2.87), podemos calcular la relación de amortiguamiento ζ. De hecho, la relación de amortiguamiento también se puede determinar midiendo dos desplazamientos separados por cualquier número de ciclos completos. Si x_1 y x_{m+1} indican las amplitudes correspondientes a los tiempos t_1 y $t_{m+1} = t_1 + m\tau_d$, donde m es un entero, obtenemos

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\frac{x_3}{x_4}\cdots\frac{x_m}{x_{m+1}} \tag{2.89}$$

Como cualquiera de los dos desplazamientos sucesivos separados por un ciclo satisfacen la ecuación

$$\frac{x_j}{x_{j+1}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d} \tag{2.90}$$

La ecuación (2.89) se vuelve

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = (e^{\zeta\omega_n\tau_d})^m = e^{m\zeta\omega_n\tau_d} \tag{2.91}$$

Las ecuaciones (2.91) y (2.85) dan por resultado

$$\delta = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right) \tag{2.92}$$

las cuales se pueden sustituir en la ecuación (2.87) o en la (2.88) para obtener la relación de amortiguamiento viscoso ζ.

2.6.4 Energía disipada en amortiguamiento viscoso

En un sistema viscosamente amortiguado, la velocidad de cambio de energía con el tiempo (dW/dt) es

$$\frac{dW}{dt} = \text{fuerza} \times \text{velocidad} = Fv = -cv^2 = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{2.93}$$

utilizando la ecuación (2.58). El signo negativo en la ecuación (2.93) denota que la energía se disipa con el tiempo. Suponga que un movimiento armónico simple como $x(t) = X \operatorname{sen} \omega_d t$, donde X es la amplitud del movimiento y la energía disipada en un ciclo completo está dada por[2]

$$\Delta W = \int_{t=0}^{(2\pi/\omega_d)} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} cX^2\omega_d\cos^2\omega_d t \cdot d(\omega_d t)$$
$$= \pi c\omega_d X^2 \tag{2.94}$$

[2]En el caso de un sistema amortiguado, el movimiento armónico simple $x(t) = X\cos\omega_d t$ es posible sólo cuando se considera la respuesta de estado estable bajo una fuerza armónica de frecuencia ω_d (vea la sección 3.4). La pérdida de energía por el amortiguador es el resultado de la excitación bajo una vibración forzada de estado estable [2.7].

Esto demuestra que la energía disipada es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Observe que no es una constante para valores dados de amortiguamiento y amplitud, puesto que ΔW también es una función de la frecuencia ω_d.

La ecuación (2.94) es válida aun cuando haya un resorte de rigidez k paralelo al amortiguador viscoso. Para ver esto, considere el sistema de la figura 2.27. La fuerza total que resiste el movimiento se expresa como

$$F = -kx - cv = -kx - c\dot{x} \tag{2.95}$$

Si suponemos movimiento armónico simple

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega_d t \tag{2.96}$$

como antes, la ecuación (2.95) se escribe como

$$F = -kX \operatorname{sen} \omega_d t - c\omega_d X \cos \omega_d t \tag{2.97}$$

La energía disipada en un ciclo completo será

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_{t=0}^{2\pi/\omega_d} Fv\, dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_d} kX^2\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t \cdot \cos \omega_d t \cdot d(\omega_d t) \\ &\quad + \int_0^{2\pi/\omega_d} c\omega_d X^2 \cos^2 \omega_d t \cdot d(\omega_d t) = \pi c \omega_d X^2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

la cual es idéntica a la ecuación (2.94). Este resultado es de esperarse, puesto que la fuerza de resorte no realizará ningún trabajo neto en un ciclo completo o en cualquier número integral de ciclos.

Podemos calcular la fracción de la energía total del sistema vibratorio que se disipa en cada ciclo de movimiento ($\Delta W/W$) como sigue. La energía total W del sistema se puede expresar tanto como la energía potencial máxima $(\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega_d^2)$, o como la energía cinética máxima $(\frac{1}{2}kX^2)$, las cuales son aproximadamente iguales con valores pequeños de amortiguamiento. Por lo tanto

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c \omega_d X^2}{\frac{1}{2}m\omega_d^2 X^2} = 2\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)\left(\frac{c}{2m}\right) = 2\delta \simeq 4\pi\zeta = \text{constante} \tag{2.99}$$

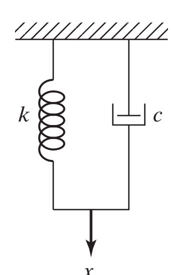


Figura 2.27 Resorte y amortiguador en paralelo.

utilizando las ecuaciones (2.85) y (2.88). La cantidad $\Delta W/W$ se llama *cantidad de amortiguamiento específica* y es útil al comparar la capacidad de amortiguamiento de materiales de ingeniería. También se utiliza otra cantidad conocida como *coeficiente de pérdida* para comparar la capacidad de amortiguamiento de materiales de ingeniería. El coeficiente de pérdida se define como la relación de la energía disipada por radián y la energía de deformación total:

$$\text{coeficiente de pérdida} = \frac{(\Delta W/2\pi)}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W} \tag{2.100}$$

2.6.5 Sistemas torsionales con amortiguamiento viscoso

Los métodos presentados en las secciones 2.6.1 a 2.6.4 para vibraciones lineales con amortiguamiento viscoso se pueden extender directamente a vibraciones torsionales (angulares) viscosamente amortiguadas. Para esto, considere un sistema torsional de un solo grado de libertad con un amortiguador viscoso, como se muestra en la figura 2.28(a). El par de torsión de amortiguamiento viscoso es (figura 2.28(b):

$$T = -c_t\dot{\theta} \tag{2.101}$$

donde c_t es la constante de amortiguamiento torsional viscoso, $\dot{\theta} = d\theta/dt$ es la velocidad angular del disco, y el signo negativo denota que el par de torsión de amortiguamiento se opone a la dirección de la velocidad angular. La ecuación de movimiento se deriva como

$$J_0\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = 0 \tag{2.102}$$

donde J_0 = momento de inercia de masa del disco, k_t = constante de resorte del sistema (par de torsión de restauración por unidad de desplazamiento angular), y θ = desplazamiento angular del

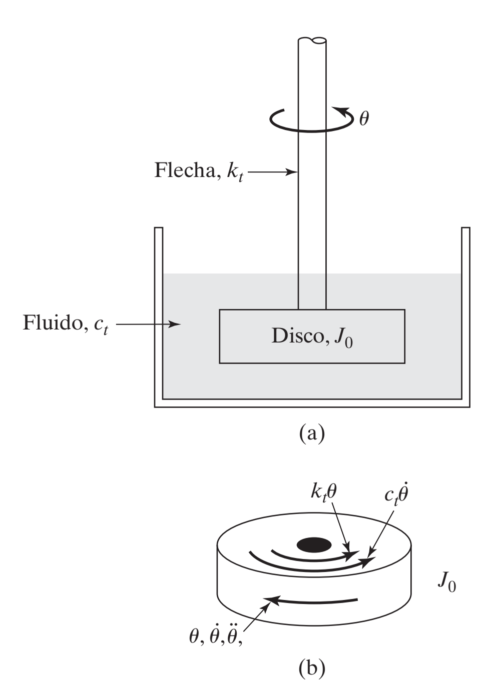


Figura 2.28 Amortiguador viscoso torsional.

disco. La solución de la ecuación (2.102) se determina con exactitud como en el caso de vibración lineal. Por ejemplo, en el caso subamortiguado, la frecuencia de vibración amortiguada es

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\, \omega_n \tag{2.103}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.104}$$

y

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{tc}} = \frac{c_t}{2J_0\omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t J_0}} \tag{2.105}$$

donde c_{tc} es la constante de amortiguamiento torsional crítica.

Ejemplo 2.10 Respuesta del yunque de un martillo de forja

El yunque de un martillo de forja pesa 5000 N y está montado sobre una base con una rigidez de 5×10^6 N/m y constante de amortiguamiento viscoso de 10,000 N-s/m. Durante una operación de forja particular, se hace que el mazo (es decir, el peso que cae o el martillo), cuyo peso es de 1000 N, caiga desde una altura de 2 m sobre el yunque (figura 2.29(a)). Si el yunque está en reposo antes del impacto del mazo, determine la respuesta del yunque después del impacto. Suponga que el coeficiente de restitución entre el yunque y el mazo es de 0.4.

Solución: Primero aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento y la definición del coeficiente de restitución para encontrar la velocidad inicial del yunque. Sean v_{t1} y v_{t2}, respectivamente, las velocidades del mazo justo antes y después del impacto. Asimismo, sean v_{a1} y v_{a2} las velocidades del yunque justo antes y después del impacto, respectivamente (figura 2.29(b)). Observe que el desplazamiento del yunque se mide a partir de su posición de equilibrio estático y que todas las velocidades se consideran positivas cuando actúan en descenso. El principio de conservación de la cantidad de movimiento (momento) da

$$M(v_{a2} - v_{a1}) = m(v_{t1} - v_{t2}) \tag{E.1}$$

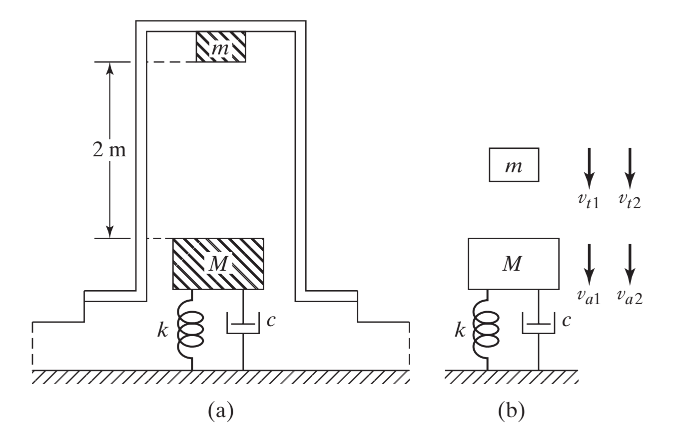


Figura 2.29 Martillo de forja.

donde $v_{a1} = 0$ (el yunque está en reposo antes del impacto) y v_{t1} se determina igualando su energía cinética justo antes del impacto a su energía potencial antes de que caiga desde una altura $h = 2$ m:

$$\frac{1}{2}mv_{t1}^2 = mgh \tag{E.2}$$

o

$$v_{t1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2} = 6.26099 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.1) se hace

$$\frac{5000}{9.81}(v_{a2} - 0) = \frac{1000}{9.81}(6.26099 - v_{t2})$$

es decir,

$$510.204082\, v_{a2} = 638.87653 - 102.040813\, v_{t2} \tag{E.3}$$

La definición del coeficiente de restitución (r) produce

$$r = -\left(\frac{v_{a2} - v_{t2}}{v_{a1} - v_{t1}}\right) \tag{E.4}$$

es decir,

$$0.4 = -\left(\frac{v_{a2} - v_{t2}}{0 - 6.26099}\right)$$

lo que implica,

$$v_{a2} = v_{t2} + 2.504396 \tag{E.5}$$

La solución de las ecuaciones (E.3) y (E.5) da por resultado

$$v_{a2} = 1.460898 \text{ m/s}; \qquad v_{t2} = -1.043498 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, las condiciones iniciales del yunque están dadas por

$$x_0 = 0; \qquad \dot{x}_0 = 1.460898 \text{ m/s}$$

El coeficiente de amortiguamiento es igual a

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{1000}{2\sqrt{(5 \times 10^6)\left(\frac{5000}{9.81}\right)}} = 0.0989949$$

Las frecuencias naturales no amortiguadas y amortiguadas del yunque son

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^6}{\left(\frac{5000}{9.81}\right)}} = 98.994949 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 98.994949 \sqrt{1 - 0.0989949^2} = 98.024799 \text{ rad/s}$$

La ecuación (2.72) da la respuesta del desplazamiento resultante del yunque:

$$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t} \left\{ \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \text{ sen } \omega_d t \right\}$$

$$= e^{-9.799995\,t} \{0.01490335 \text{ sen } 98.024799\,t\} \text{m}$$

■

Ejemplo 2.11 Amortiguador para una motocicleta

Se ha de diseñar un amortiguador subamortiguado para una motocicleta de 200 kg de masa (figura 2.30(a)). Cuando el amortiguador se somete a una velocidad inicial debido a un bache, la curva de desplazamiento-tiempo resultante debe ser como la que se muestra en la figura 2.30(b). Encuentre las constantes de rigidez y amortiguamiento necesarias del amortiguador si el periodo de vibración amortiguada es de 2 s y se ha de reducir la amplitud x_1 a un cuarto en un medio ciclo (es decir, $x_{1.5} = x_1/4$). Encuentre también la velocidad inicial mínima que produce un desplazamiento máximo de 250 mm.

Procedimiento: Utilizamos la ecuación para el decremento logarítmico en función de la relación de amortiguamiento, la ecuación para el periodo de vibración amortiguada, el tiempo correspondiente al desplazamiento máximo para un sistema subamortiguado y la envolvente que pasa por los puntos máximos de un sistema subamortiguado.

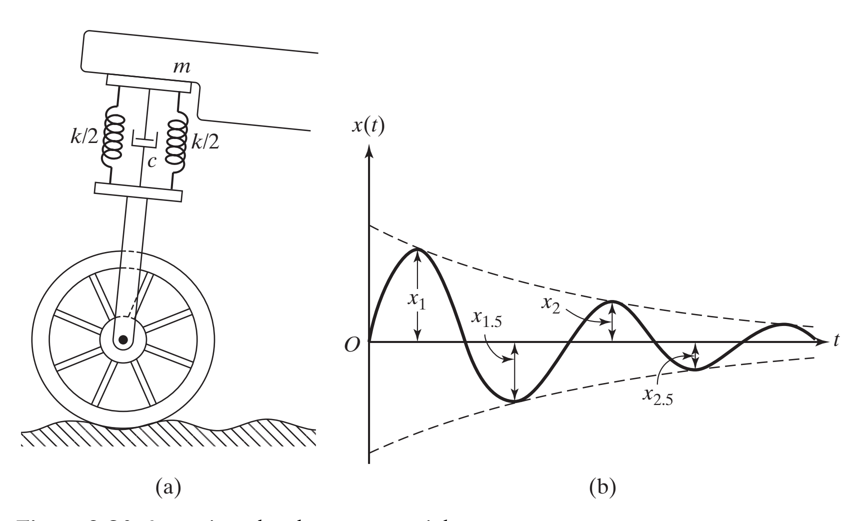


Figura 2.30 Amortiguador de una motocicleta.

Solución: Como $x_{1.5} = x_1/4$, $x_2 = x_{1.5}/4 = x_1/16$. Por consiguiente el decremento logarítmico es

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(16) = 2.7726 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{E.1}$$

a partir del cual se encuentra el valor de ζ como $\zeta = 0.4037$. El periodo de vibración amortiguada es de 2 s. Por consiguiente

$$2 = \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{2\sqrt{1-(0.4037)^2}} = 3.4338 \text{ rad/s}$$

La constante de amortiguamiento crítico se obtiene como:

$$c_c = 2m\omega_n = 2(200)(3.4338) = 1373.54 \text{ N-s/m}$$

Por tanto, la constante de amortiguamiento resulta de:

$$c = \zeta c_c = (0.4037)(1373.54) = 554.4981 \text{ N-s/m}$$

y la rigidez por

$$k = m\omega_n^2 = (200)(3.4338)^2 = 2358.2652 \text{ N/m}$$

El desplazamiento de la masa alcanzará su valor máximo en el instante t_1, dado por

$$\text{sen }\omega_d t_1 = \sqrt{1-\zeta^2}$$

(Vea el problema 2.99). Esto da

$$\text{sen }\omega_d t_1 = \text{sen }\pi t_1 = \sqrt{1-(0.4037)^2} = 0.9149$$

o

$$t_1 = \frac{\text{sen}^{-1}(0.9149)}{\pi} = 0.3678 \text{ seg}$$

La envolvente que pasa por los puntos máximos (vea el problema 2.99) está dado por

$$x = \sqrt{1-\zeta^2}Xe^{-\zeta\omega_n t} \tag{E.2}$$

Como $x = 250$ mm, la ecuación (E.2) da en el instante t_1

$$0.25 = \sqrt{1-(0.4037)^2}\, Xe^{-(0.4037)(3.4338)(0.3678)}$$

o

$$X = 0.4550 \text{ m}$$

La velocidad de la masa se obtiene diferenciando el desplazamiento

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t} \text{ sen } \omega_d t$$

como

$$\dot{x}(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}(-\zeta\omega_n \text{ sen } \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t) \tag{E.3}$$

Cuando $t = 0$, la ecuación (E.3) da

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = X\omega_d = X\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = (0.4550)(3.4338)\sqrt{1 - (0.4037)^2}$$
$$= 1.4294 \text{ m/s}$$

■

Ejemplo 2.12 Análisis de un cañón

En la figura 2.31 [2.8] se muestra el diagrama de un cañón. Cuando se dispara, gases a alta presión en el interior del cañón aceleran el proyectil a una velocidad muy alta. La fuerza de reacción empuja el cañón en la dirección opuesta a la del proyectil. Como lo deseable es que el cañón esté en reposo en el más corto tiempo posible sin que oscile, se hace que retroceda hacia un sistema de resorte y amortiguador críticamente amortiguado llamado *mecanismo de retroceso*. En un caso particular, el cañón y el mecanismo de retroceso tienen una masa de 500 kg con un resorte de retroceso de 10,000 N/m de rigidez. El cañón retrocede 0.4 m cuando se dispara. Encuentre (1) el coeficiente de amortiguamiento crítico del amortiguador, (2) la velocidad de retroceso inicial del cañón, y (3) el tiempo que requiere el cañón para regresar a 0.1 m de su posición inicial.

Solución:

1. La frecuencia natural no amortiguada del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10{,}000}{500}} = 4.4721 \text{ rad/s}$$

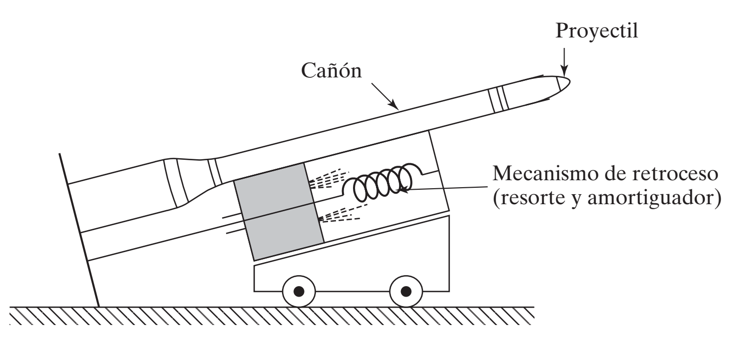


Figura 2.31 Retroceso de un cañón.

y el coeficiente de amortiguamiento crítico (ecuación 2.65) del amortiguador es

$$c_c = 2m\omega_n = 2(500)(4.4721) = 4472.1 \text{ N-s/m}$$

2. La ecuación (2.78) da la respuesta de un sistema críticamente amortiguado:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{E.1}$$

donde $C_1 = x_0$ y $C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$. El tiempo t_1 en que $x(t)$ alcanza un valor máximo se obtiene haciendo $\dot{x}(t) = 0$. La diferenciación de la ecuación (E.1) da

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n(C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Por consiguiente, $\dot{x}(t) = 0$ da por resultado

$$t_1 = \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{C_1}{C_2}\right) \tag{E.2}$$

En este caso, $x_0 = C_1 = 0$; por consiguiente, la ecuación (E.2) conduce a $t_1 = 1/\omega_n$. Como el valor máximo de $x(t)$ o la distancia de retroceso deben ser $x_{\text{máx}} = 0.4$ m, tenemos

$$x_{\text{máx}} = x(t = t_1) = C_2 t_1 e^{-\omega_n t_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} e^{-1} = \frac{\dot{x}_0}{e\omega_n}$$

o

$$\dot{x}_0 = x_{\text{máx}} \omega_n e = (0.4)(4.4721)(2.7183) = 4.8626 \text{ m/s}$$

3. Si t_2 indica cuánto tiempo requiere el cañón para regresar a 0.1 m de su posición inicial, tenemos

$$0.1 = C_2 t_2 e^{-\omega_n t_2} = 4.8626 t_2 e^{-4.4721 t_2} \tag{E.3}$$

La solución de la ecuación (E.3) da $t_2 = 0.8258$ s.

■

2.7 Representación gráfica de raíces características y soluciones correspondientes†

2.7.1 Raíces de la ecuación característica

La ecuación (2.59) rige la vibración libre de un sistema de resorte-masa-amortiguador viscoso de un solo grado de libertad que se muestra en la figura 2.21:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.106}$$

†Si es necesario, se pueden pasar por alto las secciones 2.7 y 2.8 sin que se pierda la continuidad.

cuya ecuación característica se expresa como (ecuación (2.61)):

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{2.107}$$

o

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{2.108}$$

Las raíces de esta ecuación característica, llamadas *raíces características*, o simplemente *raíces*, nos ayudan a entender el comportamiento del sistema. Las ecuaciones (2.62) y (2.68) dan las raíces de las ecuaciones (2.107) o (2.108):

$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2\,m} \tag{2.109}$$

o

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.110}$$

2.7.2 Representación gráfica de raíces y soluciones correspondientes

Las raíces dadas por la ecuación (2.110) se pueden trazar en un plano complejo, también conocido como plano s, indicando la parte real a lo largo del eje horizontal, y la parte imaginaria a lo largo del eje vertical. Es preciso observar que la respuesta del sistema está dada por

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{2.111}$$

donde C_1 y C_2 son constantes; si examinamos las ecuaciones (2.110) y (2.111) se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Como el exponente de un número negativo real mayor (como e^{-2t}) decae más rápido que el exponente de un número negativo real menor (como e^{-t}), las raíces que quedan más a la izquierda en el plano s indican que las respuestas correspondientes decaen más rápido que las asociadas con raíces más cercanas al eje imaginario.
2. Si las raíces tienen valores reales positivos de s, es decir, las raíces quedan en la mitad derecha del plano s, la respuesta correspondiente crece exponencialmente y por consiguiente será inestable.
3. Si las raíces quedan en el eje imaginario (con valor real cero), la respuesta correspondiente será naturalmente estable.
4. Si la parte imaginaria de las raíces es cero, la respuesta correspondiente no oscilará.
5. La respuesta del sistema presentará un comportamiento oscilatorio sólo cuando las partes imaginarias de las raíces sean no cero.
6. Cuanto más a la izquierda queden las raíces en el plano s, más rápido decrecerá la respuesta correspondiente.
7. Cuanto mayor sea la parte imaginaria de las raíces, más alta será la frecuencia de oscilación de la respuesta correspondiente del sistema.

La figura 2.32 muestra algunas localizaciones representativas de las raíces características en el plano s y las respuestas correspondientes [2.15]. Las características que describen el comportamiento de la respuesta de un sistema incluyen la naturaleza oscilatoria, la frecuencia de oscilación y el tiempo de respuesta. Estas características son inherentes al sistema (depende de los valores de m, c y k) y están determinadas por las raíces características del sistema pero no por las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales determinan sólo las amplitudes y ángulos de fase.

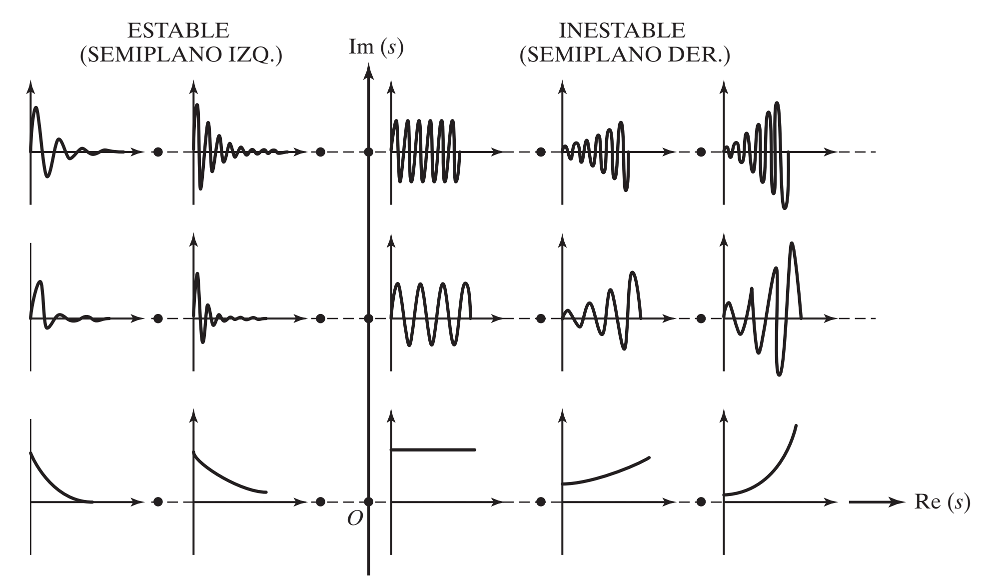


Figura 2.32 Ubicaciones de raíces características (•) y la respuesta correspondiente del sistema.

2.8 Variaciones de parámetros y representaciones del lugar geométrico de las raíces

2.8.1 Interpretaciones de ω_n, ω_d, ζ y τ en el plano s

Aunque las raíces s_1 y s_2 aparecen como conjugados complejos, sólo consideramos las raíces en la mitad superior del plano s. La raíz s_1 aparece como el punto A con el valor real como $\zeta\omega_n$ y el valor complejo $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, de modo que la longitud OA es ω_n (figura 2.33). Por lo tanto, las raíces que se encuentran en el círculo de radio ω_n corresponden a la misma frecuencia natural (ω_n) del sistema (PAQ significa un cuarto del círculo). Por lo tanto, los círculos concéntricos diferentes representan sistemas con frecuencias naturales diferentes, como se muestra en la figura 2.34. La línea horizontal que pasa por el punto A corresponde a la frecuencia natural amortiguada, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Así pues, las líneas paralelas al eje real indican sistemas con frecuencias naturales amortiguadas diferentes, como se muestra en la figura 2.35.

Se puede ver, por la figura 2.33, que el ángulo formado por la línea OA con el eje imaginario lo da

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \tag{2.112}$$

o

$$\theta = \text{sen}^{-1}\,\zeta \tag{2.113}$$

Por lo tanto, las líneas radiales que pasan por el origen corresponden a relaciones de amortiguamiento diferentes, como se muestra en la figura 2.36. Por consiguiente, cuando $\zeta = 0$, no hay amortiguamiento ($\theta = 0$) y la frecuencia natural amortiguada se reducirá a la frecuencia natural

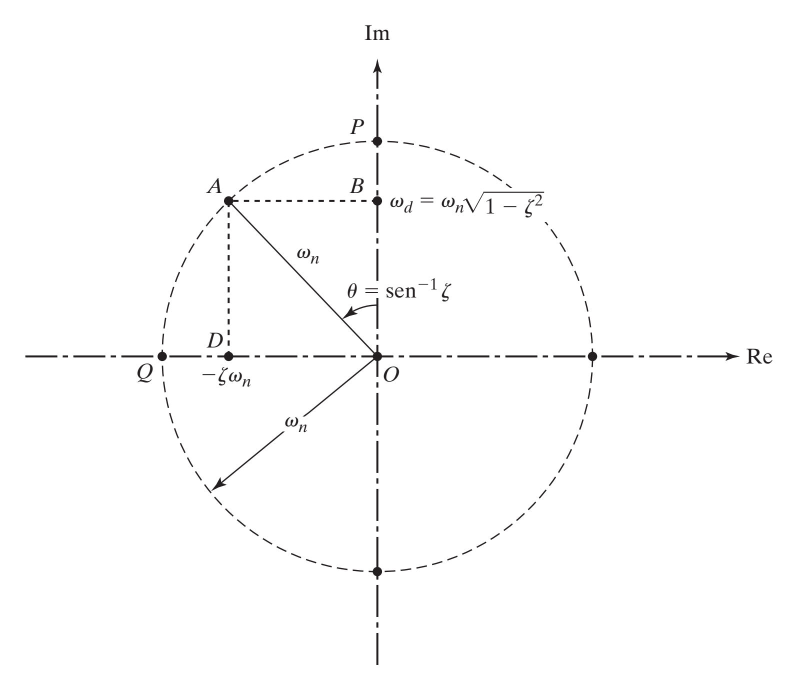


Figura 2.33 Interpretaciones de ω_n, ω_d y ζ.

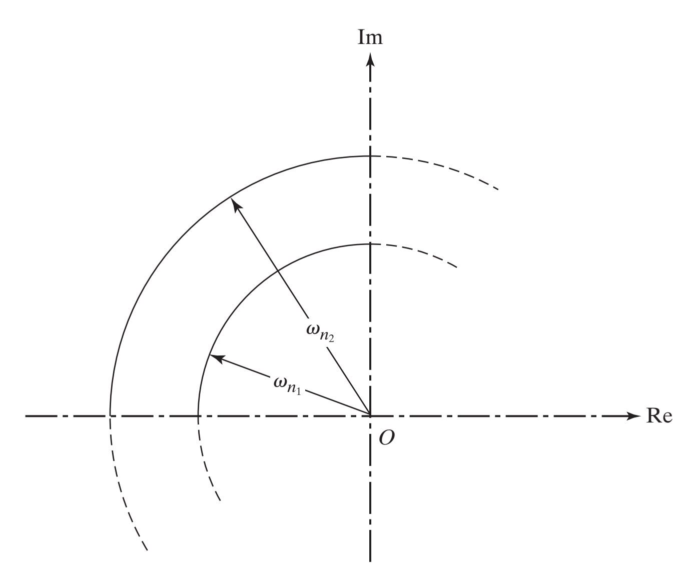


Figura 2.34 ω_n en el plano s.

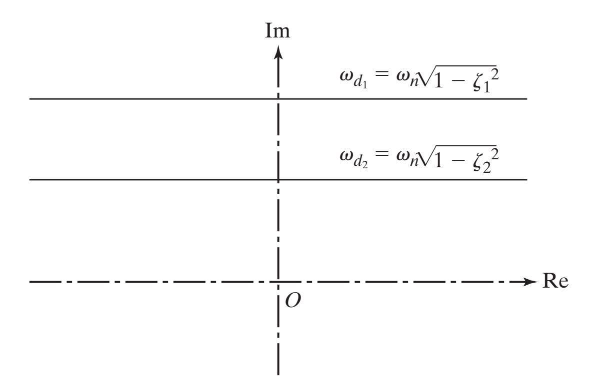


Figura 2.35 ω_d en el plano *s*.

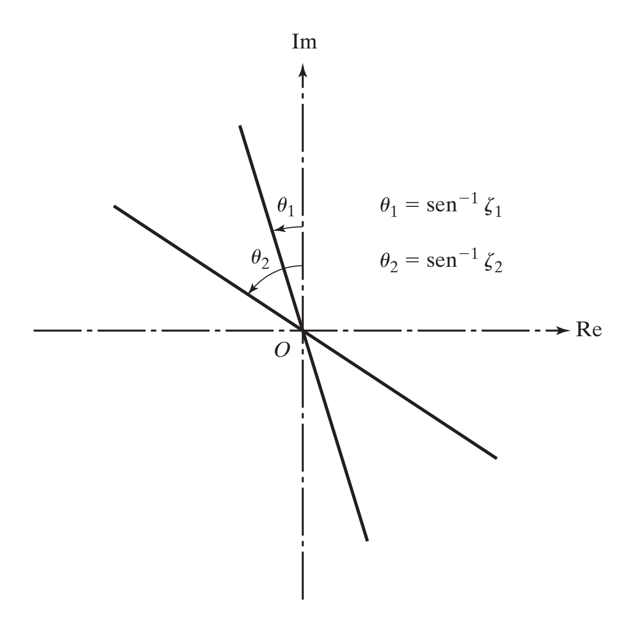


Figura 2.36 ζ en el plano *s*.

no amortiguada. Asimismo, cuando $\zeta = 1$, tenemos amortiguamiento crítico y la línea radial queda a lo largo del eje real negativo. La constante de tiempo, τ, del sistema, se define como

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \tag{2.114}$$

y, por consiguiente, la distancia *DO* o *AB* representa el recíproco de la constante de tiempo $\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau}$. Por consiguiente, líneas diferentes paralelas al eje imaginario indican los recíprocos de constante de tiempo diferentes (figura 2.37).

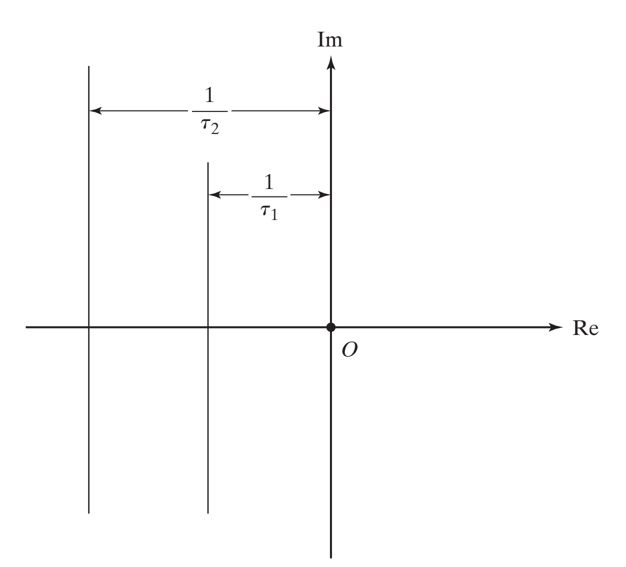


Figura 2.37 τ en el plano s.

2.8.2 Lugar geométrico de las raíces y variaciones de parámetro

Una gráfica que muestra cómo los cambios en uno de los parámetros del sistema modificarán las raíces de la ecuación característica del sistema se conoce como gráfica del lugar geométrico de las raíces. El método del lugar geométrico de las raíces es un poderoso método de análisis y diseño para determinar la estabilidad y respuesta transitoria de un sistema. Para un sistema vibratorio, el lugar geométrico de las raíces se puede usar para describir cualitativamente el desempeño del sistema a medida que cambian varios parámetros, como la masa, la constante de amortiguamiento o la constante de resorte. En el método del lugar geométrico de las raíces, la trayectoria o el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica se traza sin encontrar en realidad las raíces mismas. Esto se logra con un conjunto de reglas que conducen a una gráfica razonablemente precisa en un tiempo relativamente corto [2.8]. Estudiamos el comportamiento del sistema variando un parámetro, entre la relación de amortiguamiento, la constante de resorte y la masa, a la vez en función de las ubicaciones de sus raíces características en el plano s.

Variación de la relación de amortiguamiento: Variamos la constante de amortiguamiento desde cero hasta infinito y estudiamos la migración de las raíces características en el plano s. Para esto, utilizamos la ecuación (2.109). Observamos que no es necesario considerar los valores negativos de la constante de amortiguamiento ($c < 0$), porque producen raíces situadas en el semiplano real positivo que corresponden a un sistema inestable. Por lo tanto, iniciamos con $c = 0$ para obtener, a partir de la ecuación (2.109),

$$s_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-4mk}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_n \tag{2.115}$$

Por lo tanto, las ubicaciones de las raíces características se inician en el eje imaginario. Como las raíces aparecen en pares conjugados complejos, nos concentramos en el semiplano imaginario superior y luego localizamos las raíces en el semiplano imaginario inferior como imágenes de espejo. Manteniendo constante la frecuencia natural no amortiguada (ω_n), variamos la constante de amortiguamiento c. Se nota que las partes real e imaginaria de las raíces de la ecuación (2.109) se pueden expresar como

$$-\sigma = -\frac{c}{2m} = -\zeta\omega_n \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d \tag{2.116}$$

para $0 < \zeta < 1$, encontramos que

$$\sigma^2 + \omega_d^2 = \omega_n^2 \tag{2.117}$$

Como ω_n se mantiene fija, la ecuación (2.117) representa la ecuación de un círculo con radio $r = \omega_n$ en el plano σ (real) y plano ω_d (imaginario). El vector radio $r = \omega_n$ formará un ángulo θ con el eje imaginario positivo con

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \alpha \tag{2.118}$$

$$\cos\theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \tag{2.119}$$

con

$$\alpha = \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.120}$$

Por lo tanto, las dos raíces describen lugares geométricos o trayectorias en la forma de arcos circulares a medida que la relación de amortiguamiento se incrementa desde cero hasta la unidad, como se muestra en la figura 2.38. La raíz con parte imaginaria positiva se mueve en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, mientras que la raíz con parte imaginaria negativa se mueve en la dirección de las manecillas del reloj. Cuando la relación de amortiguamiento (ζ) es igual a 1, los dos lugares geométricos coinciden, lo que indica que las dos raíces coinciden, es decir, la ecuación característica tiene raíces repetidas. A medida que incrementamos la relación de amortiguamiento más allá de la unidad, el sistema se vuelve sobreamortiguado y, como se vio en la sección 2.6, las

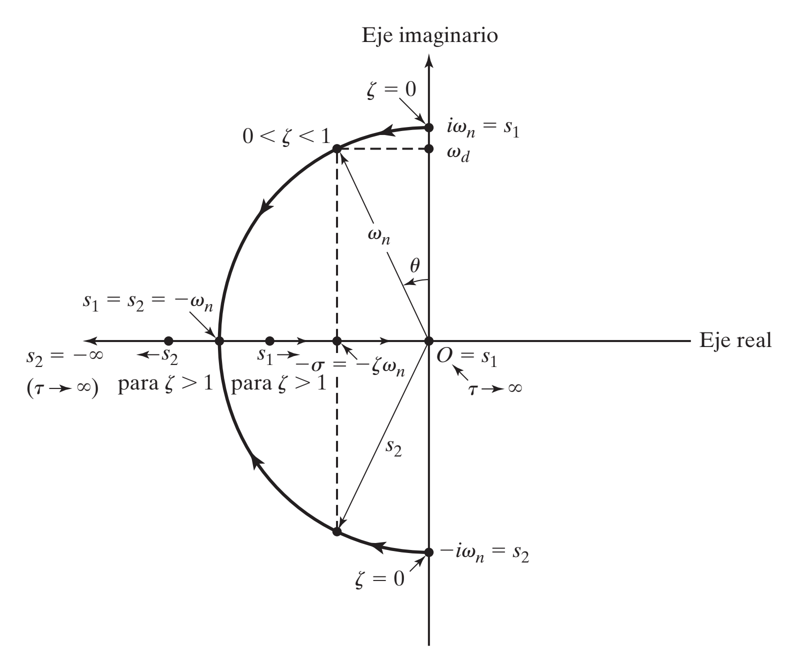


Figura 2.38 Gráfica del lugar geométrico de las raíces con variación de la relación de amortiguamiento ζ.

dos raíces se vuelven reales. Por las propiedades de una ecuación cuadrática vemos que el producto de dos raíces es igual al coeficiente de la menor potencia de s (la cual es ω_n^2 en la ecuación (2.108)).

Como el valor de ω_n se mantiene constante en este estudio, el producto de las dos raíces es una constante. Con valores crecientes de la relación de amortiguamiento (ζ) una raíz se incrementará y la otra se reducirá, con el lugar geométrico de cada raíz en el eje real negativo. Por lo tanto, una raíz tenderá a $-\infty$ y la otra tenderá a cero. Los dos lugares geométricos se unirán o coincidirán en un punto, conocido como *punto de escape* en el eje real negativo. Las dos partes de los lugares geométricos que quedan en el eje real negativo, una desde el punto P hasta $-\infty$ y la otra desde el punto P hasta el origen se conocen como *segmentos*.

Ejemplo 2.13 Estudio de las raíces con variación de *c*

Trace el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema regido por la ecuación

$$3s^2 + cs + 27 = 0 \tag{E.1}$$

variando el valor de $c > 0$.

Solución: Las raíces de la ecuación (E.1) resultan de

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 324}}{6} \tag{E.2}$$

Iniciamos con un valor de $c = 0$. En $c = 0$, las raíces son $s_{1,2} = \pm 3i$. Estas raíces se muestran como puntos en el eje imaginario de la figura 2.39. Al utilizar una secuencia creciente de valores de c, la ecuación (E.2) da las raíces como se indica en la tabla 2.1.

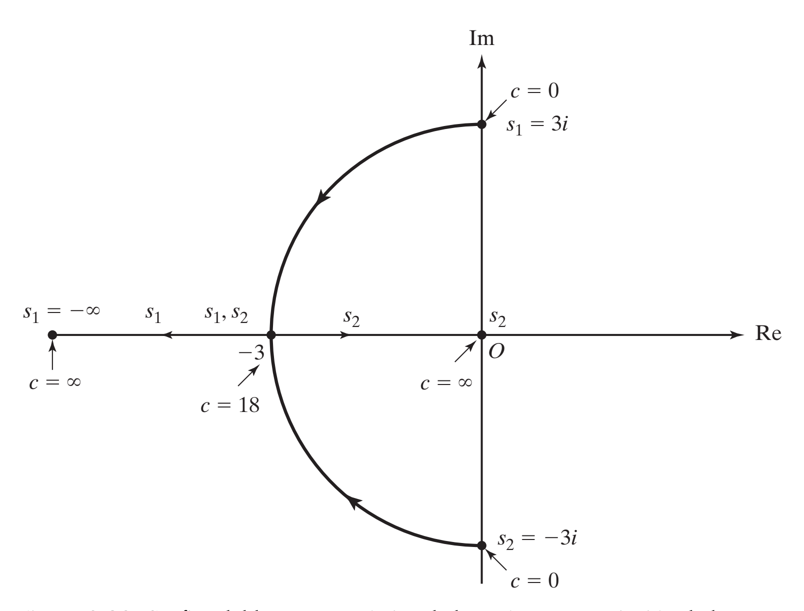


Figura 2.39 Grafica del lugar geométrico de las raíces con variación de la constante de amortiguamiento (c).

Se ve que las raíces permanecen como conjugados complejos a medida que c se incrementa hasta un valor de $c = 18$. En $c = 18$, las dos raíces se vuelven reales e idénticas con un valor de –3.0. A medida que c se incrementa más allá de un valor de 18, las raíces permanecen distintas con valores reales negativos. Una raíz se vuelve más y más negativa y la otra se vuelve menos y menos negativa. Por lo tanto, a medida que $c \to \infty$, una raíz tiende a $-\infty$ en tanto que la otra tiende a 0. Estas tendencias de las raíces se muestran en la figura 2.39.

Tabla 2.1

Valor de c	Valor de s_1	Valor de s_2
0	$+ 3i$	$-3i$
2	$-0.3333 + 2.9814i$	$-0.333 - 2.9814i$
4	$-0.6667 + 2.9721i$	$-0.6667 - 2.972li$
6	$-1.0000 + 2.8284i$	$-1.0000 - 2.8284i$
8	$-1.3333 +2.6874i$	$-1.3333 - 2.6874i$
10	$-1.6667 + 2.4944i$	$-1.6667 - 2.4944i$
12	$-2.0000 + 2.2361i$	$-2.0000 - 2.2361i$
14	$-2.3333 + 1.8856i$	$-2.3333 - 1.8856i$
16	$-2.6667 + 1.3744i$	$-2.6667 - 1.3744i$
18	-3.0000	-3.0000
20	-1.8803	-4.7863
30	-1.0000	-9.0000
40	-0.7131	-12.6202
50	-5587	-16.1079
100	-0.2722	-33.0611
1000	-0.027	-333.3063

Variación de la constante de resorte: Como la constante de resorte no aparece explícitamente en la ecuación (2.108), consideramos una forma específica de la ecuación característica (2.107) como:

$$s^2 + 16s + k = 0 \tag{2.121}$$

Las raíces de la ecuación (2.121) son

$$s_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4k}}{2} = -8 \pm \sqrt{64 - k} \tag{2.122}$$

Como la rigidez de resorte no puede ser negativa para sistemas vibratorios reales, consideramos la variación de los valores de k desde cero hasta infinito. La ecuación (2.122) muestra que para

$0 \leq k < 64$, las dos raíces son reales e idénticas. A medida que k se hace mayor que 64, las raíces se vuelven conjugados complejos. Las raíces correspondientes a valores diferentes de k se muestran en la tabla 2.2. Las variaciones de las dos raíces se trazan (como puntos) como se muestra en la figura 2.40.

Variación de la masa: Para hallar la migración de las raíces con una variación de la masa m, consideramos una forma específica de la ecuación característica, la ecuación (2.107), como

$$ms^2 + 14s + 20 = 0 \tag{2.123}$$

cuyas raíces son

$$s_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 80m}}{2m} \tag{2.124}$$

Como no es necesario considerar los valores negativos ni el valor cero de la masa para sistemas físicos, variamos el valor de m en el rango $1 \leq m < \infty$. Algunos valores de m y las raíces correspondientes dadas por la ecuación (2.124) se muestran en la tabla 2.3.

Se ve que ambas raíces son negativas con valores $(-1.6148, -12.3852)$ para $m = 1$ y $(-2, -5)$ para $m = 2$. Se observa que la raíz mayor se mueve hacia la izquierda y que la menor se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura 2.41. Se halla que las raíces mayor y menor convergen hacia el valor -2.8571 a medida que m se incrementa a un valor de 2.45. Más allá de este valor de $m = 2.45$, las raíces se vuelven conjugados complejos. A medida que el valor de m se incrementa desde 2.45 hasta un valor grande ($\rightarrow \infty$), los lugares geométricos de los dos conjugados complejos (raíces) se muestran por medio de la curva (círculo) que se muestra en la figura 2.41. Para $m \rightarrow \infty$, ambas raíces conjugadas complejas convergen a cero ($s_1, s_2 \rightarrow 0$).

Tabla 2.2

Valor de k	Valor de s_1	Valor de s_2
0	0	-16
16	-1.0718	-14.9282
32	-2.3431	-13.6569
48	-4	-12
64	-8	-8
80	$-8 + 4i$	$-8 - 4i$
96	$-8 + 5.6569i$	$-8 - 5.6569i$
112	$-8 + 6.9282i$	$-8 - 6.9282i$
128	$-8 + 8i$	$-8 - 8i$

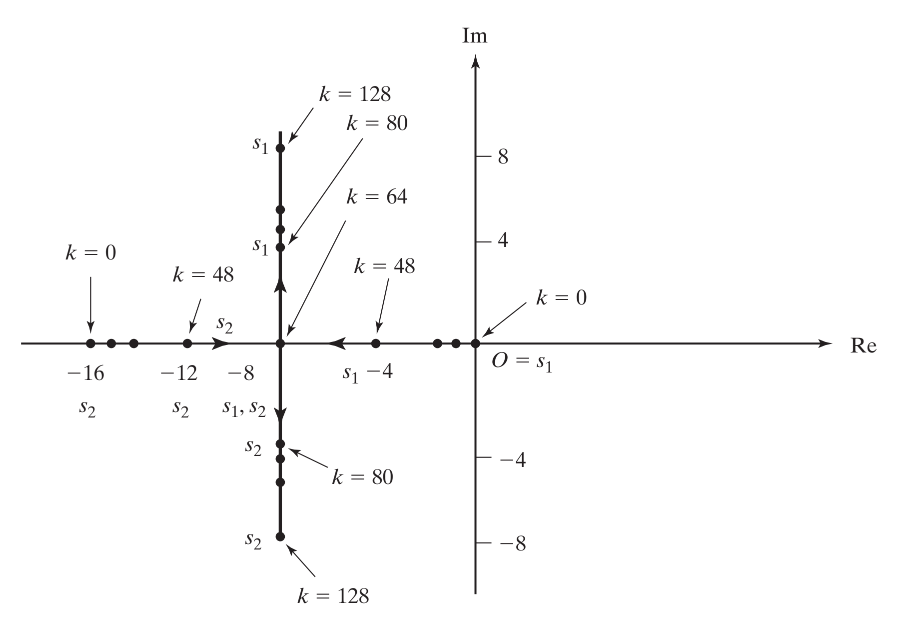


Figura 2.40 Gráfica del lugar geométrico de las raíces con variación de la constante de resorte (k).

Tabla 2.3

Valor de m	Valor de s_1	Valor de s_2
1	−1.6148	−12.3852
2	−2.0	−5.0
2.1	−2.0734	−4.5932
2.4	−2.5	−3.3333
2.45	−2.871	−2.871
2.5	$-2.8 + 0.4000i$	$-2.8 + 0.4000i$
3	$-2.3333 + 1.1055i$	$-2.3333 - 1.1055i$
5	$-1.4 + 1.4283i$	$-1.4 - 1.4283i$
8	$-0.8750 + 1.3169i$	$-0.8750 - 1.3169i$
10	$-0.7000 + 1.2288i$	$-0.7000 - 1.2288i$
14	$-0.5000 + 1.0856i$	$-0.5000 - 1.0856i$
20	$-0.3500 + 09367i$	$-0.3500 - 09367i$
30	$-0.2333 + 0.7824i$	$-0.2333 - 0.7824i$
40	$-0.1750 + 06851i$	$-0.1750 - 06851i$
50	$-0.1400 + 0.6167i$	$-0.1400 - 0.6167i$
100	$-0.0700 + 0.4417i$	$-0.0700- 0.4417i$
1000	$-0.0070 + 0.1412i$	$-0.0070 - 0.1412i$

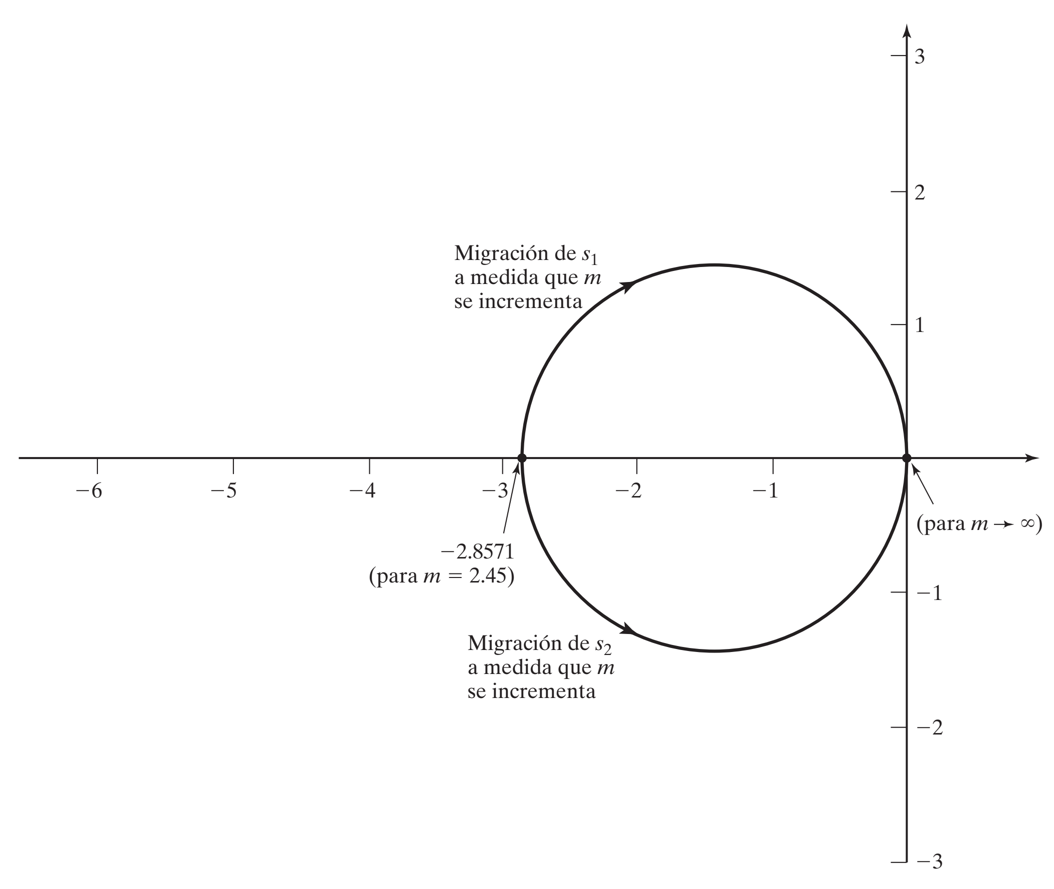


Figura 2.41 Curva del lugar geométrico de las raíces con variación de la masa (m).

2.9 Vibración libre con amortiguamiento de Coulomb

En muchos sistemas mecánicos se utilizan amortiguadores de *Coulomb* o de *fricción seca* por su sencillez y comodidad mecánica [2.9]. Inclusive, en estructuras vibratorias, siempre que los componentes se deslizan entre sí, el amortiguamiento de fricción seca aparece internamente. Como se manifestó en la sección 1.9, el amortiguamiento de Coulomb surge cuando los cuerpos se deslizan sobre superficies secas. La ley de Coulomb de fricción seca establece que, cuando dos cuerpos están en contacto, la fuerza requerida para producir deslizamiento es proporcional a la fuerza normal que actúa en el plano de contacto. Por lo tanto, la fuerza de fricción F se expresa como

$$F = \mu N = \mu W = \mu m g \tag{2.125}$$

donde N es la fuerza normal, igual al peso de la masa ($W = mg$) y μ es el coeficiente de deslizamiento o fricción cinética. El valor del coeficiente de fricción (μ) depende de los materiales en contacto y de la condición de las superficies en contacto. Por ejemplo, $\mu \simeq 0.1$ para metal sobre metal (lubricado), 0.3 para metal sobre metal (no lubricado), casi 1.0 para caucho sobre metal. La fuerza de fricción actúa en una dirección opuesta a la dirección de la velocidad. En ocasiones al amortiguamiento de Coulomb se le conoce como *amortiguamiento constante*, puesto que la fuerza de amortiguamiento es independiente del amortiguamiento del desplazamiento y la velocidad; depende sólo de la fuerza normal N entre las superficies deslizantes.

2.9.1 Ecuación de movimiento

Considere un sistema de un solo grado de libertad con fricción seca como se muestra en la figura 2.42(a). Como la fuerza de fricción varía con la dirección de la velocidad, tenemos que considerar dos casos, como se indica en las figuras 2.42(b) y (c).

Caso 1. Cuando x y dx/dt son positivas o cuando x es negativa y dx/dt es positiva (es decir, en el semiciclo durante el cual la masa se mueve de izquierda a derecha), la ecuación de movimiento se obtiene aplicando la segunda ley del movimiento de Newton (vea la figura 2.42(b)):

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + kx = -\mu N \tag{2.126}$$

Ésta es una ecuación diferencial no homogénea de segundo grado. La solución se verifica sustituyendo la ecuación (2.127) en la ecuación (2.126):

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \tag{2.127}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de vibración y A_1 y A_2 son constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales de este semiciclo.

Caso 2. Cuando x es positiva y dx/dt es negativa o cuando x es negativa y dx/dt es negativa (es decir, en el semiciclo durante el cual la masa se mueve de derecha a izquierda), la ecuación de movimiento se deriva desde la ecuación 2.42(c) como

$$-kx + \mu N = m\ddot{x} \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + kx = \mu N \tag{2.128}$$

La solución de la ecuación (2.128) es

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \tag{2.129}$$

donde A_3 y A_4 son constantes que se tienen que hallar a partir de las condiciones iniciales de este semiciclo. El término $\mu N/k$ que aparece en las ecuaciones (2.127) y (2.129) es una constante que representa el desplazamiento virtual del resorte sometido a la fuerza μN, aplicada como una fuerza estática. Las ecuaciones (2.127) y (2.129) indican que en cada semiciclo el movimiento es armónico, con la posición de equilibrio cambiando de $\mu N/k$ a$-(\mu N/k)$ cada medio ciclo, como se muestra en la figura 2.43.

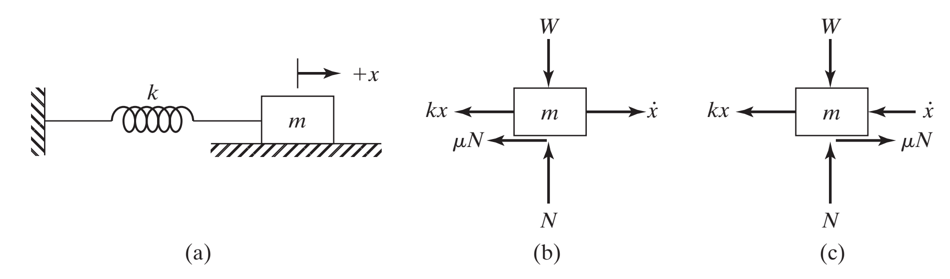


Figura 2.42 Sistema de resorte y masa con amortiguamiento de Coulomb.

2.9.2 Solución

Las ecuaciones (2.126) y (2.128) se pueden expresar como una sola ecuación (aplicando $N = mg$):

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \tag{2.130}$$

donde sgn(y) se conoce como función signum (o signo), cuyo valor se define como 1 para $y > 0$, -1 para $y < 0$, y 0 para $y = 0$. Se ve que la ecuación (2.130) es una ecuación diferencial no lineal para la cual no existe una solución analítica simple. Se pueden utilizar métodos numéricos para resolver la ecuación (2.130) de manera cómoda (vea el ejemplo 2.21). Sin embargo, la ecuación (2.130) se puede resolver analíticamente si dividimos el eje de tiempo en segmentos separados por $\dot{x} = 0$ (es decir, intervalos de tiempo con diferentes direcciones de movimiento). Para hallar la solución siguiendo este procedimiento, supongamos las condiciones iniciales como

$$x(t = 0) = x_0$$
$$\dot{x}(t = 0) = 0 \tag{2.131}$$

Esto es, el sistema se inicia con velocidad y desplazamiento cero x_0 en el instante $t = 0$. Como $x = x_0$ en el instante $t = 0$, el movimiento se inicia de derecha a izquierda. Sean $x_0, x_1, x_2, \ldots$ las amplitudes del movimiento en semiciclos sucesivos. Si utilizamos las ecuaciones (2.129) y (2.131), podemos evaluar las constantes A_3 y A_4:

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, \qquad A_4 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación (2.129) se escribe como

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \tag{2.132}$$

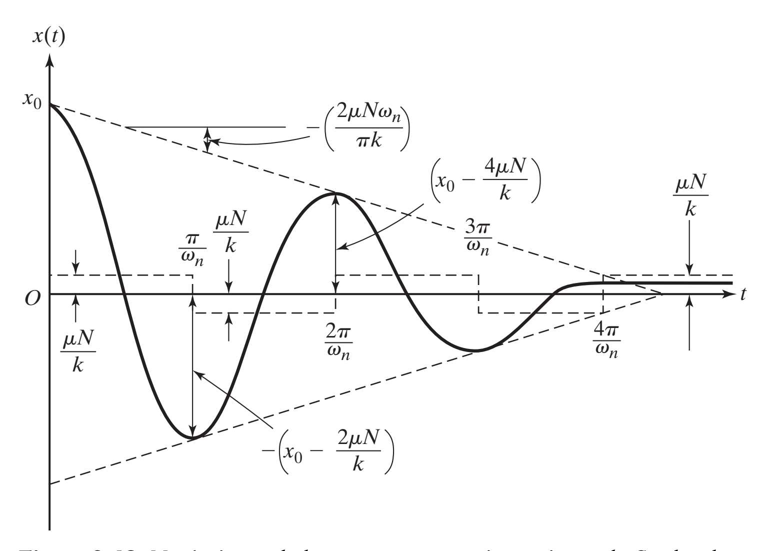


Figura 2.43 Movimiento de la masa con amortiguamiento de Coulomb.

Esta solución es válida sólo para el semiciclo dado, es decir para $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$. Cuando $t = \pi/\omega_n$, la masa estará en su posición extrema izquierda y su desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio se determina con la ecuación (2.132):

$$-x_1 = x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \pi + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

Como el movimiento se inició con un desplazamiento de $x = x_0$ y, en un semiciclo, el valor de x se volvió $-[x_0 - (2\mu N/k)]$, la reducción de la magnitud de x en el tiempo π/ω_n es $2\mu N/k$.

En el segundo semiciclo, la masa se mueve de izquierda a derecha, así que se tiene que utilizar la ecuación (2.127). Las condiciones iniciales en este semiciclo son

$$x(t = 0) = \text{valor de } x \text{ en el instante } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ en la ecuación (2.132)} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

y

$$\dot{x}(t = 0) = \text{valor de } \dot{x} \text{ en el instante } t = \frac{\pi}{\omega_n} \text{ en la ecuación. (2.132)}$$

$$= \left\{\text{valor de } -\omega_n\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \text{sen}\, \omega_n t \text{ en } t = \frac{\pi}{\omega_n}\right\} = 0$$

Por lo tanto, las constantes en la ecuación (2.127) son

$$-A_1 = -x_0 + \frac{3\mu N}{k}, \qquad A_2 =$$

de modo que la ecuación (2.127) se escribe como

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right)\cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \tag{2.133}$$

Esta ecuación es válida sólo para el segundo semiciclo, es decir, para $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$. Al final de este semiciclo el valor de $x(t)$ es

$$x_2 = x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) \text{ en la ecuación (2.133)} = x_0 - \frac{4\mu N}{k}$$

y

$$\dot{x}\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) \text{ en la ecuación (2.133)} = 0$$

Éstas se convierten en las condiciones iniciales para el tercer semiciclo, y el procedimiento continúa hasta que el movimiento se detiene. El movimiento cesa cuando $x_n \leq \mu N/k$, puesto que la fuerza de restauración ejercida por el resorte (kx) será entonces menor que la fuerza de fricción μN. Por lo tanto, el número de semiciclos (r) que transcurren antes de que el movimiento cese es

$$x_0 - r\frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k}$$

es decir,

$$r \geq \left\{ \frac{x_0 - \dfrac{\mu N}{k}}{\dfrac{2\mu N}{k}} \right\} \tag{2.134}$$

Observe las siguientes características de un sistema con amortiguamiento de Coulomb:

1. La ecuación de movimiento es no lineal con amortiguamiento de Coulomb, en tanto que es lineal con amortiguamiento viscoso.
2. La frecuencia natural del sistema no se altera si se agrega el amortiguamiento de Coulomb, mientras se reduce con la adición de amortiguamiento viscoso.
3. El movimiento es periódico con amortiguamiento de Coulomb, mientras que puede ser no periódico en un sistema viscosamente amortiguado (sobreamortiguado).
4. El sistema entra en reposo después de un cierto tiempo con amortiguamiento de Coulomb, mientras que el movimiento teóricamente continúa por siempre (tal vez con una amplitud infinitesimalmente pequeña) con amortiguamiento viscoso y de histéresis.
5. La amplitud se reduce linealmente con amortiguamiento de Coulomb, mientras que se reduce exponencialmente con amortiguamiento viscoso.
6. En cada ciclo sucesivo, la amplitud del movimiento se reduce en la cantidad $4\mu N/k$, de modo que las amplitudes al final de cualquiera de los dos ciclos consecutivos están relacionadas:

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{k} \tag{2.135}$$

A medida que la amplitud se reduce en una cantidad $4\mu N/k$ en un ciclo (es decir, en el tiempo $2\pi/\omega_n$), la pendiente de las líneas rectas envolventes (punteadas) en la figura 2.43 es

$$-\left(\frac{4\mu N}{k}\right) \bigg/ \left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = -\left(\frac{2\mu N \omega_n}{\pi k}\right)$$

Por lo común, la posición final de la masa se desplaza de su posición de equilibrio ($x = 0$) y representa un desplazamiento permanente en el cual la fuerza de fricción está enlazado. Un leve golpeteo hará que la masa llegue a su posición de equilibrio.

2.9.3 Sistemas torsionales con amortiguamiento de Coulomb

Si un par de torsión de fricción constante actúa en un sistema torsional, la ecuación que rige las oscilaciones angulares del sistema se deriva de una manera similar a las ecuaciones (2.126) y (2.128), como

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = -T \tag{2.136}$$

y

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = T \tag{2.137}$$

donde T indica el par de torsión de amortiguamiento constante (similar a μN para vibraciones lineales). Las soluciones de las ecuaciones (2.136) y (2.137) son similares a las de las vibraciones lineales. En particular, la frecuencia de vibración es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \tag{2.138}$$

y la amplitud del movimiento al final del semiciclo r-ésimo (θ_r) es

$$\theta_r = \theta_0 - r\frac{2T}{k_t} \tag{2.139}$$

donde θ_0 es el desplazamiento angular inicial en $t = 0$ (con $\dot{\theta} = 0$ en $t = 0$). El movimiento cesa cuando

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \dfrac{T}{k_t}}{\dfrac{2T}{k_t}} \right\} \tag{2.140}$$

Ejemplo 2.14 Coeficiente de fricción a partir de posiciones medidas de la masa

Un bloque de metal, colocado sobre una superficie rugosa, se une a un resorte y se le imparte un desplazamiento inicial de 10 cm a partir de su posición de equilibrio. Después de cinco ciclos de oscilación en 2 s, se ve que la posición final del bloque está a 1 cm de su posición de equilibrio. Encuentre el coeficiente de fricción entre la superficie y el bloque de metal.

Solución: Como se observó que en 2 s ocurrieron cinco ciclos de oscilaciones, el periodo (τ_n) es $2/5 = 0.4$ s, y por consiguiente la frecuencia de oscilación es $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\tau_n} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.708$ rad/s. Como la amplitud de oscilación se reduce en

$$\frac{4\mu N}{k} = \frac{4\mu mg}{k}$$

en cada ciclo, la reducción de amplitud en cinco ciclos es

$$5\left(\frac{4\mu mg}{k}\right) = 0.10 - 0.01 = 0.09 \text{ m}$$

o

$$\mu = \frac{0.09k}{20mg} = \frac{0.09\omega_n^2}{20g} = \frac{0.09(15.708)^2}{20(9.81)} = 0.1132$$

■

Ejemplo 2.15 Polea sometida a amortiguamiento de Coulomb

Una flecha de acero de 1 m de largo y 50 mm de diámetro tiene un extremo fijo y en otro tiene una polea de momento de inercia de masa de 25 kg-m^2. Un freno de mano ejerce un par de torsión de fricción constante de 400 N-m alrededor de la circunferencia de la polea. Si la polea se desplaza 6° y luego se suelta, determine (1) la cantidad de ciclos antes de que la polea se detenga, y (2) la posición final de la polea.

Solución:

1. La ecuación (2.140) da la cantidad de semiciclos que transcurren antes de que el movimiento angular de la polea cese:

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \dfrac{T}{k_t}}{\dfrac{2T}{k_t}} \right\} \tag{E.1}$$

donde θ_0 = desplazamiento angular inicial = 6º = 0.10472 rad, k_t = constante de resorte torsional de la flecha dada por

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{(8 \times 10^{10})\left\{\dfrac{\pi}{32}(0.05)^4\right\}}{1} = 49{,}087.5 \text{ N-m/rad}$$

y T = par de torsión de fricción constante aplicado a la polea = 400 N-m. La ecuación (E.1) da

$$r \geq \frac{0.10472 - \left(\dfrac{400}{49{,}087.5}\right)}{\left(\dfrac{800}{49{,}087.5}\right)} = 5.926$$

Por lo tanto, el movimiento cesa después de seis semiciclos.

2. La ecuación (2.120) da el desplazamiento angular después de seis semiciclos:

$$\theta = 0.10472 - 6 \times 2\left(\frac{400}{49{,}087.5}\right) = 0.006935 \text{ rad} = 0.39734°$$

Por lo tanto, la polea se detiene a 0.39734º desde la posición de equilibrio en el mismo lado del desplazamiento inicial.

■

2.10 Vibración libre con amortiguamiento histerético

Considere el sistema de resorte y amortiguador viscoso de la figura 2.44(a). Para este sistema, la fuerza F necesaria para impartir un desplazamiento $x(t)$ está dada por

$$F = kx + c\dot{x} \tag{2.141}$$

Para un movimiento armónico de frecuencia ω y amplitud X,

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t \tag{2.142}$$

Las ecuaciones (2.141) y (2.142) dan por resultado

$$\begin{aligned} F(t) &= kX \text{ sen } \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - (X \text{ sen } \omega t)^2} \\ &= kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2} \end{aligned} \tag{2.143}$$

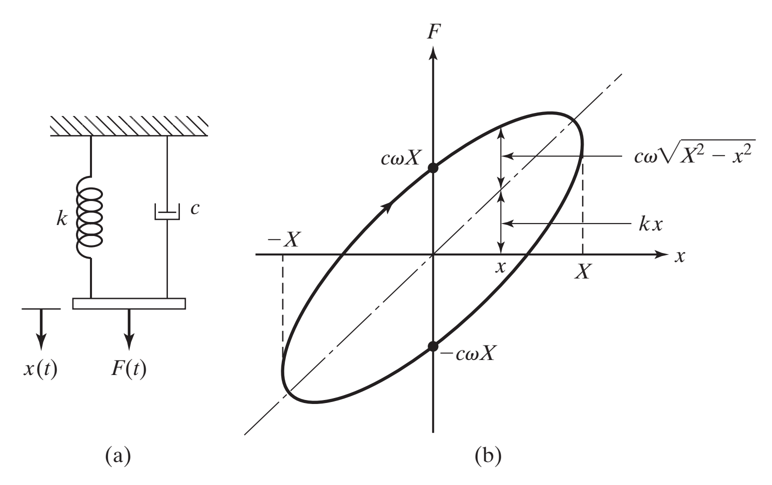


Figura 2.44 Sistema de resorte y amortiguador viscoso.

Cuando se traza F contra x, la ecuación (2.143) representa un lazo cerrado, como se muestra en la figura 2.44(b). El área del lazo indica la energía disipada por el amortiguador en un ciclo de movimiento y se expresa como

$$\Delta W = \oint F\,dx = \int_0^{2\pi/\omega} (kX \operatorname{sen} \omega t + cX\omega \cos \omega t)(\omega X \cos \omega t)dt$$
$$= \pi\omega c X^2 \tag{2.144}$$

La ecuación (2.144) también se derivó en la sección 2.6.4 (vea la ecuación (2.98)).

Como se enunció en la sección 1.9, el amortiguamiento originado por la fricción entre los planos internos que deslizan o resbalan a medida que el material se deforma, se llama amortiguamiento de histéresis (o sólido o estructural). Éste hace que se forme un lazo de histéresis en la curva de esfuerzo-deformación o fuerza-desplazamiento (vea la figura 2.45(a)). La pérdida de energía en un ciclo de carga y descarga es igual al área encerrada por el lazo de histéresis [2.11-2.13]. La semejanza entre las figuras 2.44(b) y 2.45(a) se puede usar para definir una constante de amortiguamiento de histéresis. Se encontró experimentalmente que la pérdida de energía por ciclo a causa de la fricción interna es independiente de la frecuencia pero aproximadamente proporcional al cuadrado de la amplitud. Para lograr este comportamiento observado a partir de la ecuación (2.144), se supone que el coeficiente de amortiguamiento c es inversamente proporcional a la frecuencia como

$$c = \frac{h}{\omega} \tag{2.145}$$

donde h se conoce como constante de amortiguamiento de histéresis. Las ecuaciones (2.144) y (2.145) dan por resultado

$$\Delta W = \pi h X^2 \tag{2.146}$$

Rigidez compleja. En la figura 2.44(a), el resorte y el amortiguador están conectados en paralelo, y para un movimiento armónico general, $x = Xe^{i\omega t}$, la fuerza es

$$F = kXe^{i\omega t} + c\omega iXe^{i\omega t} = (k + i\omega c)x \tag{2.147}$$

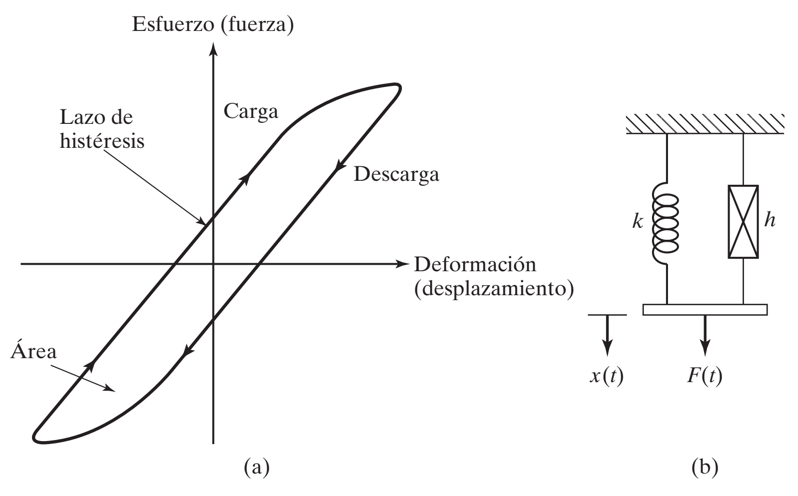


Figura 2.45 Lazo de histéresis.

Asimismo, si un resorte y un amortiguador de histéresis se conectan en paralelo, como se muestra en la figura 2.45(b), la relación fuerza-desplazamiento se expresa como

$$F = (k + ih)x \tag{2.148}$$

donde

$$k + ih = k\left(1 + i\frac{h}{k}\right) = k(1 + i\beta) \tag{2.149}$$

se conoce como rigidez compleja del sistema y $\beta = h/k$ es una constante que indica una medida de amortiguamiento sin unidades.

Respuesta del sistema. En función de β, la pérdida de energía por ciclo se expresa como

$$\Delta W = \pi k \beta X^2 \tag{2.150}$$

Con amortiguamiento de histéresis se puede considerar que el movimiento es casi armónico (puesto que ΔW es pequeño), y la reducción de la amplitud por ciclo se determina utilizando un balance de energía. Por ejemplo, las energías en los puntos P y Q (separadas por un semiciclo) en la figura 2.46 están relacionadas como

$$\frac{kX_j^2}{2} - \frac{\pi k \beta X_j^2}{4} - \frac{\pi k \beta X_{j+0.5}^2}{4} = \frac{kX_{j+0.5}^2}{2}$$

o

$$\frac{X_j}{X_{j+0.5}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}} \tag{2.151}$$

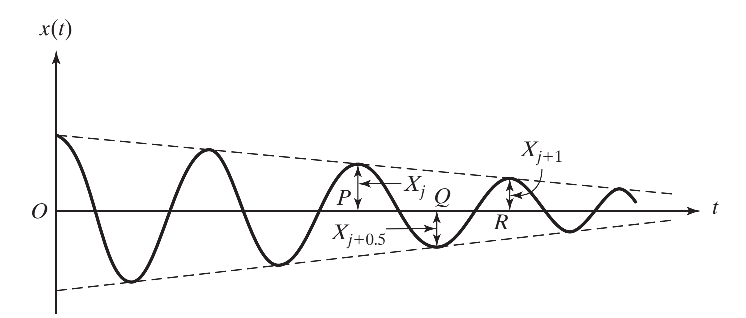


Figura 2.46 Respuesta de un sistema histeréticamente amortiguado.

Asimismo, las energías en los puntos Q y R resultan

$$\frac{X_{j+0.5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta}} \tag{2.152}$$

La multiplicación de las ecuaciones (2.151) y (2.152) da

$$\frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2 + \pi\beta}{2 - \pi\beta} = \frac{2 - \pi\beta + 2\pi\beta}{2 - \pi\beta} \simeq 1 + \pi\beta = \text{constante} \tag{2.153}$$

El decremento logarítmico histerético se define como

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) \simeq \ln(1 + \pi\beta) \simeq \pi\beta \tag{2.154}$$

Como se supone que el movimiento es aproximadamente armónico, la frecuencia correspondiente está definida por [2.10]:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.155}$$

La relación de amortiguamiento viscoso equivalente ζ_{eq} se determina igualando la relación del decremento logarítmico δ:

$$\delta \simeq 2\pi\zeta_{\text{eq}} \simeq \pi\beta = \frac{\pi h}{k}$$

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2k} \tag{2.156}$$

Por lo tanto, la constante de amortiguamiento equivalente c_{eq} está dada por

$$c_{\text{eq}} = c_c \cdot \zeta_{\text{eq}} = 2\sqrt{mk} \cdot \frac{\beta}{2} = \beta\sqrt{mk} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{h}{\omega} \tag{2.157}$$

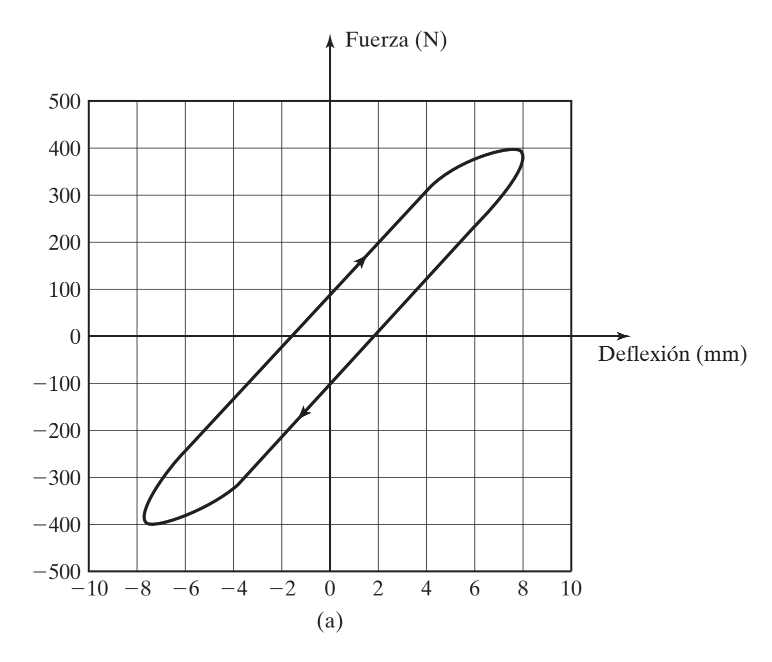
Observe que el método de encontrar un coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente para un sistema estructuralmente amortiguado es válido sólo para excitación armónica. El análisis anterior supone que la respuesta del sistema es aproximadamente armónica a la frecuencia ω.

Ejemplo 2.16 Estimación de la constante de amortiguamiento histerético

Las mediciones experimentales en una estructura arrojaron los datos de fuerza-deflexión mostrados en la figura 2.47. A partir de estos datos, calcule la constante de amortiguamiento histerético β y el decremento logarítmico δ.

Solución:

Método: Igualamos la energía disipada en un ciclo (área encerrada por el lazo de histéresis) a ΔW de la ecuación (2.146).



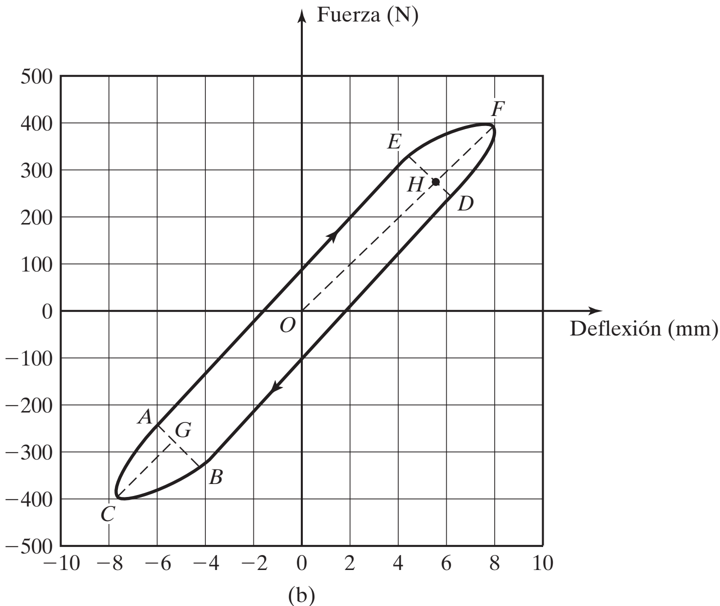


Figura 2.47 Curva de fuerza-deflexión.

El área encerrada por la curva de histéresis proporciona la energía disipada en cada ciclo de carga completo. Cada cuadro de la figura 2.47 indica $100 \times 2 = 200$ N-mm. El área encerrada por el lazo se puede hallar como área ACB + área $ABDE$ + área $DFE \simeq \frac{1}{2}(AB)(CG) + (AB)(AE) + \frac{1}{2}(DE)(FH) = \frac{1}{2}(1.25)(1.8) + (1.25)(8) + \frac{1}{2}(1.25)(1.8) = 12.25$ unidades cuadradas. Esta área representa una energía de $12.25 \times 200(1000 = 2.5$ N-m. A partir de la ecuación (2.146), tenemos

$$\Delta W = \pi h X^2 = 2.5 \text{ N-m} \tag{E.1}$$

Como la deflexión máxima X es de 0.008 m y la pendiente de la curva fuerza-deflexión (dada aproximadamente por la pendiente de la línea OF) es $k = 400/8 = 50$ N/mm = 50,000 N/m, la constante de amortiguamiento histéretico h es

$$h = \frac{\Delta W}{\pi X^2} = \frac{2.5}{\pi(0.008)^2} = 12{,}433.95 \tag{E.2}$$

y por consiguiente

$$\beta = \frac{h}{k} = \frac{12{,}433.95}{50{,}000} = 0.248679$$

El decremento logarítmico se puede hallar como

$$\delta \simeq \pi\beta = \pi(0.248679) = 0.78125 \tag{E.3}$$

■

Ejemplo 2.17 Respuesta de una estructura de puente histeréticamente amortiguada

La estructura de un puente se modela como un sistema de un solo grado de libertad con una masa equivalente de 5×10^5 kg y una rigidez equivalente de 25×10^6 N/m. Durante una prueba de vibración libre, se encontró que la relación de amplitudes sucesivas era de 1.04. Calcule la constante de amortiguamiento de la estructura (β) y la respuesta de vibración libre del puente.

Solución: Utilizando la relación de amplitudes sucesivas, la ecuación (2.154) produce el decremento logarítmico de histéresis (δ) como

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln(1.04) = \ln(1 + \pi\beta)$$

o

$$1 + \pi\beta = 1.04 \quad \text{o} \quad \beta = \frac{0.04}{\pi} = 0.0127$$

El coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente (c_{eq}) se determina a partir de la ecuación (2.157) como

$$c_{eq} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{\beta k}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \beta\sqrt{km} \tag{E.1}$$

Aprovechando los valores conocidos de la rigidez equivalente (k) y la masa equivalente (m) del puente, la ecuación (E.1) da por resultado

$$c_{\text{eq}} = (0.0127)\sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} = 44.9013 \times 10^3 \text{ N-s/m}$$

La constante de amortiguamiento crítico equivalente del puente se calcula aplicando la ecuación (2.65) como

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} = 7071.0678 \times 10^3 \text{ N-s/m}$$

Como $c_{\text{eq}} < c_c$, el puente está subamortiguado y por consiguiente la ecuación (2.72) da su respuesta de vibración libre como

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}$$

donde

$$\zeta = \frac{c_{\text{eq}}}{c_c} = \frac{40.9013 \times 10^3}{7071.0678 \times 10^3} = 0.0063$$

y x_0 y $\dot{x}_0$ indican el desplazamiento y la velocidad iniciales al comenzar la vibración libre.

■

2.11 Estabilidad de sistemas

La estabilidad es una de las características más importantes de cualquier sistema vibratorio. Aun cuando el término *estabilidad* se puede definir de muchas maneras según la clase de sistema o el punto de vista, consideramos la definición de sistemas lineales e invariables con el tiempo (es decir, sistemas cuyos parámetros m, c y k no cambian con el tiempo). Un sistema se define como *asintóticamente estable* (llamado *estable* en literatura de controles) si su respuesta de vibración libre tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Un sistema se considera *inestable* si su respuesta de vibración libre crece ilimitadamente (tiende a infinito) a medida que el tiempo tiende a infinito. Por último, se dice que un sistema es *estable* (llamado *marginalmente estable* en literatura de controles) si su respuesta de vibración libre ni decae ni crece, sino que permanece constante u oscila a medida que el tiempo tiende a infinito. Es evidente que un sistema inestable cuya respuesta de vibración libre crece sin límites puede dañar el sistema, las propiedades adyacentes y la vida humana. Usualmente, los sistemas dinámicos se diseñan con límites para impedir que las respuestas crezcan sin límite.

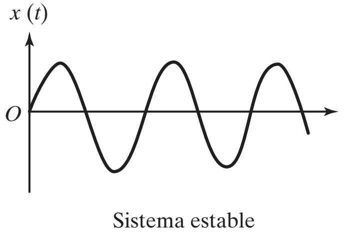
Como se verá en los capítulos 3 y 4, la respuesta total de un sistema vibratorio, sometido a fuerzas y/o excitaciones externas, se compone de dos partes: la respuesta forzada y la respuesta de vibración libre. Para tales sistemas, las definiciones de sistemas asintóticamente estables, inestables y estables antes dadas siguen siendo válidas. Esto implica que, para sistemas estables, únicamente la respuesta forzada permanece a medida que la respuesta de vibración se acerca a cero al tender el tiempo a infinito.

La estabilidad se puede interpretar en función de las raíces características del sistema. Como se vio en la sección 2.7 las raíces situadas en el semiplano izquierdo dan o un decaimiento exponencial puro o respuestas de vibración libre sinusoidales amortiguadas. Estas respuestas decaen a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Por lo tanto, los sistemas cuyas raíces características quedan en la mitad izquierda del plano s (con una parte negativa real) serán asintóticamente estables. Las raíces que quedan en la mitad derecha del semiplano dan por resultado o respuestas de vibración libre puras exponencialmente crecientes, o respuestas de vibración libre senoidales exponencialmente crecientes. Estas respuestas de vibración tienden a infinito en cuanto el tiempo se acerca a infinito. Por lo tanto, los sistemas cuyas raíces características quedan en la mitad derecha del plano s (con una parte real positiva) serán inestables. Finalmente, las raíces que quedan en el eje imaginario del plano s producen oscilaciones enoidales puras como respuesta de vibración libre. La amplitud de estas respuestas ni se incrementa ni disminuye a medida que el tiempo se incrementa. Por lo tanto, los sistemas cuyas raíces características quedan en el eje imaginario del plano s (con parte real cero) serán estables.[3]

Notas:

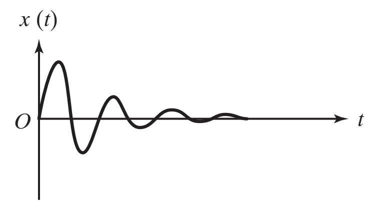
1. Es evidente, por la definición dada, que los signos de los coeficientes de la ecuación característica, ecuación (2.107), determinan el comportamiento de estabilidad de un sistema. Si hay cualquier cantidad de términos negativos o si falta cualquier término en el polinomio en s, entonces una de las raíces será positiva, lo que producirá un comportamiento inestable del sistema, por ejemplo. Este aspecto se considera más a fondo en las secciones 3.11 y 5.8 en la forma del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.
2. En un sistema inestable, la respuesta de vibración libre puede crecer sin límite, sin oscilaciones o sin límite con oscilaciones. El primer comportamiento se denomina *inestabilidad divergente* y al segundo se le llama *inestabilidad de vibración*. Estos casos también se conocen como *vibración autoexcitada* (vea la sección 3.11).
3. Si un modelo lineal es asintóticamente estable, en ese caso no es posible encontrar un conjunto de condiciones iniciales con las cuales la respuesta tienda a infinito. Por otra parte, si el modelo lineal del sistema es inestable, es posible que ciertas condiciones iniciales pudieran hacer que la respuesta tienda a cero a medida que se incrementa el tiempo. Como un ejemplo, considere un sistema regido por la ecuación de movimiento $\ddot{x} - x = 0$ con raíces características dadas por $s_{1,2} = \mp 1$. Por lo tanto, la respuesta está dada por $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}$, donde C_1 y C_2 son constantes. Si las condiciones iniciales se especifican como $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = -1$, vemos que $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ y por consiguiente la respuesta es $x(t) = e^{-t}$, la cual tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito.
4. En las figuras 2.48(a)−(d) se muestran respuestas comunes correspondientes a diferentes tipos de estabilidad.
5. La estabilidad de un sistema también se puede explicar respecto de su energía. Según su esquema, se considera que un sistema es asintóticamente estable, estable, o inestable si su energía se reduce, se mantiene constante o se incrementa con el tiempo. Esta idea constituye la base del criterio de estabilidad de Lyapunov [2.14, 2.15]
6. La estabilidad de un sistema también se puede investigar con base en qué tan sensible sea la respuesta o movimiento a pequeñas perturbaciones (o variaciones) en los parámetros (*m*, *c* **y** *k*) y/o a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales.

[3]En rigor, el enunciado es verdadero sólo si las raíces que quedan en el eje imaginario aparecen con multiplicidad uno. Si tales raíces aparecen con multiplicidad $n > 1$, el sistema será inestable porque la respuesta de vibración libre de tales sistemas será de la forma Ct^n sen $(\omega t + \phi)$.



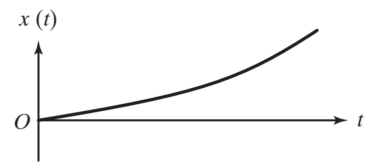
Sistema estable

(a)



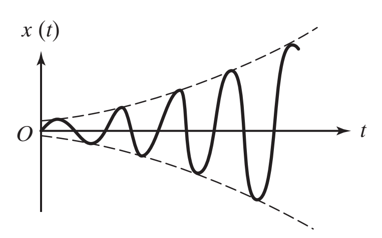
Sistema asintóticamente estable

(b)



Sistema inestable (con inestabilidad de divergente)

(c)



Sistema inestable (con inestabilidad de vibración)

(d)

Figura 2.48 Diferentes tipos de estabilidad.

Ejemplo 2.18 Estabilidad de un sistema

Considere una barra rígida uniforme, de masa m y largo l, con un extremo pivotado y el otro conectado simétricamente por dos resortes, como se muestra en la figura 2.49. Suponiendo que los resortes no están alargados cuando la barra es vertical, obtenga la ecuación de movimiento del sistema para desplazamientos angulares pequeños (θ) de la barra alrededor del pivote, e investigue el comportamiento de estabilidad del sistema.

Solución: Cuando la barra se desplaza un ángulo θ, la fuerza en cada resorte es kl sen θ, la fuerza total es $2kl$ sen θ. La fuerza de la gravedad $W = mg$ actúa verticalmente hacia abajo a través del centro de gravedad, G. El momento en torno al punto de rotación O debido a la aceleración angular $\ddot{\theta}$ es $J_0\ddot{\theta} = (ml^2/3)\ddot{\theta}$. Por lo tanto la ecuación de movimiento de rotación de la barra, alrededor del punto O, se escribe como

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (2kl \text{ sen } \theta)l \cos\theta - W\frac{l}{2}\text{sen } \theta = 0 \tag{E.1}$$

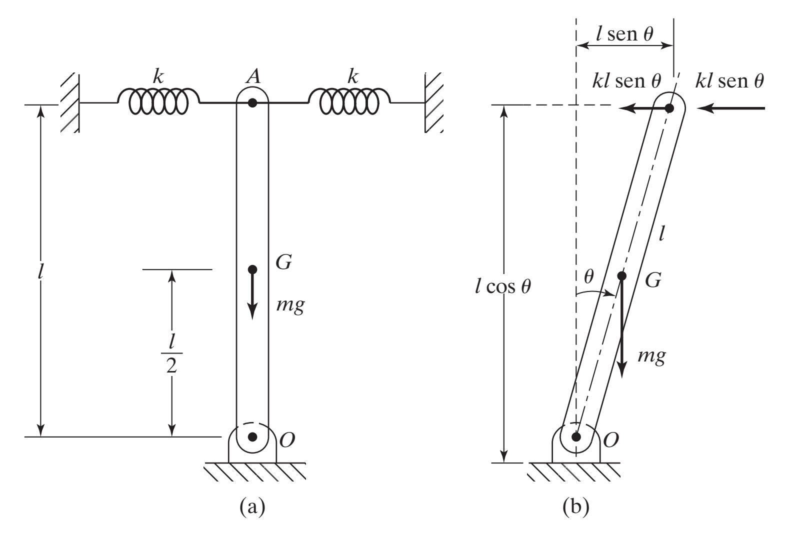


Figura 2.49 Estabilidad de una barra rígida.

Para oscilaciones pequeñas, la ecuación (E.1) se reduce a

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + 2kl^2\theta - \frac{Wl}{2}\theta = 0 \tag{E.2}$$

o

$$\ddot{\theta} + \alpha^2\theta = 0 \tag{E.3}$$

donde

$$\alpha^2 = \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2}\right) \tag{E.4}$$

La ecuación característica está dada por

$$s^2 + \alpha^2 = 0 \tag{E.5}$$

y por tanto la solución de la ecuación (E.2) depende del signo de α^2 como se indica a continuación.

Caso 1. Cuando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 > 0$, la solución de la ecuación (E.2) representa un sistema estable con oscilaciones estables y se expresa como

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t \tag{E.6}$$

donde A_1 y A_2 son constantes y

$$\omega_n = \left(\frac{(12kl^2 - 3Wl}{2ml^2}\right)^{1/2} \tag{E.7}$$

Caso 2. Cuando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 = 0$, la ecuación se reduce a $\ddot{\theta} = 0$ y la solución de obtiene directamente al integrar dos veces como

$$\theta(t) = C_1 t + C_2 \tag{E.8}$$

Para las condiciones iniciales $\theta(t = 0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$, la solución es

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \tag{E.9}$$

La ecuación (E.9) muestra que el sistema es inestable con el desplazamiento angular incrementándose linealmente a una velocidad constante θ_0. Sin embargo, si $\theta_0 = 0$, la ecuación (E.9) indica una posición estable o de equilibrio estático con $\theta = \theta_0$; es decir, el péndulo permanece en su posición original, definida por $\theta = \theta_0$.

Caso 3. Cuando $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 < 0$, la solución de la ecuación (E.2) se expresa como

$$\theta(t) = B_1 e^{\alpha t} + B_2 e^{-\alpha t} \tag{E.10}$$

donde B_1 y B_2 son constantes. Para las condiciones iniciales $\theta(t = 0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$, la ecuación (E.10) se escribe como

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha}[(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0)e^{\alpha t} + (\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0)e^{-\alpha t}] \tag{E.11}$$

La ecuación (E.11) muestra que $\theta(t)$ se incrementa exponencialmente con el tiempo, por consiguiente el movimiento es inestable. La razón física de esto es que el momento de restauración producido por el resorte $(2kl^2\theta)$, el cual trata de regresar el sistema a la posición de equilibrio, es menor que el momento de no restauración debido a la gravedad $[-W(l/2)\,\theta]$, el cual trata de alejar la masa de la posición de equilibrio.

■

2.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 2.19 Variaciones de la frecuencia natural y el periodo con deflexión estática

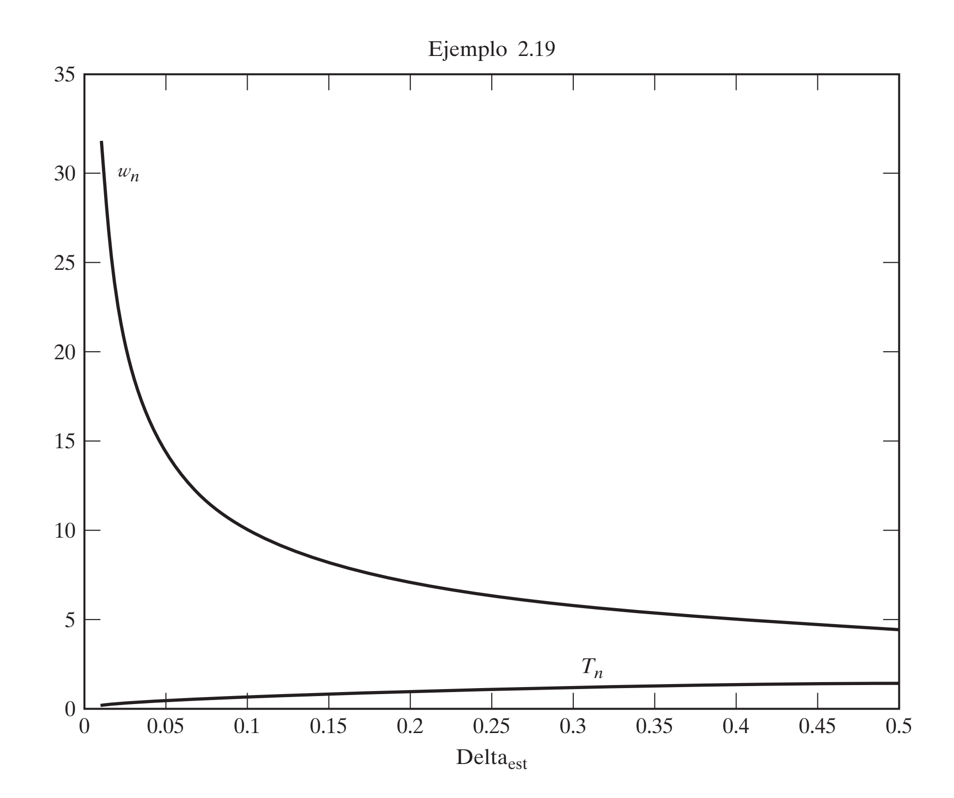
Trace las variaciones de la frecuencia natural y el periodo de tiempo con deflexión estática de un sistema no amortiguado utilizando MATLAB.

Solución: Las ecuaciones (2.28) y (2.30) proporcionan la frecuencia natural (ω_n) y el periodo (τ_n):

$$\omega_n = \left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)^{1/2}, \qquad \tau_n = 2\pi\left(\frac{\delta_{st}}{g}\right)^{1/2}$$

Si se aplica $g = 9.81$ m/s^2, ω_n y τ_n se trazan en el rango de $\delta_{st} = 0$ a 0.5 utilizando el programa MATLAB

```
% Ex2_19.m
g = 9.81;
for i = 1: 101
    t(i) = 0.01 + (0.5-0.01) * (i-1)/100;
    w(i) = (g/t(i))^0.5;
    tao(i) = 2 * pi * (t(i)/g)^0.5;
end
plot(t,w);
gtext('w_n');
hold on;
plot(t, tao);
gtext('T_n');
xlabel('Delta_s_t');
title ('Ejemplo 2.17');
```



Variaciones de la frecuencia natural y el periodo.

■

Ejemplo 2.20 Respuesta de vibración libre de un sistema de resorte-masa

Un sistema de resorte-masa con una masa de 20 lb-s^2 y rigidez de 500 lb/pulg, se somete a un desplazamiento inicial de $x_0 = 3.0$ pulg y una velocidad inicial de $\dot{x}_0 = 4.0$ pulg/s. Trace las variaciones de tiempo del desplazamiento de la masa, la velocidad y la aceleración utilizando MATLAB.

Solución: El desplazamiento de un sistema no amortiguado se expresa como (vea la ecuación (2.23)):

$$x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi_0) \tag{E.1}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{20}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[(3.0)^2 + \left(\frac{4.0}{5.0}\right)^2\right]^{1/2} = 3.1048 \text{ pulg}$$

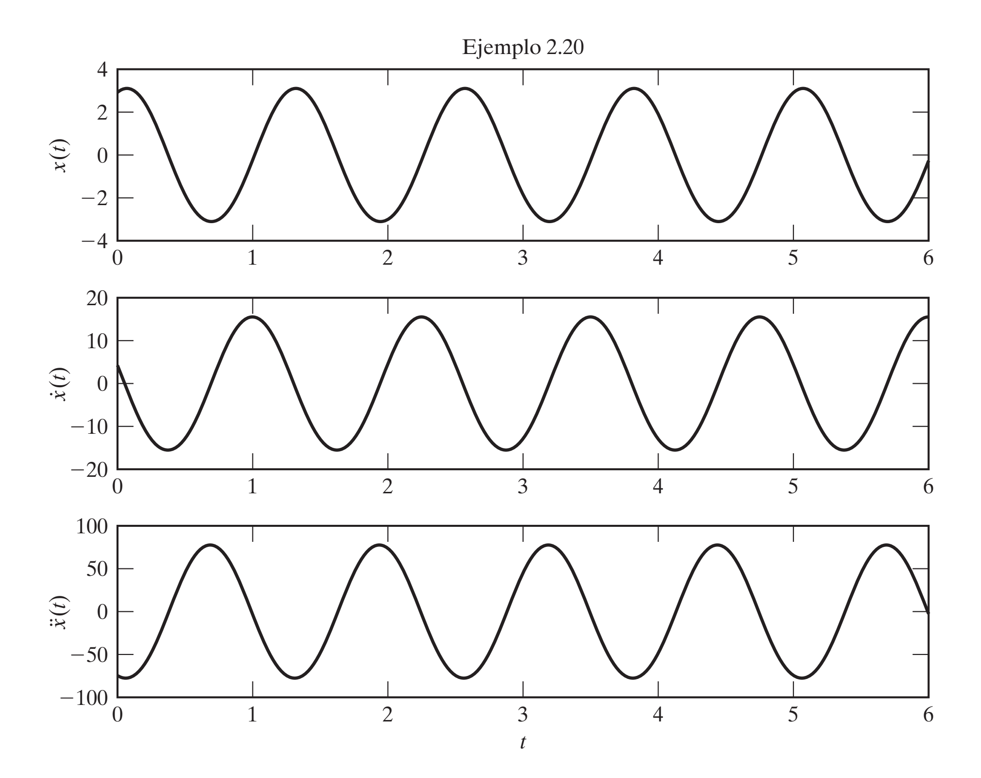
$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(3.0)(5.0)}{4.0}\right) = 75.0686° = 1.3102 \text{ rad}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.1) da por resultado

$$x(t) = 3.1048 \operatorname{sen}(5t + 1.3102) \text{ pulg} \tag{E.2}$$

$$\dot{x}(t) = 15.524 \cos(5t + 1.3102) \text{ pulg/s} \tag{E.3}$$

$$\ddot{x}(t) = -77.62 \operatorname{sen}(5t + 1.3102) \text{ pulg/s}^2 \tag{E.4}$$



Respuesta de un sistema no amortiguado.

Las ecuaciones (E.2) y (E.4) se trazan utilizando MATLAB en el rango $t = 0$ a 6 seg.

```
% Ex2_20.m
for i = 1: 101
    t(i) = 6 * (i-1)/100;
    x(i) = 3.1048 * sin(5 * t(i) + 1.3102);
    x1(i) = 15.524 * cos(5 * t(i) + 1.3102);
    x2(i) = -77.62 * sin(5 * t(i) + 1.3102);
end
subplot (311);
plot (t,x);
ylabel ('x(t)');
title ('Example 2.18');
subplot (312);
plot (t,x1);
ylabel ('x^.(t)');
subplot (313);
plot (t,x2);
xlabel ('t');
ylabel ('x^.^.(t)');
```

■

Ejemplo 2.21 Respuesta de vibración libre de un sistema con amortiguamiento de Coulomb

Encuentre la respuesta de vibración libre de un sistema de resorte-masa sujeto a amortiguamiento de Coulomb para las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 0.5$ m, $\dot{x}(0) = 0$.

Datos: $m = 10$ kg, $k = 200$ N/m, $\mu = 0.5$

Solución: La ecuación de movimiento se expresa como

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \tag{E.1}$$

Para resolver la ecuación diferencial de segundo orden, ecuación (E.1), por el método de Runge-Kutta (vea el apéndice F), reescribimos la ecuación (E.1) como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden como sigue:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

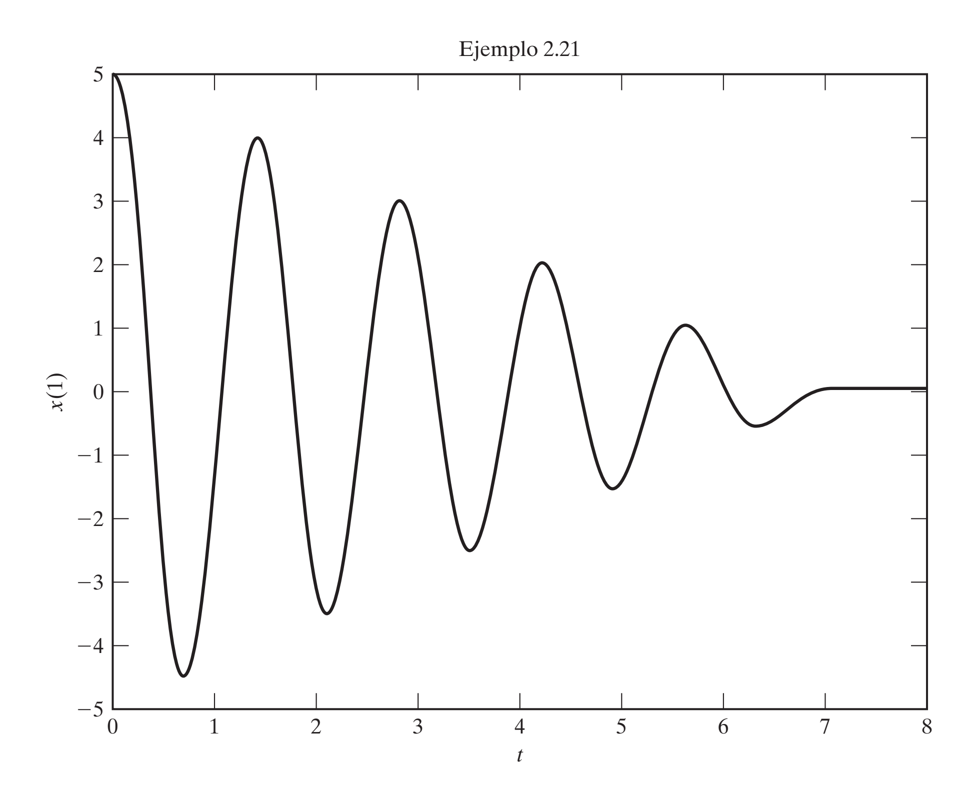
$$\dot{x}_1 = x_2 \equiv f_1(x_1, x_2) \tag{E.2}$$

$$\dot{x}_2 = -\mu g \operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m}x_1 \equiv f_2(x_1, x_2) \tag{E.3}$$

Las ecuaciones (E.2) y (E.3) se expresan en notación matricial como

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}) \tag{E.4}$$

donde $$\vec{X} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}, \qquad \vec{X}(t = 0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}$$



Solución de la ecuación (E4):

Se utiliza el programa MATLAB **ode23** para encontrar la solución de la ecuación (E.4) como se muestra a continuación.

```
% Ej2.21.m
% Este programa utilizará dfunc1.m
tspan = [0: 0.05: 8];
x0 = [5.0; 0.0];
[t, x] = ode23 ('dfunc1', tspan, x0);
plot (t, x(:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x(1)');
title ('Ejemplo 2.19');

% dfunc1.m
function f = dfunc1 (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = -0.5 * 9.81 * sign(x(2)) - 200 * x(1) / 10;
```

■

Ejemplo 2.22 Respuesta de vibración libre de un sistema viscosamente amortiguado utilizando MATLAB

Desarrolle un programa MATLAB de uso general, llamado **Program2.m** para determinar la respuesta de vibración libre de un sistema viscosamente amortiguado. Use el programa para determinar la respuesta de un sistema con los siguientes datos:

$$m = 450.0, \quad k = 26519.2, \quad c = 1000.0, \quad x_0 = 0.539657, \quad \dot{x}_0 = 1.0$$

Solución: Se desarrolla el programa **Program2.m** para que acepte los siguientes datos de entrada:

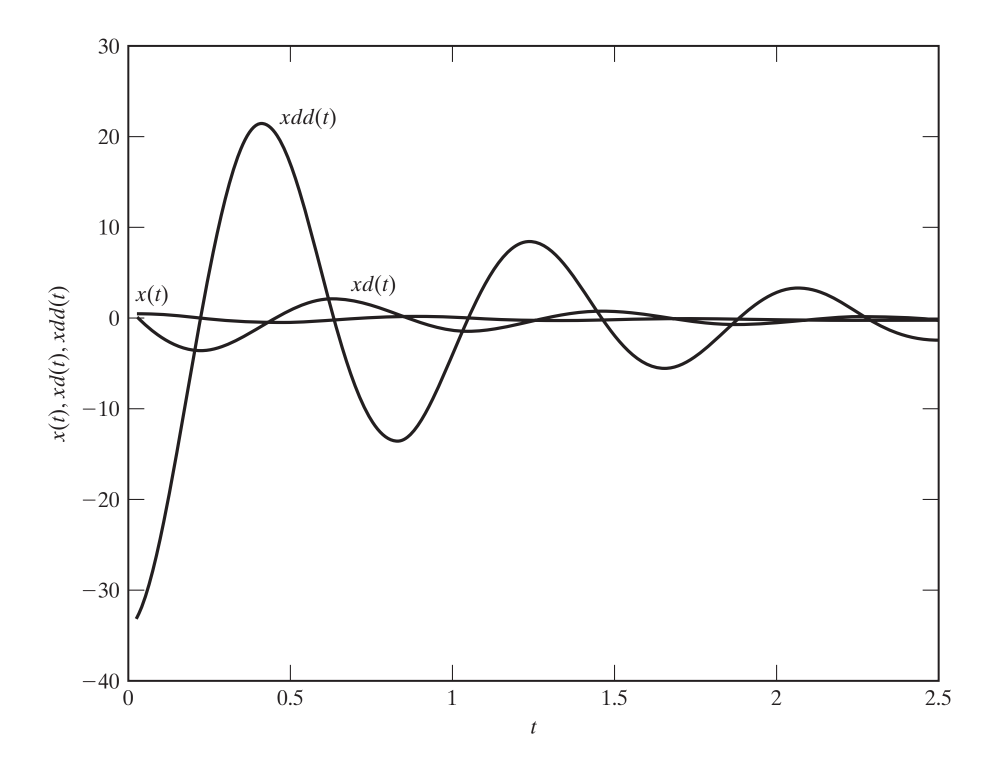
m = masa
k = rigidez del resorte
c = constante de amortiguamiento
x_0 = desplazamiento inicial
xd_0 = velocidad inicial
n = cantidad de pasos de tiempo al cual se tienen que determinar los valores de $x(t)$
delt = intervalo entre pasos de tiempo consecutivos (Δt)

El programa arroja los siguientes resultados:

cantidad de pasos i, tiempo (i), $x(i)$, $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$

El programa también traza las variaciones de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ con el tiempo.

```
 >> programa2
Análisis de vibración libre de un sistema de un solo grado de libertad

Datos:

m=          4.50000000e+002
k=          2.65192000e+004
c=          1.00000000e+003
x0=         5.39657000e-001
xd0=        1.00000000e+000
n=          100
delt=       2.50000000e-002

el sistema está subamortiguado

Resultados:

 i   tiempo(i)           x(i)            xd(i)           xdd(i)

  1  2.500000e-002    5.540992e-001     1.596159e-001   -3.300863e+001
  2  5.000000e-002    5.479696e-001    -6.410545e-001   -3.086813e+001
  3  7.500000e-002    5.225989e-001    -1.375559e+000   -2.774077e+001
  4  1.000000e-001    4.799331e-001    -2.021239e+000   -2.379156e+001
  5  1.250000e-001    4.224307e-001    -2.559831e+000   -1.920599e+001
  6  1.500000e-001    3.529474e-001    -2.977885e+000   -1.418222e+001
  .
  .
  .
 96  2.400000e+000    2.203271e-002    2.313895e-001    -1.812621e+000
 97  2.425000e+000    2.722809e-002    1.834092e-001    -2.012170e+000
 98  2.450000e+000    3.117018e-002    1.314707e-001    -2.129064e+000
 99  2.475000e+000    3.378590e-002    7.764312e-002    -2.163596e+000
100  2.500000e+000    3.505350e-002    2.395118e-002    -2.118982e+000
```



Variaciones de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$.

■

Resumen del capítulo

Consideramos las ecuaciones de movimiento y sus soluciones para la vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad no amortiguados y subamortiguados. Para obtener la ecuación de movimiento de sistemas subamortiguados se presentaron cuatro métodos diferentes, a saber, la segunda ley del movimiento de Newton, el principio de D'Alembert, el principio de desplazamientos virtuales y el principio de conservación de la energía. Se consideraron los sistemas traslacionales y torsionales. Se presentaron las soluciones de vibración libre para sistemas no amortiguados. Se consideró la ecuación de movimiento en la forma de una ecuación diferencial de primer orden para un sistema de masa-amortiguador (sin resorte), así como la idea de constante de tiempo.

Se presentó la solución de vibración libre de sistemas viscosamente amortiguados junto con los conceptos de sistemas subamortiguados, sobreamortiguados y críticamente amortiguados. También se consideraron las soluciones de vibración libre de sistemas con amortiguamiento de Coulomb e histerético. Se explicaron las representaciones gráficas de raíces características en el plano complejo y las soluciones correspondientes. También se consideraron los efectos de la variación de los parámetros m, c y k en las raíces características y sus representaciones utilizando gráficas del lugar geométrico de las raíces. La identificación del estado de estabilidad de un sistema también se explicó.

Ahora que ya ha terminado este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se darán a continuación.

Referencias

2.1 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materiais (*2a. ed.). Addison-Wesley, Reading, MA, 1982.

2.2 R. F. Steidel. Jr., *An Introduction to Mechanical Vibrations* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 1989.

2.3 W. Zambrano, "A brief note on the determination of the natural frequencies of a spring-mass system", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 9, octubre de 1981, págs. 331-334; Vol. l0, julio de 1982. pág. 216.

2.4 R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape,* Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1979.

2.5 A. D. Dimarogonas, *Vibration Engineering,* West Publishing, Saint Paul, MN, 1976.

2.6 E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics (*9a. ed.), Wiley, Nueva York, 2006.

2.7 S. H. Crandali. "The role of damping in vibration theory", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 11, 1970, págs. 3-18.

2.8 I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems* (3a. ed.). Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

2.9 D. Sinclair, "Frictional vibrations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, 1955, págs. 207-214.

2.10 T. K. Caughey y M. E. J. O'Kelly, "Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems", *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 33, 1961, págs. 1458-1461.

2.11 E. E. Ungar, "The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, 1973. págs. 141-154.

2.12 W. Pinsker. "Structural damping", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 16, 1949, pág. 699.

2.13 R. H. Scanlan y A. Mendelson, "Structural damping", *AIAA Journal*, Vol. 1, 1963, págs. 938-939.

2.14 D. J. Inman, *Vibration with Control, Measurement*, *and Stability*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

2.15 G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems* (5a. ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2006.

2.16 N. S. Nise, *Control Systems Engineering (*3a. ed.), Wiley, Nueva York, 2000.

2.17 K. Ogata, *System Dynamics* (4a. ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

Preguntas de repaso

2.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Sugiera un método para determinar la constante de amortiguamiento de un sistema vibratorio sumamente amortiguado con amortiguamiento viscoso.
2. ¿Puede aplicar los resultados de la sección 2.2 en los que la fuerza de restauración no es proporcional al desplazamiento, es decir, donde k no es una constante?
3. Mencione los parámetros correspondientes a m, c, k y x para un sistema torsional.
4. ¿Qué efecto tiene la reducción de la masa en la frecuencia de un sistema?
5. ¿Qué efecto tiene la reducción de la rigidez del sistema en el periodo natural?
6. ¿Por qué la amplitud de vibración libre se reduce gradualmente en sistemas prácticos?
7. ¿Por qué es importante determinar la frecuencia natural de un sistema vibratorio?
8. ¿Cuántas constantes arbitrarias debe tener una solución de una ecuación diferencial de segundo orden? ¿Cómo se determinan estas constantes?
9. ¿Puede usarse el método de energía para hallar la ecuación diferencial de movimiento de todos los sistemas de un solo grado de libertad?
10. ¿Qué suposiciones se hacen al determinar la frecuencia natural de un sistema de un solo grado de libertad cuando se utiliza el método de energía?
11. ¿La frecuencia de una vibración libre amortiguada es menor o mayor que la frecuencia natural del sistema?

12. ¿Cuál es el uso del decremento logarítmico?
13. ¿Es el amortiguamiento histerético una función del esfuerzo máximo?
14. ¿Qué es el amortiguamiento crítico, y cuál es su importancia?
15. ¿Qué le sucede a la energía disipada por el amortiguamiento?
16. ¿Qué es el amortiguamiento viscosos equivalente? ¿Es el factor de amortiguamiento viscoso equivalente una constante?
17. ¿Cuál es la razón de estudiar la vibración de un sistema de un solo grado de libertad?
18. ¿Cómo puede determinar la frecuencia natural de un sistema midiendo su deflexión estática?
19. Dé dos aplicaciones prácticas de un péndulo torsional.
20. Defina estos términos: relación de amortiguamiento, decremento logarítmico, coeficiente de pérdida y capacidad de amortiguamiento específico.
21. ¿En qué formas es la respuesta de un sistema con amortiguamiento de Coulomb diferente de los sistemas con otros tipos de amortiguamiento?
22. ¿Qué es la rigidez compleja?
23. Defina la constante de amortiguamiento de histéresis.
24. Dé tres aplicaciones prácticas del concepto de centro de percusión.
25. ¿Cuál es el orden de la ecuación de movimiento dada por $m\dot{v} + cv = 0$?
26. Defina la constante de tiempo.
27. ¿Qué es una gráfica del lugar geométrico de las raíces?
28. ¿Cuál es la importancia de $c < 0$?
29. ¿Qué es un sistema invariable con el tiempo?

2.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. La amplitud de un sistema no amortiguado no cambiará con el tiempo.
2. Un sistema vibratorio en aire se puede considerar un sistema amortiguado.
3. La ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad permanecerá sin cambio ya sea que la masa se mueva en un plano horizontal o en un plano inclinado.
4. Cuando una masa vibra en una dirección vertical, su peso siempre puede ser ignorado al obtener la ecuación de movimiento.
5. El principio de conservación de la energía se puede usar para derivar la ecuación de movimiento de sistemas amortiguados y no amortiguados.
6. En algunos casos la frecuencia amortiguada puede ser mayor que la frecuencia natural no amortiguada del sistema.
7. La frecuencia natural puede ser cero en algunos casos.
8. La frecuencia natural de vibración de un sistema torsional está dada por $\sqrt{\frac{k}{m}}$, donde k y m indican la constante de resorte torsional y el momento polar de inercia de masa, respectivamente.
9. El método de Rayleigh está basado en el principio de conservación de la energía.
10. La posición final de la masa siempre es la posición de equilibrio en el caso de amortiguamiento de Coulomb.
11. La frecuencia natural no amortiguada de un sistema resulta de $\sqrt{g/\delta_{st}}$, donde δ_{st} es la deflexión estática de la masa.
12. Para un sistema no amortiguado, la velocidad adelanta al desplazamiento en $\pi/2$.
13. Para un sistema no amortiguado la velocidad adelanta a la aceleración en $\pi/2$.
14. El amortiguamiento de Coulomb se conoce como amortiguamiento constante.
15. El coeficiente de pérdida indica la energía disipada por radián por energía de deformación unitaria.
16. El movimiento disminuye a cero en casos de subamortiguado y sobreamortiguado.
17. El decremento logarítmico se puede utilizar para determinar la relación de amortiguamiento.
18. El lazo de histéresis de la curva-esfuerzo-deformación de un material provoca amortiguamiento.
19. La rigidez compleja se puede utilizar para determinar la fuerza de amortiguamiento en un sistema con amortiguamiento de histéresis.
20. El movimiento en el caso de amortiguamiento de histéresis se puede considerar armónico.
21. En el plano s, el lugar geométrico correspondiente a la frecuencia natural constante será un círculo.
22. La ecuación característica de un sistema de un solo grado de libertad puede tener una raíz real y una raíz compleja.

2.3 Llene los espacios en blanco con las palabras correctas:

1. La vibración libre de un sistema no amortiguado representa un intercambio de energías de __________ y _________.
2. Un sistema sometido a movimiento armónico simple se conoce como oscilador ________.
3. El reloj mecánico representa un péndulo _______.
4. El centro de ________ se puede utilizar ventajosamente en un bate de béisbol.
5. Con amortiguamiento viscoso y de histéresis, en teoría el movimiento ________ por siempre.
6. La fuerza de amortiguamiento en amortiguamiento de Coulomb está dada por ________.
7. El coeficiente de ________ se puede utilizar para comparar la capacidad de amortiguamiento de diferentes materiales de ingeniería.
8. Ocurre vibración torsional cuando un cuerpo _______ oscila alrededor de un eje.
9. La propiedad de amortiguamiento de _________ se utiliza en muchas aplicaciones prácticas, como en cañones grandes.
10. El decremento logarítmico determina la velocidad a la cual la ________ de una vibración libre amortiguada disminuye.
11. El método de Rayleigh se puede utilizar para determinar la frecuencia _______ de un sistema de forma directa.
12. Dos desplazamientos sucesivos del sistema, separados por un ciclo, se pueden utilizar para determinar el decremento ________.
13. La frecuencia natural amortiguada (ω_d) se puede expresar en función de la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) como _____.
14. La constante de tiempo indica el tiempo en el cual la respuesta inicial se reduce en un ______ por ciento.
15. El término e^{-2t} disminuye _______ que el término e^{-t} a medida que el tiempo se incrementa.
16. En el plano s, las líneas paralelas al eje real indican sistemas de frecuencias _______ diferentes.

2.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones múltiples dadas:

1. La frecuencia natural de un sistema con masa m y rigidez k es:

   a. $\frac{k}{m}$ **b.** $\sqrt{\frac{k}{m}}$ **c.** $\sqrt{\frac{m}{k}}$

2. En amortiguamiento de Coulomb, la amplitud de movimiento se reduce en cada ciclo en:

   a. $\frac{\mu N}{k}$ **b.** $\frac{2\mu N}{k}$ **c.** $\frac{4\mu N}{k}$

3. La amplitud de un sistema no amortiguado sujeto a un desplazamiento inicial de cero y velocidad inicial $\dot{x}_0$ está dada por:

   a. $\dot{x}_0$ **b.** $\dot{x}_0\omega_n$ **c.** $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$

4. El efecto de la masa del resorte se puede tener en cuenta agregando la siguiente fracción de su masa a la masa vibratoria:

   a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{4}{3}$

5. Para un amortiguador viscoso con constante de amortiguamiento c, la fuerza de amortiguamiento es:

   a. $c\dot{x}$ **b.** cx **c.** $c\ddot{x}$

6. El deslizamiento relativo de los componentes en un sistema mecánico ocasiona:

   a. amortiguamiento de fricción seca **b.** amortiguamiento viscoso **c.** amortiguamiento de histéresis

7. En vibración torsional, el desplazamiento se mide en función de:

a. coordenada lineal **b.** coordenada angular **c.** coordenada de fuerza

8. La relación de amortiguamiento, en función de la constante de amortiguamiento c y la constante de amortiguamiento crítico (c_c), es:

a. $\frac{c_c}{c}$ **b.** $\frac{c}{c_c}$ **c.** $\sqrt{\frac{c}{c_c}}$

9. La amplitud de un sistema subamortiguado sujeto a un desplazamiento inicial x_0 y una velocidad inicial 0 está dada por:

a. x_0 **b.** $2x_0$ **c.** $x_0\omega_n$

10. El ángulo de fase de un sistema subamortiguado sujeto a un desplazamiento inicial x_0 y a una velocidad inicial 0 está dado por:

a. x_0 **b.** $2x_0$ **c.** 0

11. La energía disipada debida a amortiguamiento viscoso es proporcional a la siguiente potencia de la amplitud de movimiento:

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

12. Para un sistema críticamente amortiguado, el movimiento será:

a. periódico **b.** aperiódico **c.** armónico

13. La energía disipada por ciclo en amortiguamiento viscoso con constante de amortiguamiento c durante el movimiento armónico simple $x(t) = X \text{ sen } \omega_d t$ está dada por:

a. $\pi c \omega_d X^2$ **b.** $\pi \omega_d X^2$ **c.** $\pi c \omega_d X$

14. Para un sistema vibratorio con una energía total W y una energía disipada por ciclo ΔW, la capacidad de amortiguamiento específica es:

a. $\frac{W}{\Delta W}$ **b.** $\frac{\Delta W}{W}$ **c.** ΔW

15. Si las raíces características tienen valores positivos, la respuesta del sistema será:

a. estable **b.** inestable **c.** asintóticamente estable

16. La frecuencia de oscilación de la respuesta de un sistema será más alta si la parte imaginaria de las raíces es:

a. menor **b.** cero **c.** mayor

17. Si las raíces características tienen una parte imaginaria cero, la respuesta del sistema será:

a. oscilatoria **b.** no oscilatoria **c.** estable

18. La forma del lugar geométrico de las raíces de un sistema de un solo grado de libertad para $0 \leq \zeta \leq 1$ es:

a. circular **b.** línea horizontal **c.** línea radial

19. La forma del lugar geométrico de las raíces de un sistema de un solo grado de libertad a medida que k varía es:

a. líneas verticales y horizontales **b.** arco circular **c.** líneas radiales

2.5 Correlacione lo siguiente para un sistema de un solo grado de libertad con $m = 1$, $k = 2$ y $c = 0.5$:

1. Frecuencia natural, ω_n	**a.** 1.3919
2. Frecuencia lineal, f_n	**b.** 2.8284
3. Periodo de tiempo natural, τ_n	**c.** 2.2571
4. Frecuencia amortiguada, ω_d	**d.** 0.2251
5. Constante de amortiguamiento crítico, c_c	**e.** 0.1768
6. Relación de amortiguamiento, ζ	**f.** 4.4429
7. Decremento logarítmico, δ	**g.** 1.4142

2.6 Correlacione lo siguiente para una masa $m = 5$ kg que se mueve a una velocidad $v = 10$ m/s:

Fuerza de amortiguamiento	Tipo de amortiguamiento
1. 20 N	**a.** Amortiguamiento de Coulomb con coeficiente de fricción de 0.3
2. 1.5 N	**b.** Amortiguamiento viscoso con un coeficiente de amortiguamiento de 1 N-s/m
3. 30 N	**c.** Amortiguamiento viscoso con un coeficiente de amortiguamiento de 2 N-s/m
4. 25 N	**d.** Amortiguamiento viscoso con coeficiente de amortiguamiento histéretico de 12 N/m a una frecuencia de 4 rad/s
5. 10 N	**e.** Amortiguamiento cuadrático (fuerza $= av^2$) con constante de amortiguamiento $a = 0.25$ N-s²/m²

2.7 Correlacione las siguientes características del plano *s*:

Lugar geométrico	Importancia
1. Círculos concéntricos	**a.** Valores diferentes de frecuencia natural amortiguada
2. Líneas paralelas al eje real	**b.** Valores diferentes de recíprocos de constante de tiempo
3. Líneas paralelas al eje imaginario	**c.** Valores diferentes de relación de amortiguamiento
4. Líneas radiales a través del origen	**d.** Valores diferentes de frecuencia natural

2.8 Empate los siguientes términos relacionados con la estabilidad de sistemas:

Tipo de sistema	Naturaleza de la respuesta de vibración libre a medida que el tiempo tiende a infinito
1. Asintóticamente estable	**a.** Ni decae ni crece
2. Inestable	**b.** Crece con oscilaciones
3. Estable	**c.** Crece sin oscilaciones
4. Inestabilidad divergente	**d.** Tiende a cero
5. Inestabilidad de vibración	**e.** Crece sin límite

Problemas

Sección 2.2 Vibración libre de un sistema traslacional no amortiguado

2.1 Una prensa industrial se encuentra montada sobre una base de caucho para aislarla de su cimentación. Si la base de caucho se comprime 5 mm por el peso mismo de la prensa, encuentre la frecuencia natural del sistema.

2.2 El periodo natural de un sistema de resorte-masa es de 0.21 seg. ¿Cuál será el nuevo periodo si la constante de resorte (a) se incrementa en 50% y (b) se reduce en 50 por ciento?

2.3 La frecuencia natural de un sistema de resorte-masa es de 10 Hz. Cuando la constante de resorte se reduce en 800 N/m, la frecuencia se modifica en 45 por ciento. Encuentre la constante de resorte del sistema original.

2.4 Cuando el extremo de un resorte helicoidal se fija y otro se carga, se requiere una fuerza de 100 N para alargarlo 10 mm. Los extremos del resorte ahora están rígidamente fijos, un extremo verticalmente sobre el otro, y a la mitad de su longitud se fija una masa de 10 kg. Determine el tiempo requerido para completar un ciclo de vibración cuando se hace que la masa vibre en la dirección vertical.

2.5 Una unidad de aire acondicionado que pesa 2000 lb tiene que estar soportada por cuatro resortes neumáticos (figura 2.50). Diseñe los resortes neumáticos de modo que la frecuencia natural de vibración de la unidad resulte entre 5 rad/s y 10 rad/s.

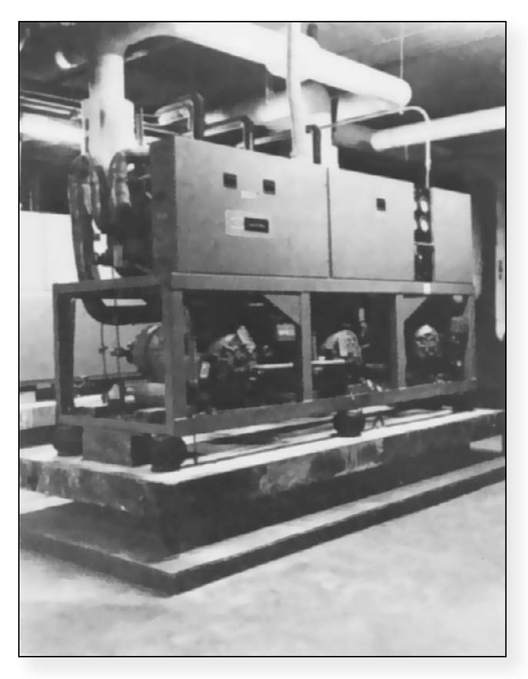


Figura 2.50 (Cortesía de *Sound and Vibration*).

2.6 La velocidad máxima alcanzada por la masa de un oscilador armónico simple es de 10 cm/s, y el periodo de oscilación es de 2 seg. Si la masa se suelta con un desplazamiento inicial de 2 cm determine (a) la amplitud; (b) la velocidad inicial; (c) la aceleración máxima, y (d) el ángulo de fase.

2.7. Tres resortes y una masa se fijan a una barra *PQ* rígida sin peso como se muestra en la figura 2.51. Determine la frecuencia natural de vibración del sistema.

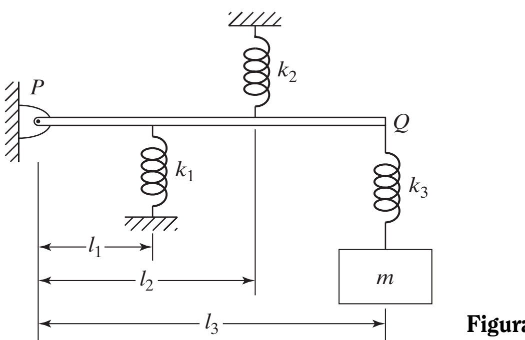


Figura 2.51

2.8 Un automóvil de 2000 kg de masa deforma sus resortes de suspensión 0.02 m en condiciones estáticas. Determine la frecuencia natural del automóvil en la dirección vertical suponiendo que el amortiguamiento es insignificante.

2.9 Halle la frecuencia natural de vibración de un sistema de resorte-masa colocado sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura 2.52.

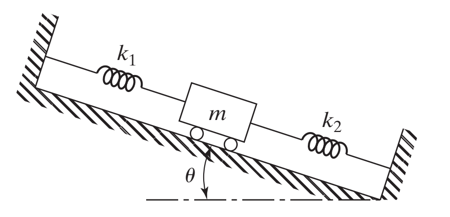


Figura 2.52

2.10 A un carro de mina cargado, que pesa 5000 lb, se le está alzando por medio de una polea libre de fricción y un cable, como se muestra en la figura 2.53. Halle la frecuencia natural de vibración del carro en una posición dada.

2.11 Un chasis electrónico que pesa 500 N se aísla montándolo sobre cuatro resortes helicoidales, como se muestra en la figura 2.54. Diseñe los resortes de modo que la unidad pueda usarse en un ambiente en el que la frecuencia vibratoria oscile de 0 a 50 Hz.

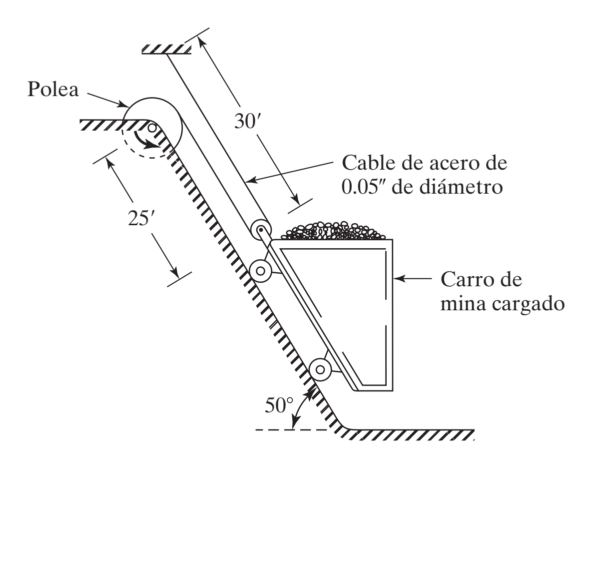


Figura 2.53

Figura 2.54 Chasis electrónico montado sobre aisladores de vibración. (Cortesía de Titan SESCO).

2.12. Encuentre la frecuencia natural del sistema que se muestra en la figura 2.55 con y sin los resortes k_1 y k_2 a la mitad de la viga elástica.

2.13. Encuentre la frecuencia natural del sistema de poleas que se muestra en la figura 2.56 ignorando la fricción y las masas de las poleas.

2.14. Tres poleas sin fricción y sin masa, y un resorte de rigidez k soportan un peso W, como se muestra en la figura 2.57. Encuentre la frecuencia natural de vibración del peso W para oscilaciones pequeñas.

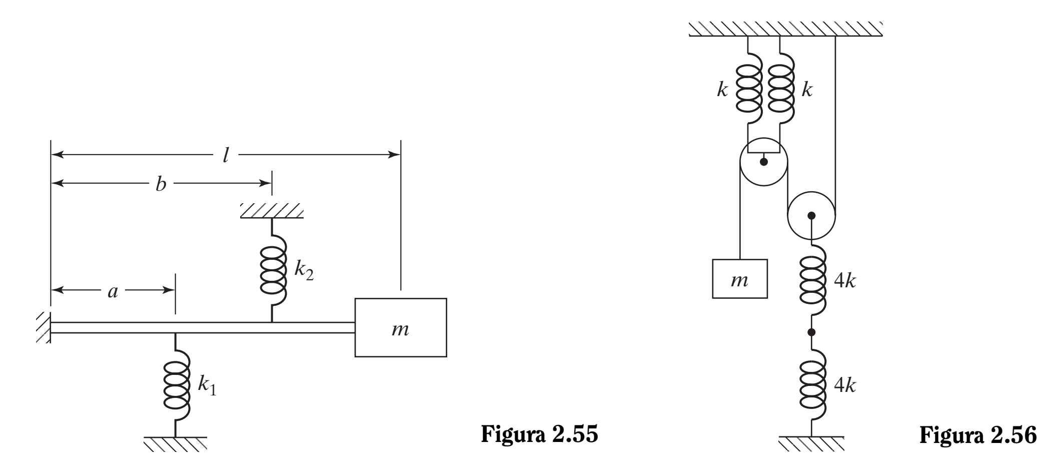


Figura 2.55

Figura 2.56

2.15 Un bloque rígido de masa M está montado sobre cuatro soportes elásticos, como se muestra en la figura 2.58. Una masa m cae desde una altura l y se adhiere al bloque rígido sin rebotar. Si la constante de resorte de cada soporte elástico es k, determine la frecuencia natural de vibración del sistema (a) sin la masa m, y (b) con la masa m. También determine el movimiento resultante del sistema en el caso (b).

2.16 Un mazo golpea un yunque con una velocidad de 50 pies/s (figura 2.59). El mazo y el yunque pesan 12 lb y 100 lb, respectivamente. El yunque está montado sobre cuatro resortes, cada uno de rigidez $k = 100$ lb/pulg. Determine el movimiento resultante del yunque (a) si el mazo permanece en contacto con el yunque y (b) si el mazo no permanece en contacto con el yunque después del impacto inicial.

2.17 Derive la expresión para la frecuencia natural del sistema mostrado en la figura 2.60. Observe que la carga W está aplicada en el extremo de la viga 1 y a la mitad de la viga 2.

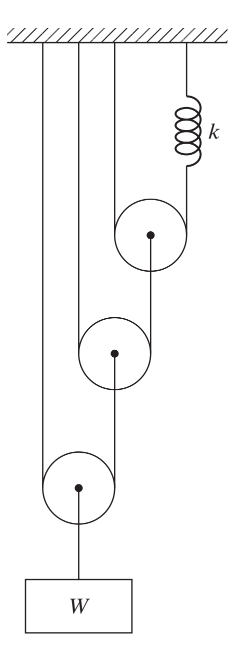


Figura 2.57

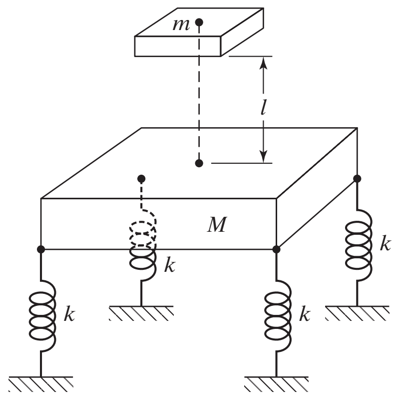


Figura 2.58

2.18 Una máquina que pesa 9,810 N se está bajando con un malacate a una velocidad uniforme de 2 m/s. El diámetro del cable de acero que soporta la máquina es de 0.01 m. El malacate se detiene de repente cuando la longitud del cable de acero es de 20 m. Encuentre el periodo y la amplitud de la vibración resultante de la máquina.

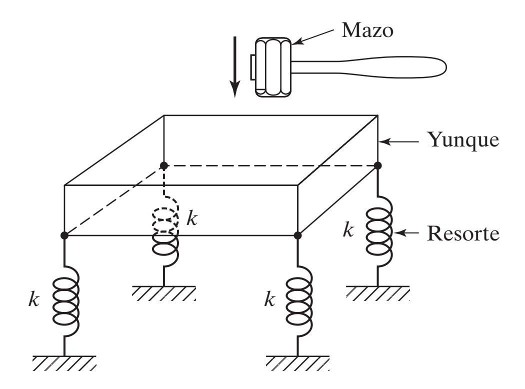


Figura 2.59

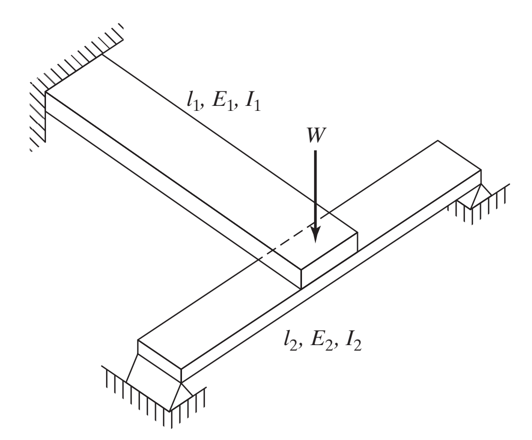


Figura 2.60

2.19 La frecuencia natural de un sistema de resorte-masa es de 2 Hz. Cuando se agrega una masa adicional de 1 kg a la masa original m, la frecuencia natural se reduce a 1 Hz. Encuentre la constante de resorte k y la masa m.

2.20 Una grúa soporta un mecanismo de control eléctrico por medio de un cable de acero de 4 m de largo y 0.01 m de diámetro (figura 2.61). Si el periodo natural de vibración axial del mecanismo de control es de 0.1 s, determine la masa del mecanismo.

2.21 Cuatro eslabones rígidos y un resorte sin peso están dispuestos para que soporten un peso W de dos maneras diferentes, como se muestra en la figura 2.62. Determine las frecuencias naturales de vibración de las dos disposiciones.

Figura 2.61 Fotografía cortesía de la Institution of Electrical Engineers (Institución de Ingenieros Electricistas).

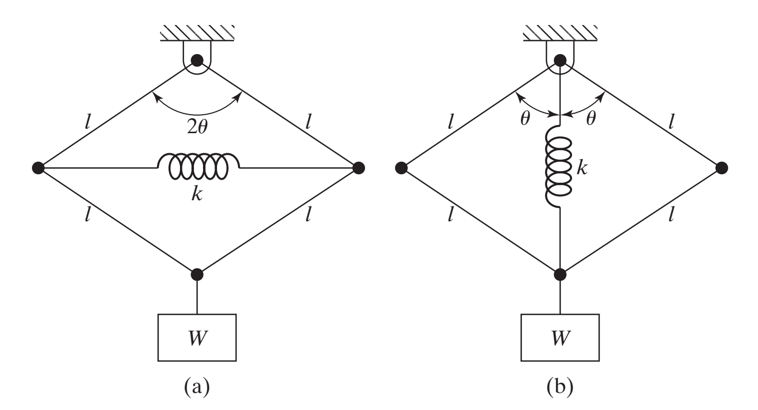


Figura 2.62

2.22 Se utiliza un gato de tijera para levantar una carga *W*. Los eslabones del gato son rígidos y los collares pueden deslizarse libremente sobre la flecha contra los resortes de rigideces k_1 y k_2 (vea la figura 2.63). Encuentre la frecuencia natural de vibración de la carga en la dirección vertical.

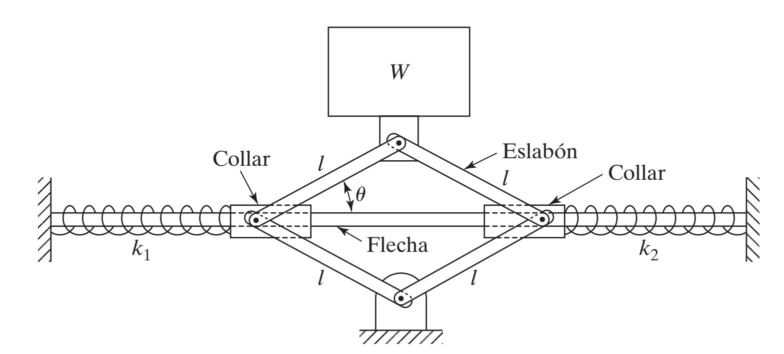


Figura 2.63

2.23 Hay un peso suspendido por seis eslabones rígidos y dos resortes de dos diferentes maneras, como se muestra en la figura 2.64. Encuentre las frecuencias naturales de vibración sobre los dos conjuntos.

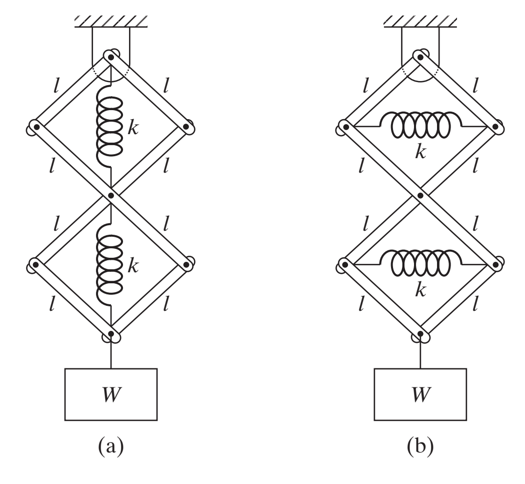


Figura 2.64

2.24 La figura 2.65 muestra una pequeña masa m sujetada por cuatro resortes elásticos linealmente, cada uno de los cuales tiene una longitud no alargada l y un ángulo de orientación de 45º con respecto al eje x. Determine la ecuación de movimiento correspondiente a pequeños desplazamientos de la masa en la dirección x.

2.25 Una masa m está sostenida por dos conjuntos de resortes orientados a 30º y 120º con respecto al eje x, como se muestra en la figura 2.66. Un tercer par de resortes, cada uno con rigidez k3, se tiene que diseñar para que el sistema tenga una frecuencia natural constante, mientras vibra en cualquier dirección x. Determine la rigidez necesaria k3 y la orientación de los resortes con respecto al eje X.

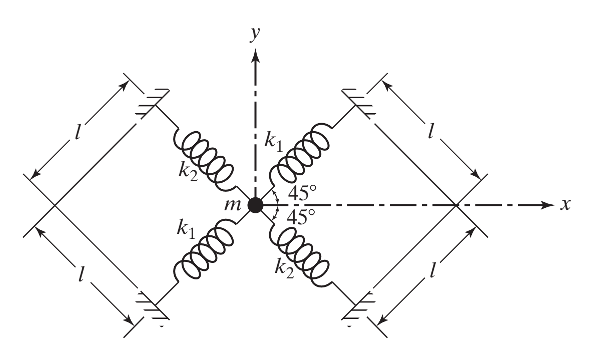


Figura 2.65

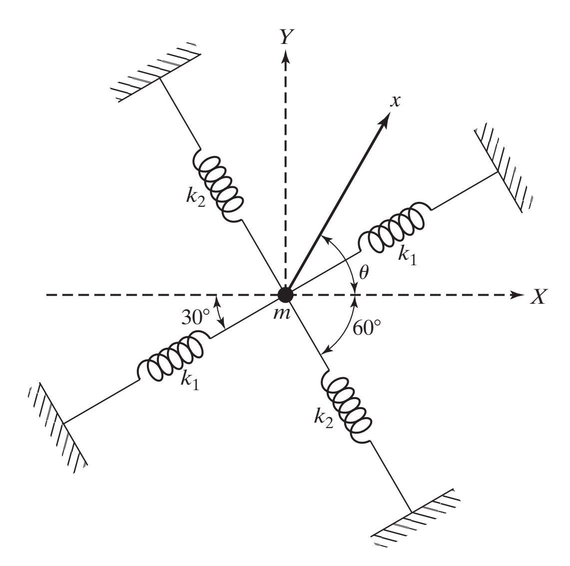


Figura 2.66

2.26 Una masa m se sujeta a una cuerda sometida a una tensión T como se muestra en la figura 2.67. Suponiendo que T no cambia cuando la masa se desplaza normal a la cuerda (a) escriba la ecuación diferencial de movimiento para vibraciones transversales pequeñas y (b) encuentre la frecuencia natural de vibración.

2.27 Un saltador con un peso de 160 lb sujeta un extremo de una cuerda elástica de 200 pies de largo con rigidez de 10 lb/pulg a un puente y el otro extremo a sí mismo y salta del puente (figura 2.68). Suponiendo que el puente es rígido, determine el movimiento vibratorio del saltador con respecto a su posición de equilibrio estático.

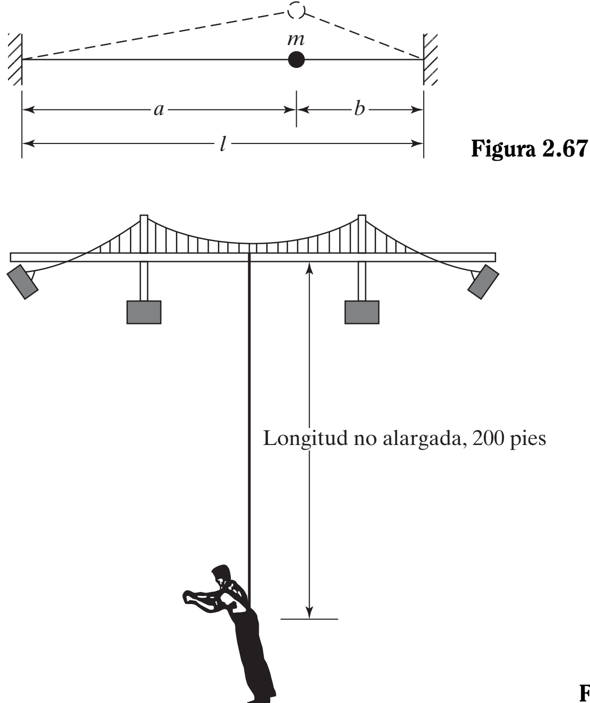


Figura 2.67

Figura 2.68

2.28 Un acróbata que pesa 120 lb camina sobre una cuerda tensa, como se muestra en la figura 2.69. Si la frecuencia natural de vibración en la posición dada, en dirección vertical, es de 10 rad/s, determine la tensión en la cuerda.

2.29 En la figura 2.70 se muestra el diagrama de un gobernador centrífugo. La longitud de cada varilla es l, la masa de cada bola es m, y la longitud libre del resorte es h. Si la velocidad de la flecha es ω, determine la posición de equilibrio y la frecuencia con pequeñas oscilaciones con respecto a esta posición.

2.30 En el gobernador de Hartnell que se muestra en la figura 2.71, la rigidez del resorte es de 10^4 N/m y el peso de cada bola es de 25 N. El largo del brazo de bola es de 20 cm, y el de brazo de manga es de 12 cm. La distancia entre el eje de rotación y el pivote de la palanca acodada es de 16 cm. El resorte se comprime 1 cm cuando el brazo de bola está en posición vertical. Encuentre (a) la velocidad del gobernador a la cual el brazo de bola permanece vertical y (b) la frecuencia natural de vibración con desplazamientos pequeños con respecto a la posición vertical de los brazos de bola.

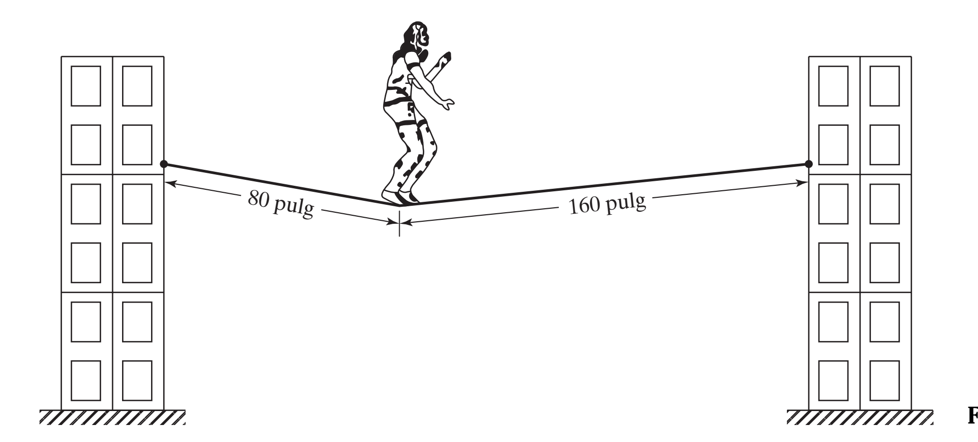


Figura 2.69

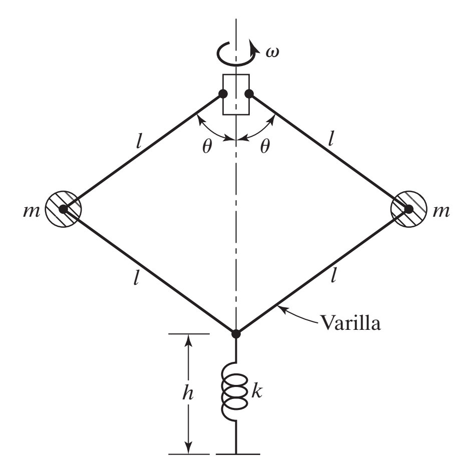


Figura 2.70

2.31 Una plataforma cuadrada *PQRS* y el auto que está sosteniendo tienen una masa combinada de M. La plataforma cuelga de cuatro cables elásticos desde un punto fijo O, como se indica en la figura 2.72. La distancia vertical entre el punto de suspensión O y la posición de equilibrio horizontal de la plataforma es h. Si el lado de la plataforma es a y la rigidez de cada cable es k, determine el periodo de vibración vertical de la plataforma.

2.32 El manómetro inclinado que se muestra en la figura 2.73 se utiliza para medir presión. Si la longitud total del mercurio en el tubo es L, encuentre una expresión para la frecuencia natural de oscilación del mercurio.

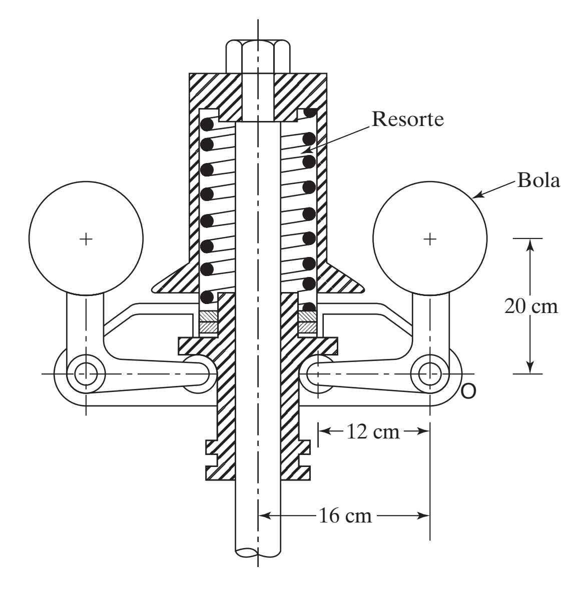


Figura 2.71 Gobernador de Hartnell.

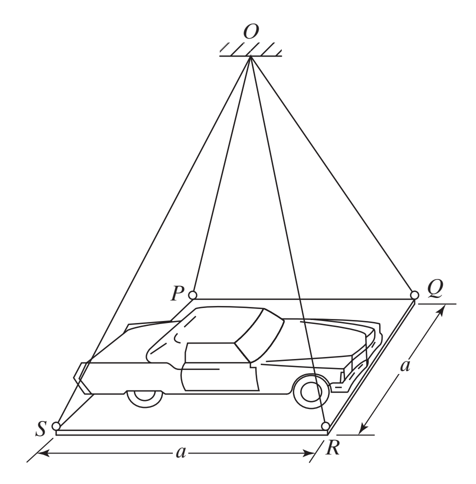


Figura 2.72

2.33 El embalaje de 250 kg de masa que cuelga de un helicóptero (figura 2.74(a)) se puede modelar como se muestra en la figura 2.74(b). Las aspas del rotor del helicóptero giran a 300 rpm. Encuentre el diámetro de los cables de acero de modo que la frecuencia natural de vibración del embalaje sea al menos dos veces la frecuencia de las aspas del rotor.

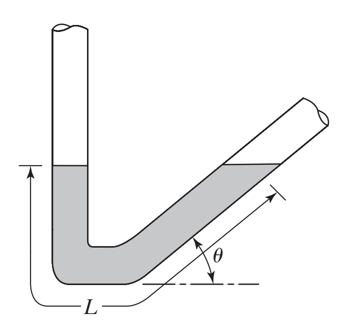


Figura 2.73

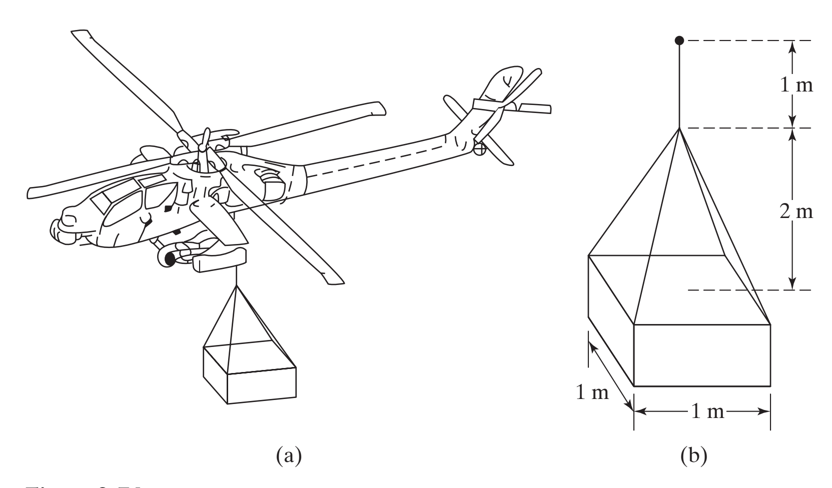


Figura 2.74

2.34 El cabezal de un recipiente de presión está suspendido por un conjunto de cables de 2 m de largo como se muestra en la figura 2.75. El periodo de vibración axial (en dirección vertical) varía de 5 s a 4.0825 s cuando se agrega una masa adicional de 5000 kg al cabezal. Determine el área de sección transversal equivalente de los cables y la masa del cabezal.

2.35 Un volante está montado en una flecha vertical, como se muestra en la figura 2.76. El diámetro de la flecha es d y su largo es l y está fija por ambos extremos. El peso del volante es W y su radio de giro es r. Encuentre la frecuencia natural de las vibraciones longitudinal, transversal y torsional del sistema.

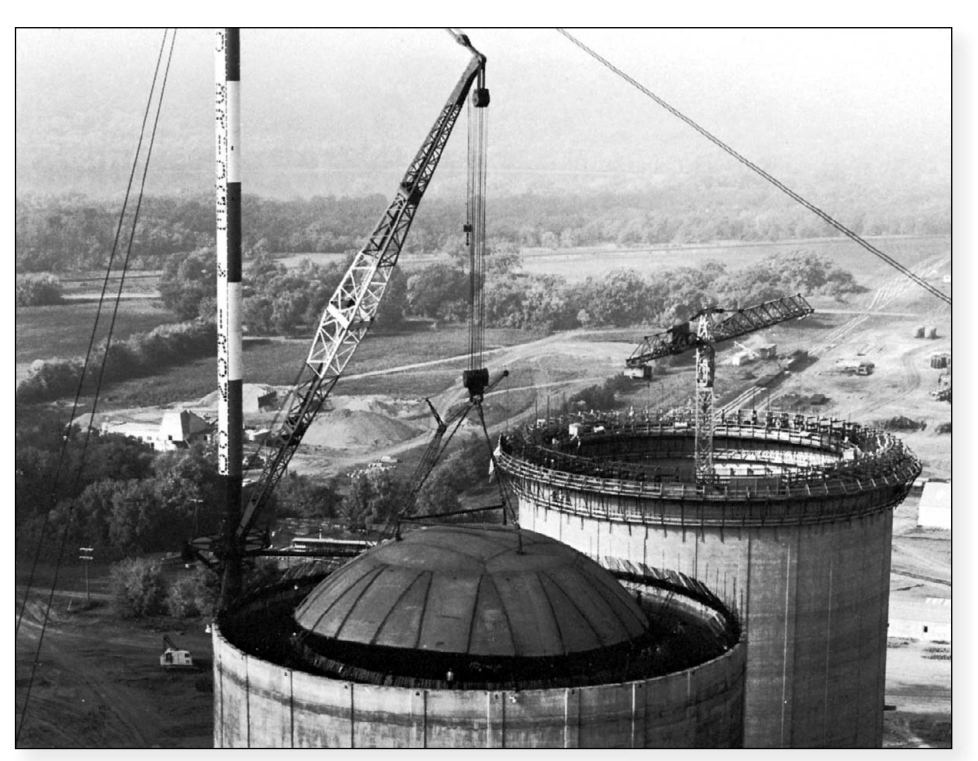


Figura 2.75 Fotografía cortesía de CBI Industries Inc.

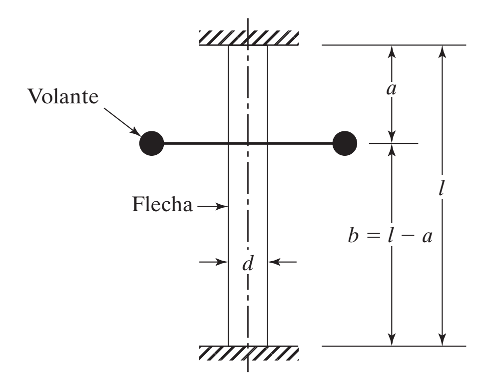


Figura 2.76

2.36 Una torre de antena de TV está asegurada por cuatro cables, como se muestra en la figura 2.77. Cada cable está sometido a tensión y es de acero con área de sección transversal de 0.5 pulg². La torre de antena se puede modelar como una viga de acero de sección cuadrada de 1 pulg de lado, para estimar su masa y rigidez. Encuentre la frecuencia natural de flexión de la torre con respecto al eje *y*.

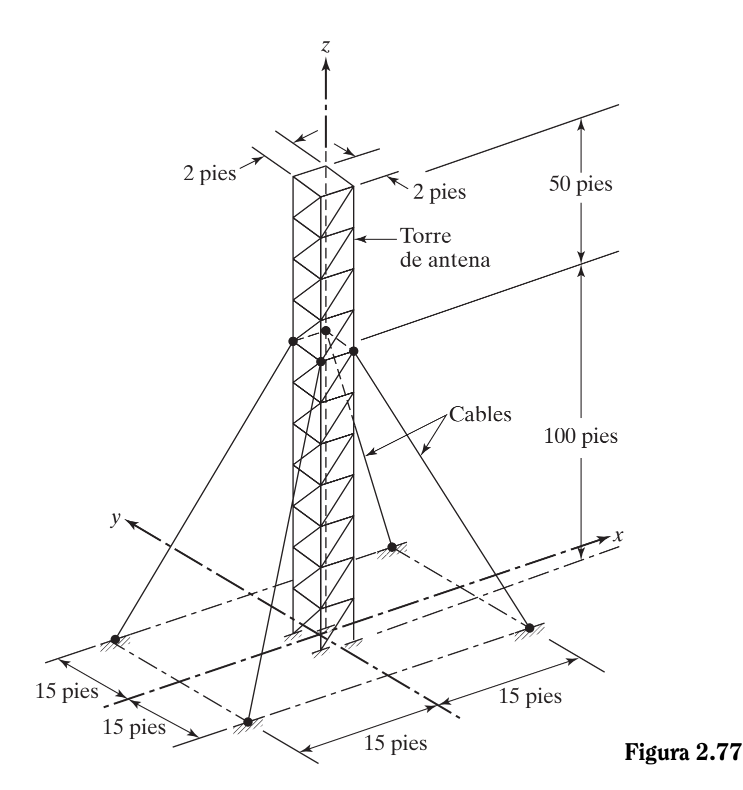


Figura 2.77

2.37 La figura 2.78(a) muestra una señal de tránsito de acero, de $\frac{1}{8}$ pulg de espesor, fija a un poste de acero. La altura del poste es de 72 pulg, su sección transversal es de 2 pulg × ¼ pulg, y es capaz de resistir vibración torsional (con respecto al eje *z*) o vibración de flexión (ya sea en el plano *zx* o en el plano *yz*). Determine el modo de vibración del poste en una tormenta durante la cual la velocidad del viento tiene un componente de frecuencia de 1.25 Hz.

Sugerencias:

1. Ignore el peso del poste cuando encuentre las frecuencias naturales de vibración.
2. La rigidez torsional de una flecha de sección rectangular (vea la figura 2.78(b)) es

$$k_t = 5.33\frac{ab^3G}{l}\left[1 - 0.63\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$$

donde *G* es el módulo de cortante.

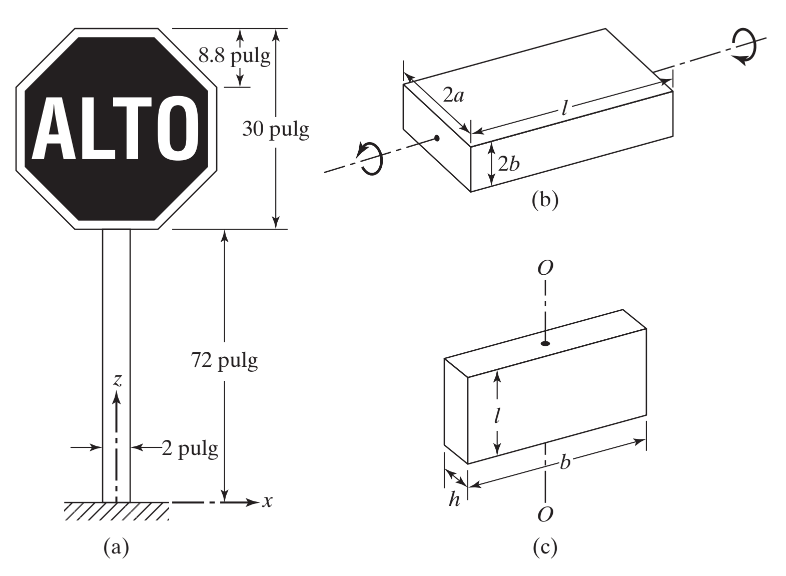


Figura 2.78

3. El momento de inercia de masa de un bloque rectangular con respecto al eje OO (vea la figura 2.78(c)) está dado por

$$I_{OO} = \frac{\rho l}{3}(b^3h + h^3b)$$

donde ρ es la densidad del bloque.

2.38 Una estructura de edificio se modela por medio de cuatro columnas de acero idénticas, cada una de peso w, y un piso rígido de peso W, como se muestra en la figura 2.79. Las columnas están fijas en el suelo y tienen una rigidez a la flexión de EI cada una. Determine la frecuencia natural de vibración horizontal de la estructura suponiendo que la conexión entre el piso y las columnas es (a) de pivote como se muestra en la figura 2.79(a) y (b) fija contra rotación como se muestra en la figura 2.79(b). Incluya el efecto de los pesos de las columnas.

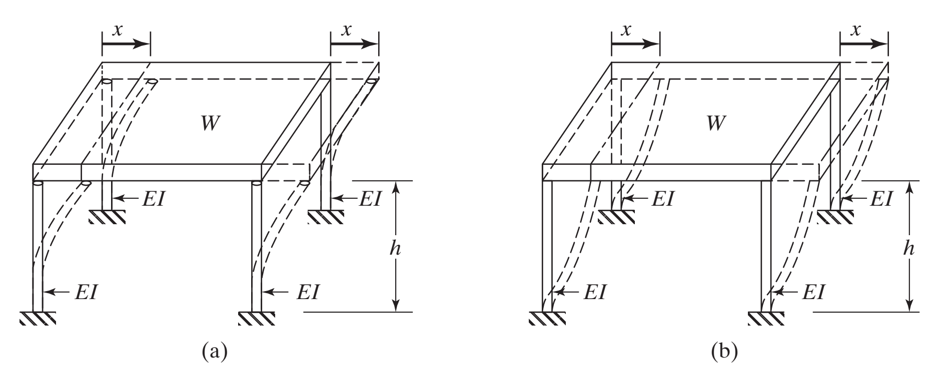


Figura 2.79

2.39 El brazo de un robot de selección y colocación, que se muestra en la figura 2.80, sujeta un objeto que pesa 10 lb. Encuentre la frecuencia natural del brazo del robot en la dirección axial para los siguientes datos: $l_1 = 12$ pulg, $l_2 = 10$ pulg, $l_3 = 8$ pulg; $E_1 = E_2 = E_3 = 10^7$ lb/pulg^2; $D_1 = 2$ pulg, $D_2 = 1.5$ pulg, $D_3 = 1$ pulg; $d_1 = 1.75$ pulg, $d_2 = 1.25$ pulg, $d_3 = 0.75$ pulg.

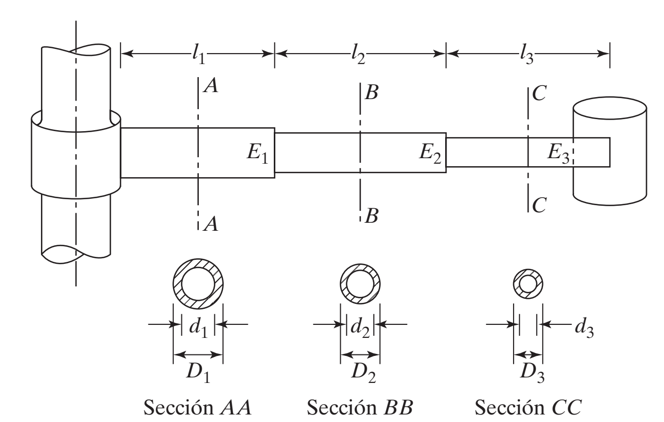


Figura 2.80

2.40. Un resorte helicoidal de rigidez k se corta a la mitad y se conecta una masa m a las dos mitades, como se muestra en la figura 2.81(a). El periodo natural de este sistema es de 0.5 s. Si se corta un resorte idéntico de modo que una parte sea de un cuarto y la otra de tres cuartos de la longitud original, y la masa m se conecta a las dos partes como se muestra en la figura 2.81(b), ¿cuál sería el periodo natural del sistema?

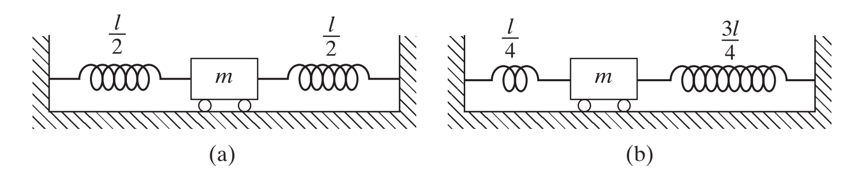


Figura 2.81

2.41* La figura 2.82 muestra un bloque de metal montado sobre dos rodillos cilíndricos idénticos que giran en direcciones opuestas a la misma velocidad angular. Cuando en principio el centro de gravedad del bloque se desplaza una distancia x, el bloque asumirá un movimiento armónico simple. Si la frecuencia de movimiento del bloque es ω, determine el coeficiente de fricción entre el bloque y los rodillos.

2.42* Si dos resortes idénticos de rigidez k cada uno se conectan al bloque de metal del problema 2.41 como se muestra en la figura 2.83, determine el coeficiente de fricción entre el bloque y los rodillos.

*El asterisco indica un problema de diseño, o un problema sin respuesta única.

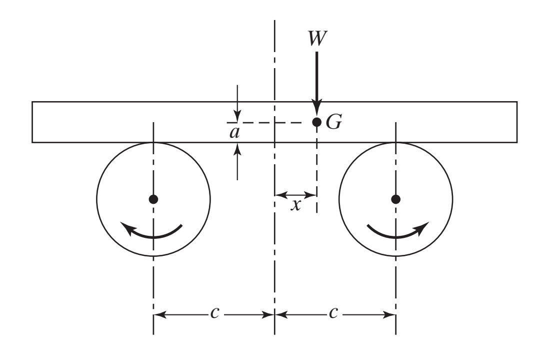


Figura 2.82

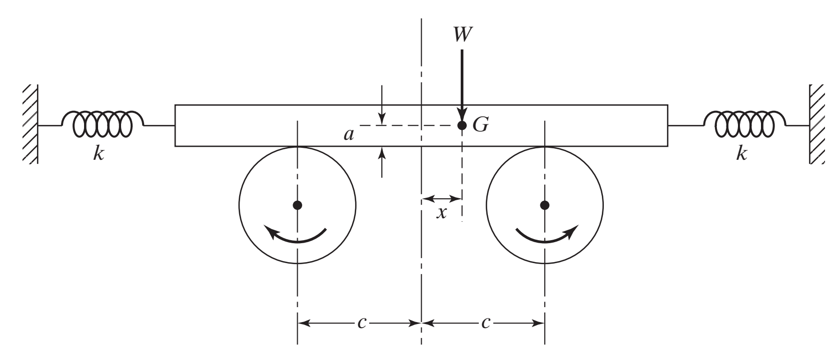


Figura 2.83

2.43 Un electroimán que pesa 3000 lb está en reposo mientras sostiene un automóvil de 2000 lb de peso en un depósito de chatarra. La corriente eléctrica se interrumpe, y el automóvil cae. Suponiendo que la grúa y el cable de soporte tienen una constante de resorte equivalente de 10,000 lb/pulg, encuentre lo siguiente: (a) la frecuencia natural de vibración del electroimán; (b) el movimiento resultante del electroimán, y (c) la tensión máxima desarrollada en el cable durante el movimiento.

2.44 Derive la ecuación de movimiento del sistema que se muestra en la figura 2.84, con los siguientes métodos: (a) la segunda ley del movimiento de Newton; (b) el principio de D'Alembert; (c) el principio de trabajo virtual, y (c) el principio de conservación de la energía.

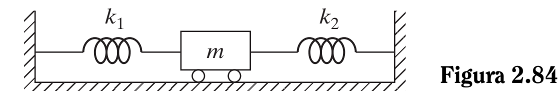


Figura 2.84

2.45-2.46 Trace el diagrama de cuerpo libre y derive la ecuación de movimiento aplicando la segunda ley del movimiento de Newton para cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 2.85 y 2.86.

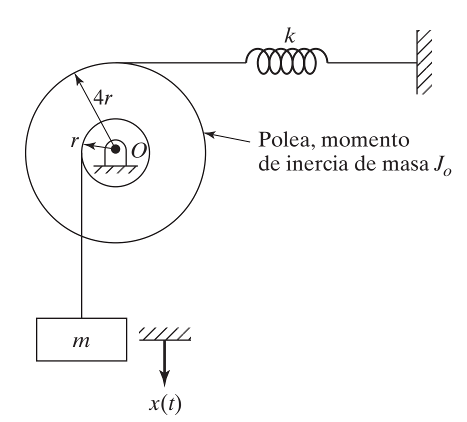


Figura 2.85

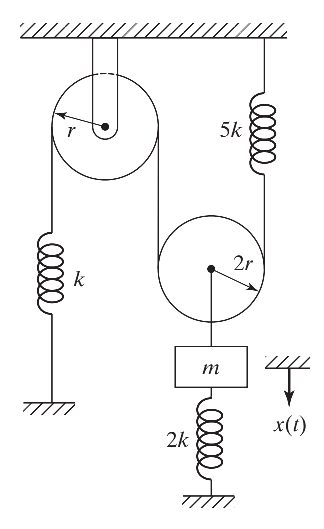


Figura 2.86

2.47-2.48 Derive la ecuación de movimiento aplicando el principio de conservación de la energía para cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 2.85 y 2.86.

2.49 Una viga de acero de 1 m de largo soporta una masa de 50 kg en su extremo libre, como se muestra en la figura 2.87. Encuentre la frecuencia natural de vibración transversal de la masa modelándola como un sistema de un solo grado de libertad.

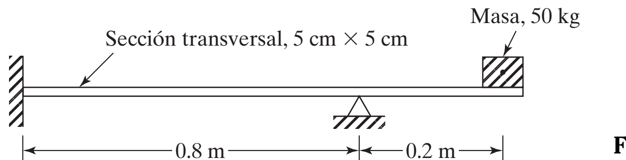


Figura 2.87

2.50 Una viga de acero de 1 m de largo soporta una masa de 50 kg en su extremo libre, como se muestra en la figura 2.88. Encuentre la frecuencia natural de vibración transversal del sistema modelándolo como un sistema de un solo grado de libertad.

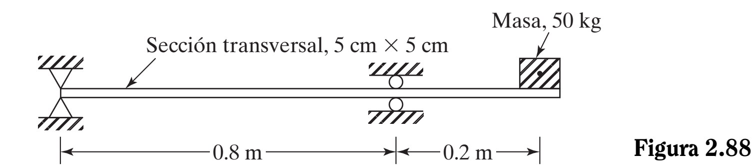


Figura 2.88

2.51 Determine el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la masa de un sistema de resorte-masa con $k = 500$ N/m, $m = 2$ kg, $x_0 = 0.1$ m y $\dot{x}_0 = 5$ m/s.

2.52 Determine el desplazamiento (x), velocidad ($\dot{x}$) y aceleración ($\dot{x}$) de un sistema de resorte-masa con $\omega_n = 10$ rad/s con las condiciones iniciales $x_0 = 0.05$ m y $\dot{x}_0 = 1$ m/s. Trace $x(t)$, $\dot{x}(t)$, y $\dot{x}(t)$ de $t = 0$ a 5 s.

2.53 Se observa que la respuesta de vibración libre de un sistema de resorte-masa tiene una frecuencia de 2 rad/s, una amplitud de 10 mm y un desplazamiento de fase de 1 rad a partir de $t = 0$. Determine las condiciones iniciales que iniciaron la vibración libre. Suponga la relación de amortiguamiento del sistema como 0.1.

2.54 Se determina que la frecuencia natural de un automóvil es de 20 rad/s sin pasajeros y de 17.32 rad/s con pasajeros de 500 kg de masa. Encuentre la masa y rigidez del automóvil tratándolas como un sistema de un solo grado de libertad.

2.55 Un sistema de resorte-masa con masa de 2 kg y rigidez de 3200 N/m tiene un desplazamiento inicial de $x_0 = 0$. ¿Cuál es la velocidad inicial máxima que se puede impartir a la masa sin que la amplitud de vibración libre exceda un valor de 0.1 m?

2.56 Un resorte helicoidal, hecho de alambre musical de diámetro d, tiene un diámetro de espira medio (D) de 0.5625 pulg y N espiras (vueltas) activas. Su frecuencia de vibración (f) es de 193 Hz y su tasa k es de 26.4 lb/pulg. Determine el diámetro d del alambre y la cantidad de espiras N, suponiendo que el módulo de cortante G es de 11.5×10^6 lb/pulg^2 y la densidad de peso ρ es de 0.282 lb/pulg^3. La tasa de resorte (k) y la frecuencia (f) están dadas por

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}, \qquad f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

donde W es el peso del resorte helicoidal y g es la aceleración de la gravedad.

2.57 Resuelva el problema 2.56 si el material del resorte helicoidal se cambia de alambre musical a aluminio con $G = 4 \times 10^6$ lb/pulg^2 y $\rho = 0.1$ lb/pulg^3.

2.58 Se utiliza una viga de acero en voladizo para soportar una máquina en su extremo libre. Para ahorrar peso, se propone reemplazar la viga de acero por una de aluminio de dimensiones idénticas. Determine el cambio esperado de la frecuencia natural del sistema viga-máquina.

2.59 Un barril de petróleo de 1 m de diámetro y masa de 500 kg flota en un baño de agua salada de densidad $\rho_\omega = 1050$ kg/m^3. Considerando desplazamientos pequeños del barril en la dirección vertical (x) determine la frecuencia natural de vibración del sistema.

2.60 La ecuación de movimiento de un sistema de resorte-masa es (unidades: sistema SI)

$$500\ddot{x} + 1000\left(\frac{x}{0.025}\right)^3 = 0$$

a. Determine la posición de equilibrio estático del sistema.

b. Derive la ecuación linealizada de movimiento para desplazamientos pequeños (x) con respecto a la posición de equilibrio estático.

c. Encuentre la frecuencia natural de vibración del sistema para desplazamientos pequeños.

d. Encuentre la frecuencia natural de vibración del sistema para desplazamientos pequeños cuando la masa es de 600 (en lugar de 500).

2.61 Cuando se aplican los frenos a un vehículo que viaja a una velocidad de 100 km/hora se produce una desaceleración de 10 m/s^2. Determine el tiempo requerido y la distancia recorrida antes de que el vehículo se detenga por completo.

2.62 Un poste cilíndrico hueco se suelda a una señal de tránsito rectangular de acero como se muestra en la figura 2.89 con los siguientes datos:

Dimensiones: $l = 2$ m, $r_0 = 0.050$ m, $r_i = 0.045$ m, $b = 0.75$ m, $d = 0.40$ m, $t = 0.005$ m; propiedades del material: ρ (peso específico) = 76.50 kN/m^3, $E = 207$ GPa, $G = 79.3$ GPa

Encuentre las frecuencias naturales del sistema en vibración transversal en los planos yz y xz considerando las masas del poste y la señal.

Sugerencia: Considere el poste como una viga en voladizo sujeta a vibración transversal en el plano apropiado.

2.63 Resuelva el problema 2.62 con un cambio de material de acero a bronce tanto para el poste como para la señal. Propiedades del bronce: ρ (peso específico) = 80.1 kN/m^3, $E = 111.0$ GPa, $G = 41.4$ GPa.

Sección 2.3 Vibración libre de un sistema torsional no amortiguado

2.64 Un péndulo simple se hace oscilar a partir de su posición de reposo al impartirle una velocidad angular de 1 rad/s. Oscila con una amplitud de 0.5 rad. Determine la frecuencia natural y la longitud del péndulo.

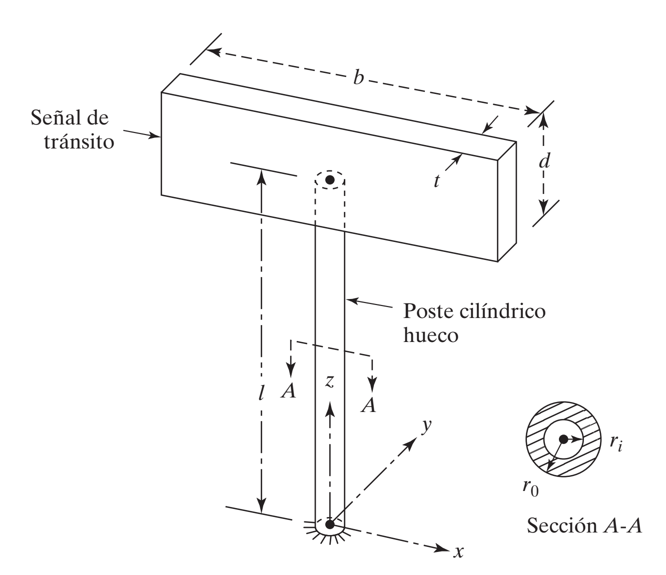


Figura 2.89

2.65 Una polea de 250 mm de diámetro impulsa una segunda polea de 1000 mm de diámetro por medio de un banda (vea la figura 2.90). El momento de inercia de la polea impulsada es de 0.2 kg-m^2. La banda que conecta estas poleas está representada por dos resortes cada uno de rigidez k. ¿Con qué valor de k será la frecuencia natural de 6 Hz?

2.66 Derive una expresión para la frecuencia natural del péndulo simple que se muestra en la figura 1.10. Determine el periodo de oscilación de un péndulo simple de masa $m = 5$ kg y longitud $l = 0.5$ m.

2.67 Una masa m se fija en el extremo de una barra de masa insignificante y se hace que vibre en tres diferentes configuraciones, como se indica en la figura 2.91. Determine la configuración correspondiente a la frecuencia natural más alta.

2.68 La figura 2.92 muestra una nave espacial con cuatro paneles solares. Cada panel es de 5 pies $\times$ 3 pies $\times$ 1 pie con densidad de peso de 0.1 lb/pulg^3 y está conectado al cuerpo de la nave por medio de barras de aluminio de 12 pulg de longitud y 1 pulg de diámetro. Suponiendo que el cuerpo de la nave es muy grande (rígido), determine la frecuencia natural de vibración de cada panel con respecto al eje de la barra de aluminio de conexión.

2.69 Se quita una de las aspas de un ventilador eléctrico (como se muestra mediante líneas punteadas en la figura 2.93). La flecha de acero, sobre la cual están montadas las aspas, equivale a una flecha uniforme de 1 pulg de diámetro y 6 pulg de largo. Cada aspa se puede modelar como una varilla delgada uniforme de 2 lb de peso y 12 pulg de largo. Determine la frecuencia de vibración de las tres aspas restantes con respecto al eje y.

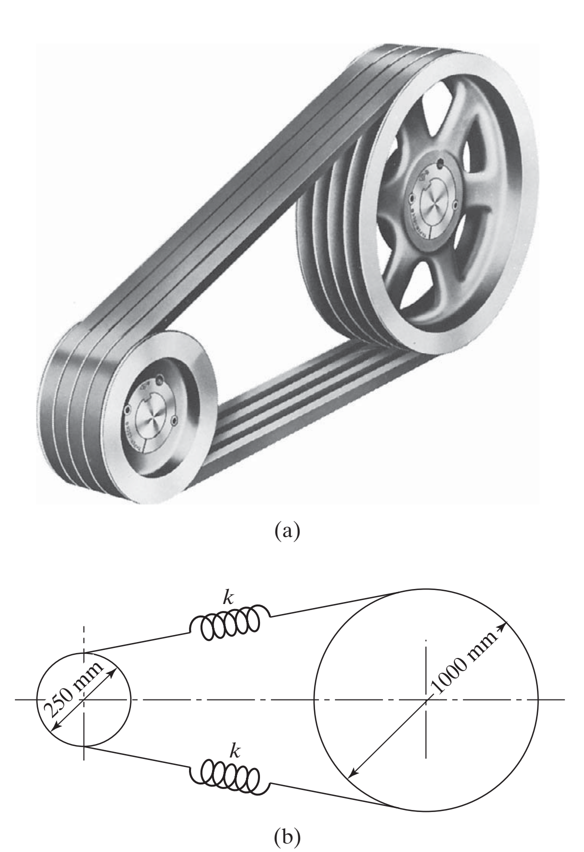


Figura 2.90 (Foto cortesía de Reliance Electric Company).

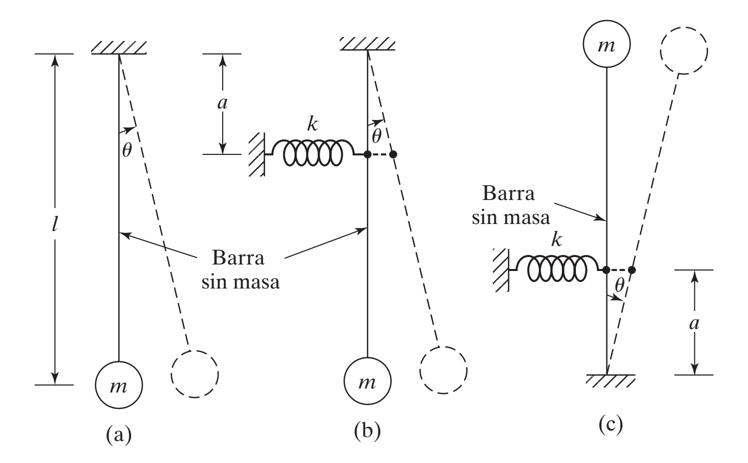


Figura 2.91

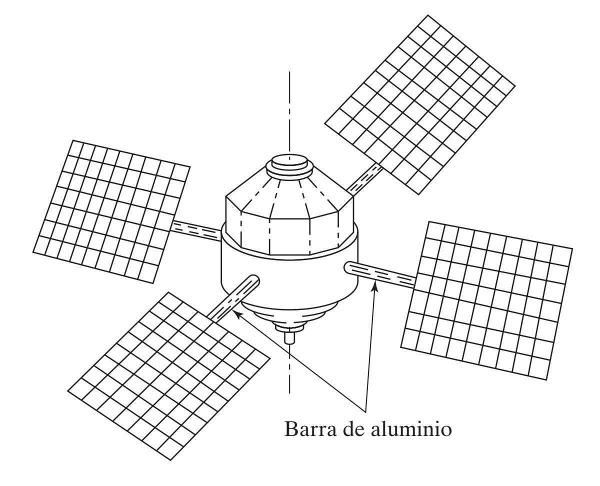


Figura 2.92

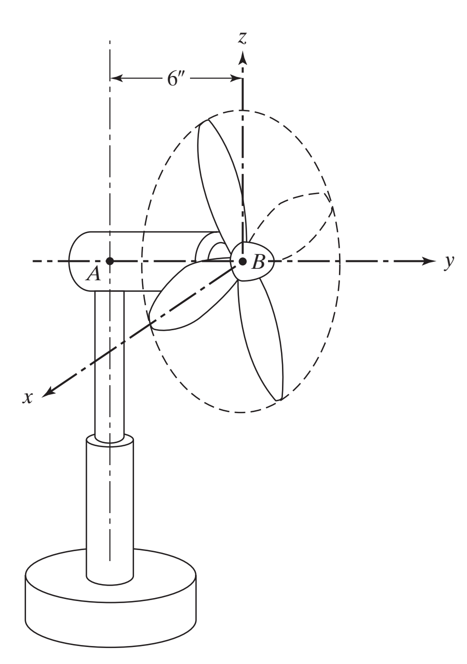


Figura 2.93

2.70 En el extremo de una flecha hueca de dos capas de 2 m de largo (figura 2.94) se fija un pesado anillo de momento de inercia de 1.0 kg-m^2. Si las dos capas de la flecha son de acero y latón, determine el periodo de vibración torsional del anillo.

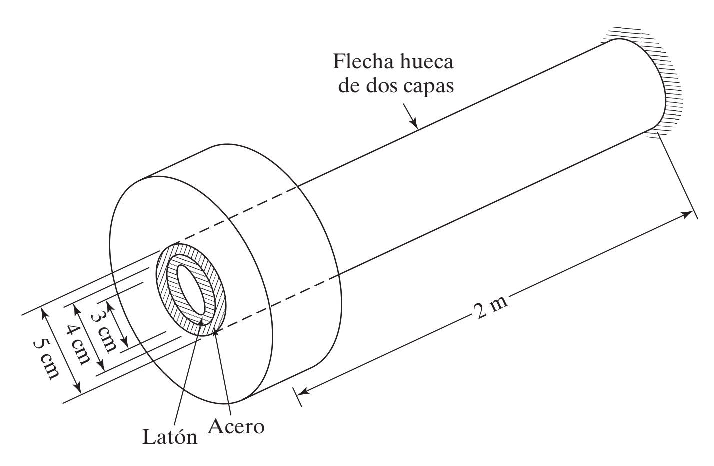


Figura 2.94

2.71 Encuentre la frecuencia natural del péndulo mostrado en la figura 2.95 cuando la masa de la barra de conexión no es insignificante comparada con la masa de la lenteja del péndulo.

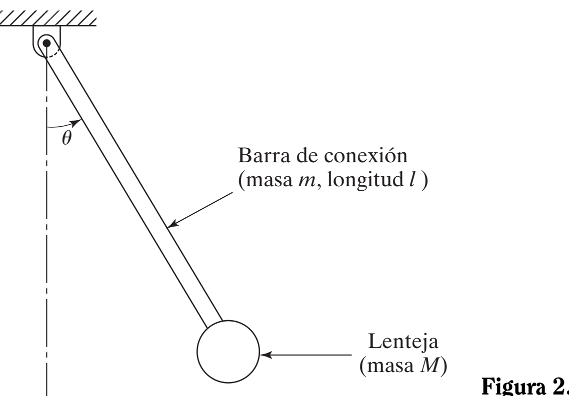


Figura 2.95

2.72 Una flecha de acero de 0.05m de diámetro y 2 m de largo se fija por un extremo y en el otro lleva un disco de acero de 1 m de diámetro y 0.1 m de espesor, como se muestra en la figura 2.14. Encuentre la frecuencia natural del sistema de vibración torsional.

2.73 Una barra uniforme de masa m y longitud l está conectada a la bisagra en el punto A y a cuatro resortes lineales y a un resorte torsional, como se muestra en la figura 2.96. Determine la frecuencia natural del sistema si $k = 2000$ N/m, $k_t = 1000$ N-m/rad, $m = 10$ kg, y $l = 5$ m.

2.74 Un cilindro de masa m y momento de inercia de masa J_0 rueda libremente sin deslizarse pero está restringido por dos resortes de rigideces k_1 y k_2, como se muestra en la figura 2.97. Encuentre su frecuencia natural de vibración, así como el valor de a que maximiza la frecuencia natural de vibración.

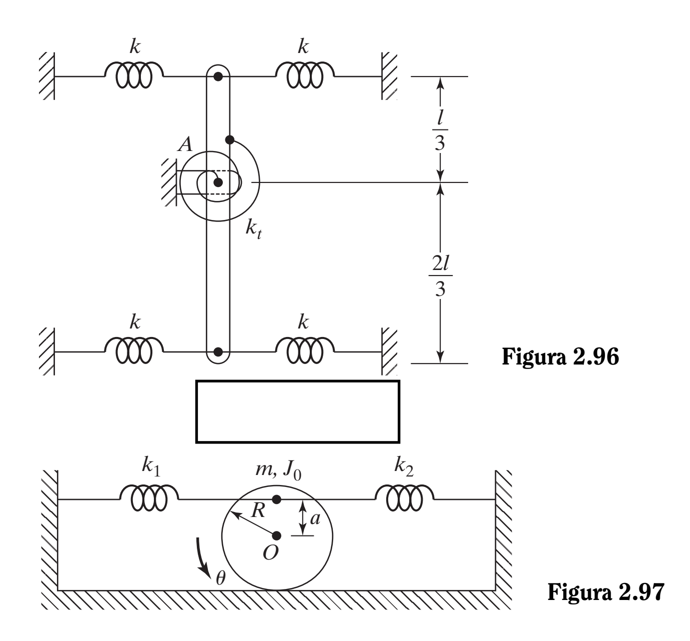


Figura 2.96

Figura 2.97

2.75 Si el péndulo del problema 2.66 se coloca en un cohete que se mueve verticalmente con una aceleración de 5 m/s^2, ¿cuál será su periodo de oscilación?

2.76 Encuentre la ecuación de movimiento de la barra rígida uniforme *OA* de longitud *l* y masa *m* de la figura 2.98. Encuentre también su frecuencia natural.

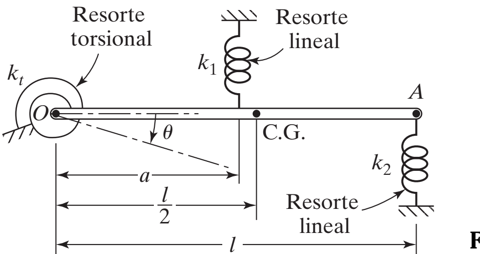


Figura 2.98

2.77 Un disco circular uniforme gira alrededor del punto *O*, como se muestra en la figura 2.99. Encuentre la frecuencia natural del sistema, así como su frecuencia máxima al variar el valor de *b*.

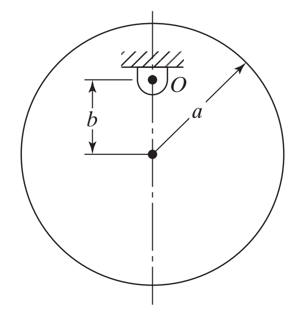


Figura 2.99

2.78 Derive la ecuación de movimiento del sistema mostrado en la figura 2.100, con los siguientes métodos: (a) la segunda ley del movimiento de Newton; (b) el principio de D'Alembert, y (c) el principio de trabajo virtual.

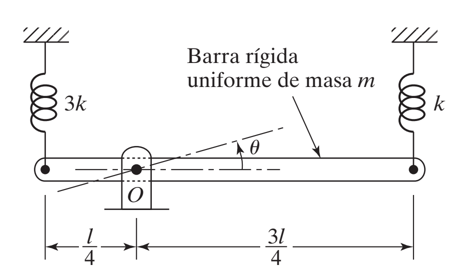


Figura 2.100

2.79 Encuentre la frecuencia natural del sistema de señal de tránsito descrito en el problema 2.62 en vibración torsional con respecto al eje z considerando las masas tanto del poste como de la señal.

Sugerencia: La rigidez de resorte del poste en vibración torsional con respecto al eje z está dada por $k_t = \frac{\pi G}{2l}(r_0^4 - r_i^4)$. El momento de inercia de masa de la señal con respecto al eje z está dado por $I_0 = \frac{1}{12} m_0 (d^2 + b^2)$, donde m_0 es la masa de la señal.

2.80 Resuelva el problema 2.79 cambiando el material de acero a bronce tanto para el poste como para la señal. Propiedades del bronce: ρ (peso específico) = 80.1 kN/m^3, E = 111.0 GPa, G = 41.4 GPa.

2.81 Una masa m_1 se fija en un extremo de una barra uniforme de masa m_2 cuyo otro extremo gira alrededor del punto O como se muestra en la figura 2.101. Determine la frecuencia natural de vibración del péndulo resultante para pequeños desplazamientos angulares.

2.82 En la figura 2.102 se muestra el movimiento angular del antebrazo de una mano humana que sostiene una masa m_0. Durante el movimiento se puede considerar que el antebrazo gira alrededor de la articulación (pivote) O con las fuerzas musculares modeladas en la forma de una fuerza generada por el tríceps $(c_1\dot{x})$ y una fuerza generada por el bíceps $(-c_2\theta)$ donde c_1 y c_2 son constantes y $\dot{x}$ es la velocidad con la cual el tríceps se alarga (o contrae). Representando el antebrazo como una barra uniforme de masa m y largo l, derive la ecuación de movimiento del antebrazo para pequeños desplazamientos angulares θ. Encuentre también la frecuencia natural del antebrazo.

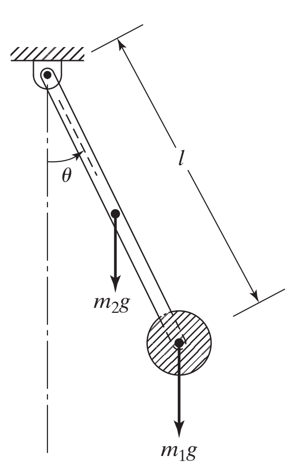


Figura 2.101

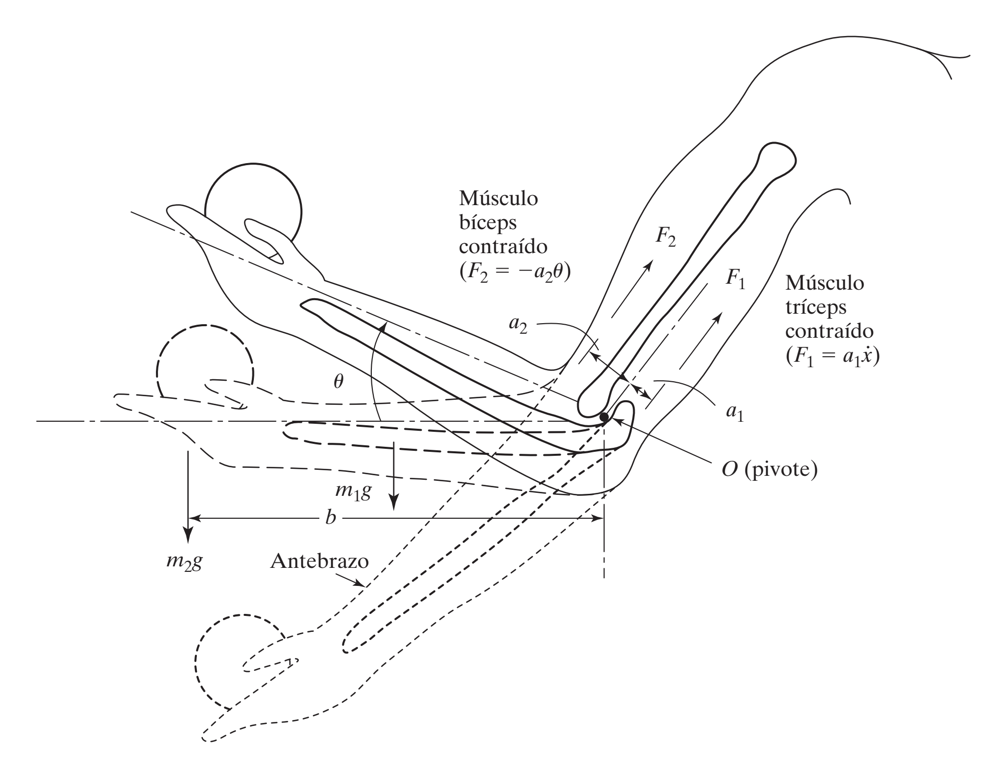


Figura 2.102 Movimiento del brazo.

Sección 2.4 Respuesta de sistemas de primer orden y constante de tiempo

2.83 Encuentre la respuesta de vibración libre y la constante de tiempo en los casos en que sea aplicable, de sistemas regidos por las siguientes ecuaciones de movimiento:

a. $100\dot{v} + 20v = 0, \quad v(0) = v(t = 0) = 10$
b. $100\dot{v} + 20v = 10, \quad v(0) = v(t = 0) = 10$
c. $100\dot{v} - 20v = 0, \quad v(0) = v(t = 0) = 10$
d. $500\dot{\omega} + 50\omega = 0, \quad \omega(0) = \omega(t = 0) = 0.5$

Sugerencia: La constante de tiempo también se define como el valor de tiempo al cual la respuesta gradual de un sistema se eleva a 63.2% (100.0% − 36.8%) de su valor final.

2.84 Un amortiguador viscoso, con constante de amortiguación c, y un resorte, con rigidez k, se conectan a una barra sin masa AB como se muestra en la figura 2.103. La barra AB se desplaza una distancia de $x = 0.1$ m cuando se aplica una fuerza constante $F = 500$ N. La fuerza aplicada F se libera entonces abruptamente de su posición desplazada. Si el desplazamiento de la barra AB se reduce con respecto a su valor inicial de 0.1 m en el instante $t = 0$ a 0.01 m en el instante $t = 10$, encuentre los valores de c y k.

2.85 La ecuación de movimiento de un cohete, de masa m, que se eleva verticalmente bajo un empuje F y resistencia o arrastre del aire D es

$$m\dot{v} = F - D - mg$$

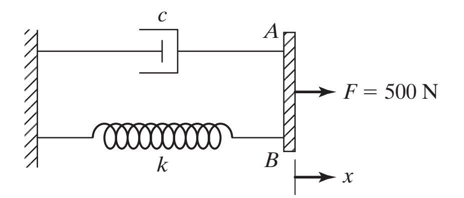


Figura 2.103

Si $m = 1000$ kg, $F = 50{,}000$ N, $D = 2000\,v$ y $g = 9.81$ m/s^2, encuentre la variación con el tiempo de la velocidad del cohete, $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, utilizando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, donde $x(t)$ es la distancia recorrida por el cohete en el tiempo t.

Sección 2.5 Método de la energía de Rayleigh

2.86 Determine el efecto del propio peso en la frecuencia natural de vibración de la viga doblemente articulada mostrada en la figura 2.104.

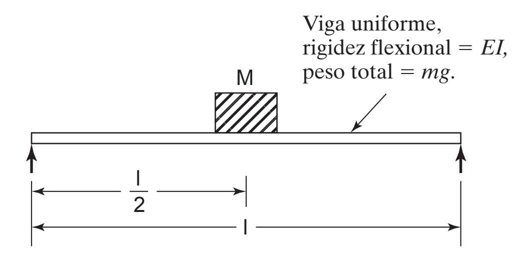


Figura 2.104

2.87 Siga el método de Rayleigh para resolver el problema 2.7.

2.88 Siga el método de Rayleigh para resolver el problema 2.13.

2.89 Encuentre la frecuencia natural del sistema que se muestra en la figura 2.54.

2.90 Siga el método de Rayleigh para resolver el problema 2.26.

2.91 Siga el método de Rayleigh para resolver el problema 2.73.

2.92 Siga el método de Rayleigh para resolver el problema 2.76.

2.93 En principio, un prisma rectangular de madera de densidad ρ_ω, altura h y sección transversal $a \times b$ se sumerge en una tina de aceite y se hace que vibre libremente en la dirección vertical (vea la figura 2.105).

Siga el método de Rayleigh para determinar la frecuencia natural de vibración del prisma. Suponga que la densidad del aceite es ρ_0. Si el prisma rectangular es reemplazado por un cilindro circular uniforme de radio r, altura h y densidad ρ_ω, ¿cambiará la frecuencia natural?

2.94 Use el método de energía para determinar la frecuencia natural del sistema mostrado en la figura 2.97.

2.95 Use el método de energía para determinar la frecuencia natural del sistema mostrado en la figura 2.85.

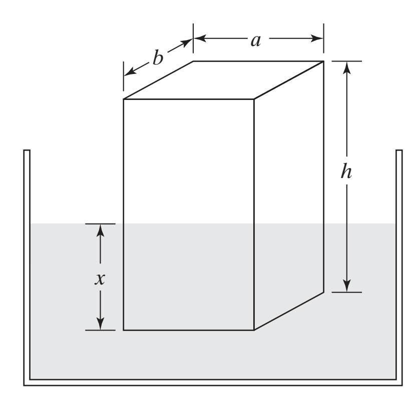


Figura 2.105

2.96 Un cilindro de masa m y momento de inercia de masa J está conectado a un resorte de rigidez k y rueda sobre una superficie áspera como se muestra en la figura 2.106. Si el desplazamientos traslacional y angular del cilindro son x y θ con respecto a su posición de equilibrio, determine lo siguiente:

a. La ecuación de movimiento del sistema para pequeños desplazamientos en función de x por medio del método de energía.

b. La ecuación de movimiento del sistema para pequeños desplazamientos en función de θ por medio del método de energía.

c. Encuentre las frecuencias naturales del sistema por medio de la ecuación de movimiento derivada en las partes (a) y (b). ¿Son iguales las frecuencias naturales resultantes?

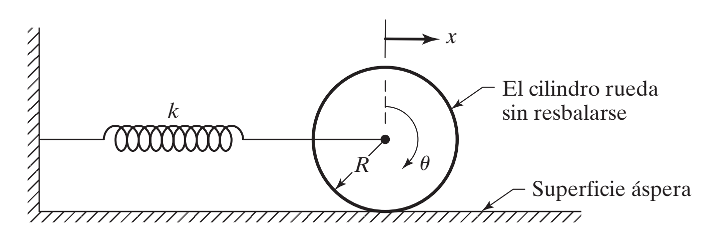


Figura 2.106

Sección 2.6 Vibración libre con amortiguamiento viscoso

2.97 Un péndulo simple vibra a una frecuencia de 0.5 Hz en el vacío y a 0.45 Hz en un fluido viscoso. Determine la constante de amortiguamiento, suponiendo que la masa de la lenteja del péndulo es de 1 kg.

2.98 La relación de amplitudes sucesivas de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado es de 18:1. Determine la relación de amplitudes sucesivas si la cantidad de amortiguamiento se (a) duplica, y (b) se reduce a la mitad.

2.99 Suponiendo que el ángulo de fase es cero, demuestre que la respuesta $x(t)$ de un sistema de un solo grado de libertad subamortiguado alcanza un valor máximo cuando

$$\text{sen } \omega_d t = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

y un valor mínimo cuando

$$\text{sen } \omega_d t = -\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Demuestre también que las ecuaciones de las curvas que pasan por los valores máximo y mínimo de $x(t)$ son, respectivamente

$$x = \sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

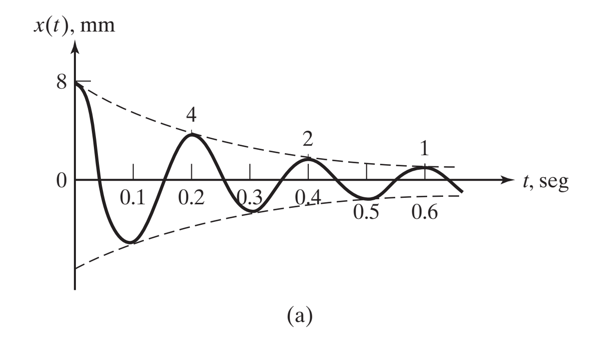
y

$$x = -\sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

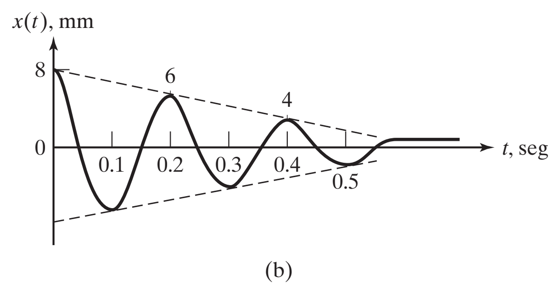
2.100 Derive una expresión para el tiempo en que la respuesta de un sistema críticamente amortiguado alcance su valor máximo. También determine la expresión para la respuesta máxima.

2.101 Se va a diseñar un amortiguador para limitar su alargamiento de más a 15% de su desplazamiento inicial cuando se deja libre. Encuentre la relación de amortiguamiento ζ_0 requerida. ¿Cuál será el alargamiento de más si ζ se hace igual a (a) $\frac{3}{4}\zeta_0$ y $\frac{5}{4}\zeta_0$?

2.102 Las respuestas de vibración libre de un motor eléctrico de 500 N de peso montado en cimentaciones diferentes se muestran en las figuras 2.107(a) y (b). Identifique lo siguiente en cada caso; (i) la naturaleza del amortiguamiento provisto por la cimentación, (ii) la constante de resorte y el coeficiente de amortiguamiento de la cimentación, e (iii) las frecuencias naturales no amortiguada y amortiguada del motor eléctrico.



(a)



(b)

Figura 2.107

2.103 Para un sistema de resorte-masa-amortiguador, $m = 50$ kg y $k = 5\,000$ N/m. Encuentre lo siguiente: (a) constante de amortiguamiento crítico, c_c; (b) frecuencia natural amortiguada, cuando $c = c_c/2$, y (c) decremento logarítmico.

2.104 Un carro de ferrocarril de 2000 kg de masa que viaja a una velocidad $v = 10$ m/s es detenido al final del carril por un sistema de resorte-amortiguador, como se muestra en la figura 2.108. Si la rigidez del resorte es $k = 80$ N/mm y la constante de amortiguamiento es $c = 20$ N-s/mm, determine (a) el desplazamiento máximo del carro después de que choca con los resortes y el amortiguador, y (b) el tiempo requerido para que alcance un desplazamiento máximo.

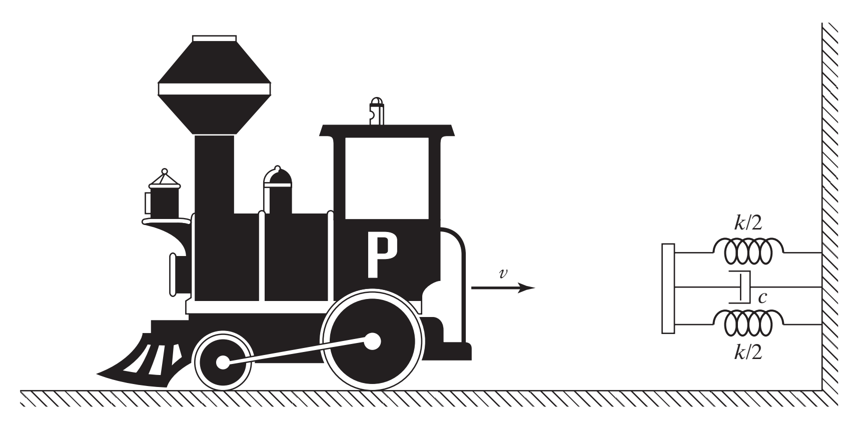


Figura 2.108

2.105 Un péndulo torsional tiene una frecuencia natural de 200 ciclos/min cuando vibra en el vacío. El momento de inercia de masa del disco es de 0.2 kg-m². Luego se sumerge en aceite y se ve que su frecuencia natural es de 180 ciclos/min. Determine la constante de amortiguamiento. Si cuando el disco se coloca en aceite, se hace que se desplace 2º, encuentre su desplazamiento al final del primer ciclo.

2.106 Un chico montado en una bicicleta se puede modelar como un sistema de resorte-masa-amortiguador con un peso, rigidez y constante de amortiguamiento equivalentes de 800 N, 50,000 N/m y 1000 N-s/m, respectivamente. La colocación diferencial de los bloques de concreto en la carretera hace que el nivel de la superficie se reduzca de repente, como se indica en la figura 2.109. Si la velocidad de la bicicleta es de 5 m/s (18 km/h), determine el desplazamiento del chico en la dirección vertical. Suponga que la bicicleta no vibra en la dirección vertical antes de encontrarse con el desnivel en el desplazamiento vertical.

2.107 Un prisma rectangular de madera de 20 lb de peso, 3 pies de altura y sección transversal de 1 pie × 2 pies flota y permanece vertical en una tina de aceite. Se puede suponer que la resistencia friccional del aceite equivale a un coeficiente de amortiguamiento viscoso ζ. Cuando el prisma se sumerge una distancia de 6 pulg con respecto a su posición de equilibrio y se suelta, se ve que llega a una profundidad de 5.5 pulg al final de su primer ciclo de oscilación. Determine el valor del coeficiente de amortiguamiento del aceite.

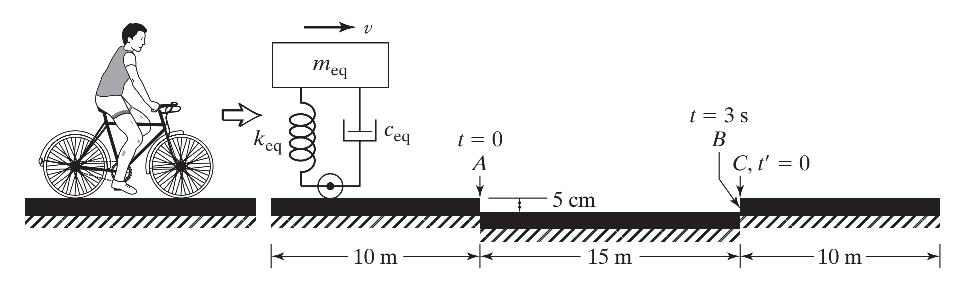


Figura 2.109

2.108 Un cuerpo vibratorio con amortiguamiento viscoso realiza cinco oscilaciones completas por segundo y en 50 ciclos su amplitud disminuye a 10 por ciento. Determine el decremento logarítmico y la relación de amortiguamiento. ¿En qué proporción se reducirá el periodo de vibración si se suprime el amortiguamiento?

2.109 La distancia de retroceso máxima permisible de un cañón se especifica como 0.5 m. Si la velocidad de retroceso inicial debe ser de entre 8 m/s y 10 m/s, determine la masa del cañón y la rigidez del mecanismo de retroceso. Suponga que se utiliza un amortiguador hidráulico críticamente amortiguado en el mecanismo de retroceso y que la masa del cañón tiene que ser al menos de 500 kg.

2.110 Un sistema viscosamente amortiguado tiene una rigidez de 5000 N/m, una constante de amortiguamiento crítico de 0.2 N-s/mm y un decremento logarítmico de 2.0. Si al sistema se le imparte una velocidad inicial de 1 m/s, determine el desplazamiento máximo del sistema.

2.111 Explique por qué un sistema sobreamortiguado nunca pasa por la posición de equilibrio estático cuando se le imparte sólo un desplazamiento inicial y (b) sólo una velocidad inicial.

2.112-2.114 Derive la ecuación de movimiento y determine la frecuencia natural de vibración de cada uno de los sistemas mostrados en las figuras 2.110 a 2.112.

2.115-2.117 Utilizando el principio de trabajo virtual, derive la ecuación de movimiento de cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 2.110 a 2.112.

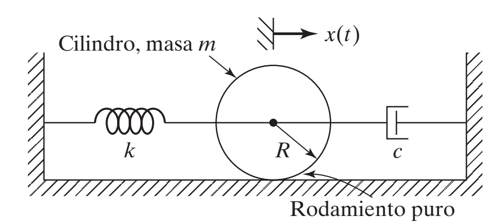


Figura 2.110

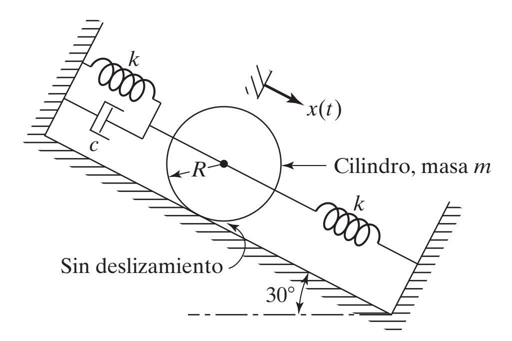


Figura 2.111

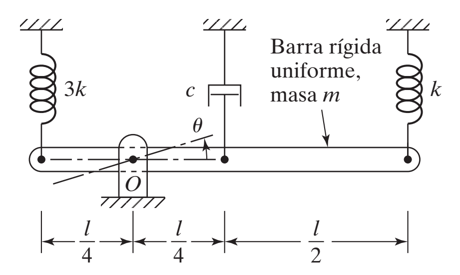


Figura 2.112

2.118 Un prisma rectangular de madera de sección transversal de 40 cm × 60 cm, altura de 120 cm y masa de 40 kg, flota en un fluido como se muestra en la figura 2.105. Cuando se le perturba, se observa que vibra libremente con un periodo natural de 0.5 s. Determine la densidad del fluido.

2.119 El sistema que se muestra en la figura 2.113 tiene una frecuencia natural de 5 Hz con los siguientes datos: $m = 10$ kg, $J_0 = 5$ kg-m^2, $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 25$ cm. Cuando el sistema experimenta un desplazamiento inicial, la amplitud de vibración libre se reduce en 80 por ciento en 10 ciclos. Determine los valores de k y c.

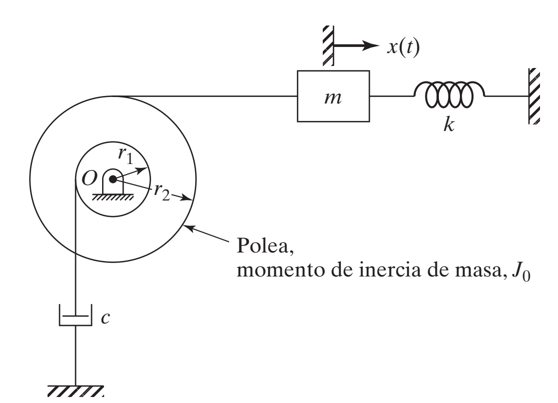


Figura 2.113

2.120 El rotor de un indicador de carátula está conectado a un resorte torsional y a un amortiguador torsional viscoso para formar un sistema torsional de un solo grado de libertad. La escala está graduada en divisiones iguales, y la posición de equilibrio del rotor corresponde a cero en la escala. Cuando se aplica un par de torsión de 2×10^{-3} N-m, el desplazamiento angular del rotor es de 50º y la aguja señala 80 divisiones en la escala. Cuando se libera el rotor en esta posición, la aguja oscila primero a −20 divisiones en un segundo y luego a 5 divisiones en otro segundo. Encuentre (a) el momento de inercia de masa del rotor; (b) el periodo natural no amortiguado del rotor; (c) la constante de amortiguamiento torsional, y (d) la rigidez de resorte torsional.

2.121 Determine los valores de ζ de ω_d para los siguientes sistemas viscosamente amortiguados:

a. $m = 10$ kg, $c = 150$ N-s/m, $k = 1000$ N/m
b. $m = 10$ kg, $c = 200$ N-s/m, $k = 1000$ N/m
c. $m = 10$ kg, $c = 250$ N-s/m, $k = 1000$ N/m

2.122 Determine la respuesta de vibración libre de los sistemas viscosamente amortiguados descritos en el problema 2.121 cuando $x_0 = 0.1$ m y $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

2.123 Determine la respuesta de vibración libre durante un ciclo de movimiento armónico simple dado por $x(t) = 0.2$ sen $\omega_d t$ m por un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado con los siguientes parámetros:

a. $m = 10$ kg, $c = 50$ N-s/m, $k = 1000$ N/m
b. $m = 10$ kg, $c = 150$ N-s/m, $k = 1000$ N/m

2.124 La ecuación de movimiento de un sistema de resorte-masa-amortiguador, con un resorte endurecido, está dada por (en unidades SI)

$$100\ddot{x} + 500\dot{x} + 10{,}000x + 400x^3 = 0$$

a. Determine la posición de equilibrio estático del sistema.

b. Derive la ecuación de movimiento linealizada para desplazamientos pequeños (x) con respecto a la posición de equilibrio estático.

c. Encuentre la frecuencia natural de vibración del sistema para desplazamientos pequeños.

2.125 La ecuación de movimiento de un sistema de resorte-masa-amortiguador, con un resorte blando, es (en unidades SI)

$$100\ddot{x} + 500\dot{x} + 10{,}000x - 400x^3 = 0$$

a. Determine la posición de equilibrio del sistema estático del sistema.

b. Derive la ecuación de movimiento linealizada para desplazamientos pequeños (x) con respecto a la posición de equilibrio estático.

c. Determine la frecuencia natural de vibración del sistema para desplazamientos pequeños.

2.126 El indicador de aguja de un instrumento electrónico está conectado a un amortiguador torsional viscoso y a un resorte torsional. Si la inercia rotacional del indicador de aguja con respecto a su pivote es 25 kg-m^2 y la constante del resorte torsional es de 100 N-m/rad, determine la constante de amortiguamiento del amortiguador torsional para que el instrumento esté críticamente amortiguado.

2.127 Encuentre las respuestas de los sistemas regidos por las siguientes ecuaciones de movimiento con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$:

a. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$
b. $3\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = 0$
c. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 8x = 0$

2.128 Encuentre las respuestas de los sistemas regidos por las siguientes ecuaciones de movimiento con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$:

a. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$
b. $3\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = 0$
c. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 8x = 0$

2.129 Encuentre las respuestas de los sistemas regidos por las siguientes ecuaciones de movimiento con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$:

a. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$
b. $3\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = 0$
c. $2\ddot{x} + 8\dot{x} + 8x = 0$

2.130 Un sistema de resorte-masa vibra con una frecuencia de 120 ciclos por minuto en aire y con una frecuencia de 100 ciclos por minuto en un líquido. Encuentre la constante de resorte k, la constante de amortiguamiento c y la relación de amortiguamiento ζ cuando vibra en el líquido. Considere $m = 10$ kg.

2.131 Encuentre la frecuencia de oscilación y la constante de tiempo para los sistemas regidos por las siguientes ecuaciones:

a. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 9x = 0$
b. $\ddot{x} + 8\dot{x} + 9x = 0$
c. $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

2.132 El momento de inercia de masa de un cuerpo de revolución de forma no homogénea y/o compleja con respecto al eje de rotación se determina, si se encuentra antes su frecuencia natural de vibración torsional con respecto a su eje de rotación. En el sistema torsional mostrado en la figura 2.114, el cuerpo de revolución (o rotor) de inercia rotatoria J, está soportado por dos cojinetes libres de fricción y conectado a un resorte torsional de rigidez k_t. Si se somete a una torsión inicial (desplazamiento angular) de θ_0 y luego se deja libre, el periodo de la vibración resultante se mide como τ.

a. Encuentre una expresión para el momento de inercia de masa del rotor (J) en función de τ y k_t.

b. Determine e valor de J si $\tau = 0.5$ s y $k_t = 5000$ N-m/rad.

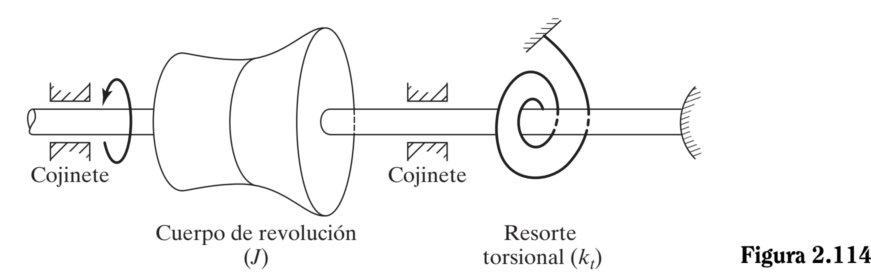


Figura 2.114

Sección 2.7 Representación gráfica de raíces características y soluciones correspondientes

2.133 Las raíces características de un sistema de un solo grado de libertad se dan a continuación. Determine todas las características aplicables del sistema de entre la ecuación característica, la constante de tiempo, la frecuencia natural no amortiguada, la frecuencia amortiguada y la relación de amortiguamiento.

a. $s_{1,2} = -4 \pm 5i$
b. $s_{1,2} = 4 \pm 5i$
c. $s_{1,2} = -4, -5$
d. $s_{1,2} = -4, -4$

2.134 Muestre las raíces características indicadas en el problema 2.133 (a)-(d) en el plano s y describa la naturaleza de la respuesta del sistema en cada caso.

2.135 La ecuación característica de un sistema de un solo grado de libertad, dado por la ecuación, se puede volver a escribir como

$$s^2 + as + b = 0 \tag{E.1}$$

donde $a = c/m$ y $b = k/m$ se consideran como los parámetro del sistema. Identifique regiones que representen un sistema estable, inestable y marginalmente estable en el plano de parámetros, es decir, el plano en el cual a y b estén denotados a lo largo de los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

Sección 2.8 Variaciones de parámetros y representaciones del lugar geométrico de las raíces

2.136 Considere la ecuación característica $2s^2 + cs + 18 = 0$. Trace el lugar geométrico de las raíces para $c \geq 0$.

2.137 Considere la ecuación característica $2s^2 + 12s + k = 0$. Trace el lugar geométrico de las raíces para $k \geq 0$.

2.138 Considere la ecuación característica $ms^2 + 12s + 4 = 0$. Trace el lugar geométrico de las raíces para $m \geq 0$.

Sección 2.9 Vibración libre con amortiguamiento de Coulomb

2.139 Un sistema de un solo grado de libertad se compone de una masa de 20 kg y un resorte de 4000 N/m de rigidez. Las amplitudes de ciclos sucesivos son de 50, 45, 40, 35, ... mm. Determine la naturaleza y magnitud de la fuerza de amortiguamiento y la frecuencia de la vibración amortiguada.

2.140 Una masa de 20 kg se desliza con un movimiento de vaivén sobre una superficie seca debido a la acción de un resorte de 10 N/mm de rigidez. Después de cuatro ciclos completos se ve que la amplitud es de 100 mm. ¿Cuál es el coeficiente de fricción promedio entre las dos superficies si la amplitud original era de 150 mm? ¿Cuánto tiempo transcurrió durante los cuatro ciclos?

2.141 Una masa de 10 kg se conecta a un resorte de 3000 N/m de rigidez y se deja libre después de que se desplaza 100 mm. Suponiendo que la masa se mueve sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura 2.42(a), determine la posición en la cual la masa se detiene. Suponga que el coeficiente de fricción entre la masa y la superficies de 0.12.

2.142 Un peso de 25 N cuelga de un resorte con rigidez de 1000 N/m. El peso vibra en la dirección vertical por la acción de una fuerza de amortiguamiento constante. Cuando inicialmente el peso es tirado hacia abajo una distancia de 10 cm de su posición de equilibrio estático y se deja libre, se detiene después de completar exactamente dos ciclos completos. Encuentre la magnitud de la fuerza de amortiguamiento.

2.143 Una masa de 20 kg cuelga de un resorte de 10,000 N/m de rigidez. El movimiento vertical de la masa se somete a una fricción de Coulomb de 50 N de magnitud. Si en principio el resorte se desplaza 5 cm hacia debajo de su posición de equilibrio estático, determine (a) el número de medios ciclos transcurridos antes de que la masa se detenga; (b) el tiempo transcurrido antes de que la masa se detenga, y (c) la extensión final del resorte.

2.144 La prueba de impacto de Charpy es una prueba dinámica en la cual se golpea una muestra con un péndulo (o martillo) y se mide la energía absorbida al romperla. Los valores medidos sirven para comparar las resistencias al impacto de diferentes materiales. Como se muestra en la figura 2.115, el péndulo cuelga de una flecha, se suelta desde una posición particular y se permite que caiga y rompa la muestra. Si se hace que el péndulo oscile libremente (sin muestra), encuentre (a) una expresión para la disminución del ángulo de oscilación por cada ciclo a causa de la fricción; (b) la solución para $\theta(t)$ si el péndulo se suelta desde un ángulo θ_0, y (c) la cantidad de ciclos después de los cuales cesa el movimiento. Suponga que la masa del péndulo es m y que el coeficiente de fricción entre la flecha y el cojinete del péndulo es μ.

2.145 Encuentre la constante de amortiguamiento viscoso para amortiguamiento de Coulomb de vibración sinusoidal.

2.146 Un sistema de un solo grado de libertad se compone de una masa, un resorte y un amortiguador en el cual tanto la fricción seca como el amortiguamiento viscoso actúan simultáneamente. La amplitud de vibración se reduce en 1 por ciento por ciclo cuando la amplitud es de 20 mm y 2 por ciento por ciclo cuando la amplitud es de 10 mm. Encuentre el valor de $(\mu N/k)$ del componente de fricción seca del amortiguamiento.

2.147 Un bloque de metal, colocado sobre una superficie áspera, se conecta a un resorte, e inicialmente se desplaza 10 cm de su posición de equilibrio. El periodo natural de movimiento es de 1.0 s y la amplitud se reduce 0.5 cm en cada ciclo. Encuentre (a) el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de metal y la superficie, y (b) la cantidad de ciclos de movimiento ejecutados por el bloque antes de detenerse.

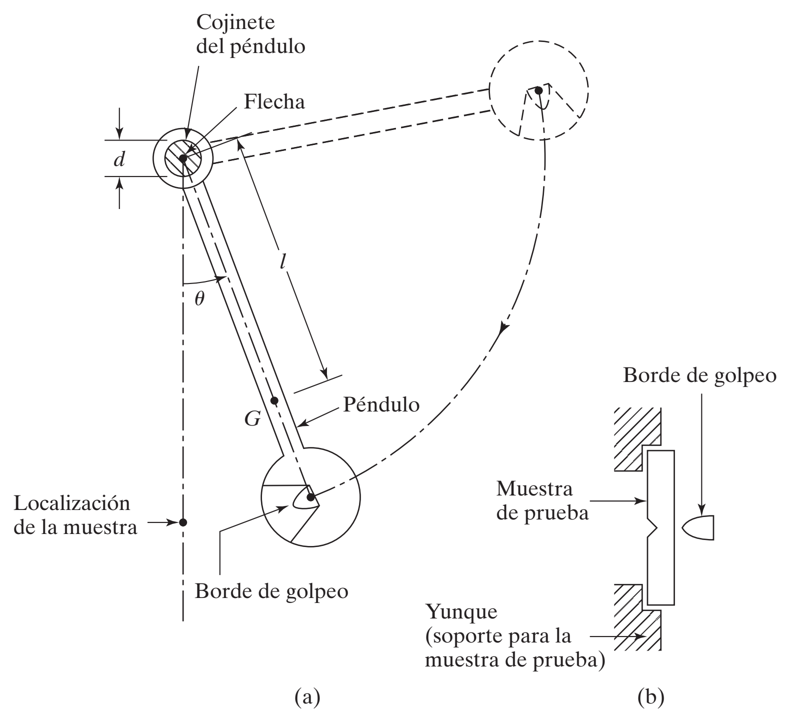


Figura 2.115

2.148 La masa de un sistema de resorte-masa con $k = 10{,}000$ N/m y $m = 5$ kg se pone a vibrar sobre una superficie áspera. Si la fuerza de fricción es $F = 20$ N y la amplitud de la masa se reduce 50 mm en 10 ciclos, determine el tiempo requerido para completar 10 ciclos.

2.149 La masa del sistema de resorte-masa vibra sobre una superficie inclinada a 30º con respeto a la horizontal como se muestra en la figura 2.116.

a. Derive la ecuación de movimiento.

b. Encuentre la respuesta del sistema con los datos siguientes:

$$m = 20 \text{ kg}, \quad k = 1000 \text{ N/m}, \quad \mu = 0.1, \quad x_0 = 0.1 \text{ m}, \quad \dot{x}_0 = 5 \text{ m/s}.$$

2.150 La masa de un sistema de resorte-masa se desplaza inicialmente 10 cm de su posición libre de esfuerzo por la aplicación de una fuerza de 25 N, la cual es igual a cinco veces el peso de la masa. Si la masa se suelta de esta posición, ¿cuánto tiempo vibrará la masa y a qué distancia se detendrá de la posición libre de esfuerzo? Suponga un coeficiente de fricción de 0.2.

Sección 2.10 Vibración libre con amortiguamiento histerético

2.151 La curva de fuerza-deflexión experimentalmente observada de una estructura compuesta se muestra en la figura 2.117. Determine la constante de amortiguamiento de histéresis, el decremento logarítmico y la relación de amortiguamiento viscoso correspondiente a esta curva.

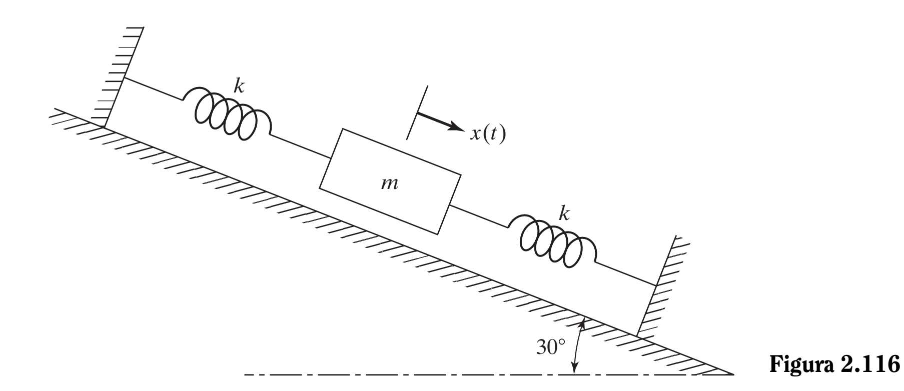


Figura 2.116

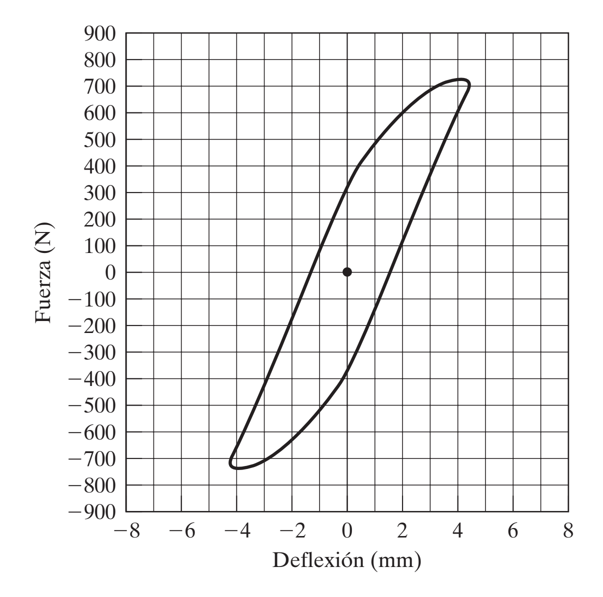


Figura 2.117

2.152 Se observa que un panel hecho de material compuesto con refuerzo de fibra se comporta como un sistema de un solo grado de libertad de 1 kg de más y 2 N/m de rigidez. La relación de amplitudes sucesivas es de 1.1. Determine el valor de la constante de amortiguamiento histerético β, la constante de amortiguamiento viscoso, $c_{eq}0_,$ y la pérdida de energía por ciclo con una amplitud de 10 mm.

2.153 Una viga en voladizo cuya rigidez a flexión es de 200 N/m soporta una masa de 2 kg en su extremo libre. La masa se desplaza inicialmente 30 mm y se suelta. Si la amplitud es de 20 mm después de 100 ciclos de movimiento, estime la constante de amortiguamiento de histéresis β de la viga.

2.154 Se fija una masa de 5 kg en el extremo superior de un resorte helicoidal y el sistema se pone a vibrar al impartirle a la masa una deflexión inicial de 25 mm. La amplitud de la masa se reduce a 10 mm después de 10 ciclos de vibración. Suponiendo una tasa de resorte de 200 N/m para el resorte helicoidal, determine el valor del coeficiente de amortiguamiento histerético (h) del resorte.

Sección 2.11 Estabilidad de sistemas

2.155 Considere la ecuación de movimiento de un péndulo simple:

$$\dddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{(E.1)}$$

a. Linealice la ecuación (E.1) con respecto a un desplazamiento angular arbitrario θ_0 del péndulo.

b. Investigue la estabilidad del péndulo con respecto a $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi$ por medio de la ecuación de movimiento linealizada.

2.156 La figura 2.118 muestra una barra rígida uniforme de masa *m* y longitud *l*, pivotada en un extremo (punto *O*) y con un disco circular de masa *M* y momento de inercia de masa *J* (con respecto a su eje de rotación) en el otro extremo (punto *P*). El disco circular está conectado a un resorte de rigidez *k* y una constante de amortiguamiento de amortiguador viscoso *c* como se indica.

a. Derive la ecuación de movimiento del sistema para pequeños desplazamientos angulares de la barra rígida con respecto al pivote *O* y exprésela en la forma:

$$m_0\dddot{\theta} + c_0\ddot{\theta} + k_0\theta = 0$$

b. Derive las condiciones correspondientes al comportamiento estable, inestable y marginalmente estable del sistema.

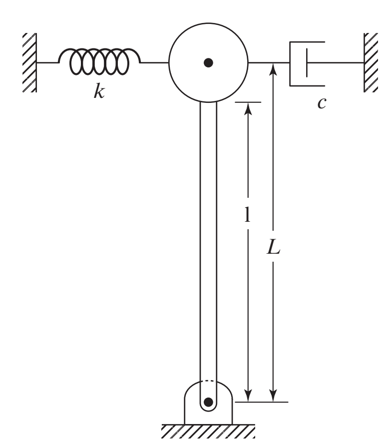


Figura 2.118

Sección 2.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

2.157 Encuentre la respuesta de vibración libre de un sistema de resorte-masa sujeto a amortiguamiento de Coulomb por medio de MATLAB con los siguientes datos:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad k = 100 \text{ N/m}, \quad \mu = 0.5, \quad x_0 = 0.4 \text{ m}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

2.158 Trace la respuesta de un sistema críticamente amortiguado (ecuación 2.80) con los siguientes datos por medio de MATLAB:

a. $x_0 = 10$ mm, 50 mm, 100 mm; $\dot{x}_0 = 0$, $\omega_n = 10$ rad/s.
b. $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ mm/s, 50 mm/s, 100 mm/s; $\omega_n = 10$ rad/s.

2.159 Trace la ecuación (2.81) y también cada uno de los dos términos de la ecuación (2.81) como una función de t por medio de MATLAB con los siguientes datos:

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s}, \quad \zeta = 2.0, \quad x_0 = 20 \text{ mm}, \quad \dot{x}_0 = 50 \text{ mm/s}$$

2.160-2.163. Aplicando Program2.m de MATLAB, trace la respuesta de vibración libre de un sistema viscosamente amortiguado con $m = 4$ kg, $k = 2500$ N/m, $x_0 = 100$ mm, $\dot{x}_0 = -10$ m/s, $\Delta t = 0.01$ s, $n = 50$ con los siguientes valores de la constante de amortiguamiento:

a. $c = 0$
b. $c = 100$ N-s/m
c. $c = 200$ N-s/m
d. $c = 400$ N-s/m

2.164 Encuentre la respuesta del sistema descrito en el problema 2.149 por medio de MATLAB.

Proyectos de diseño

2.165* Una turbina de agua de 1000 kg de masa y 500 kg-m^2 de momento de inercia de masa está montada en una flecha, como se muestra en la figura 2.119. La velocidad de operación de la turbina es de 2400 rpm. Suponiendo que los extremos de la flecha están fijos, encuentre los valores de l, a y d, de modo que la frecuencia natural de vibración de la turbina en cada una de las direcciones axial, transversal y circunferencial sea mayor que la velocidad de operación de la turbina.

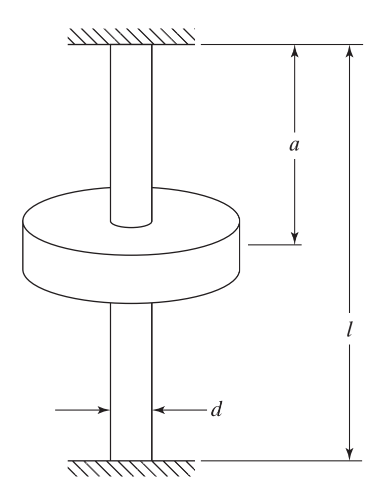


Figura 2.119

2.166* Diseñe las columnas para cada una de las estructuras de edificio que se muestran en las figuras 2.79(a) y (b) para un peso mínimo de modo que la frecuencia natural de vibración sea mayor que 50 Hz. El peso del piso (W) es de 4000 lb y la longitud de las columnas (l) es de 96 pulg. Suponga que las columnas son de acero y de sección transversal tubular con diámetro externo d y espesor de pared t.

2.167* Un extremo de una barra rígida uniforme de masa *m* está conectado a un muro por medio de una junta conectada a la bisagra O, y el otro soporta una carga concentrada M, como se muestra en la figura 2.120. La barra gira alrededor del punto conectado a la bisagra O contra un resorte torsional y un amortiguador torsional. Se propone utilizar este mecanismo, junto con un contador mecánico, para controlar la entrada a un parque de diversiones. Determine las masas m y M, y la rigidez del resorte torsional (kt) y la fuerza de amortiguamiento (Fd) necesarias para satisfacer las siguientes especificaciones: (1). Se puede utilizar un amortiguador viscoso o un amortiguador de Coulomb. (2) La barra tiene que regresar a más o menos 5º de suposición de cierre en menos de 2 segundos cuando se deja libre a partir de una posición inicial de u 5 75º.

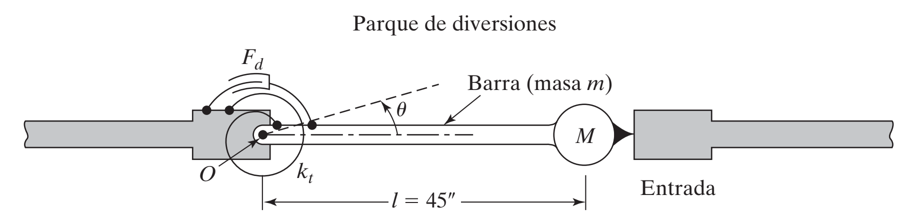


Figura 2.120

2.168*El módulo de exploración lunar se modela como una masa soportada por cuatro patas simétricamente colocadas, cada una de las cuales puede representarse de forma aproximada como un sistema de resorte-amortiguador con masa insignificante (vea la figura 2.121). Diseñe los resortes y amortiguadores del sistema para tener un periodo amortiguado de vibración entre 1 s y 2 s.

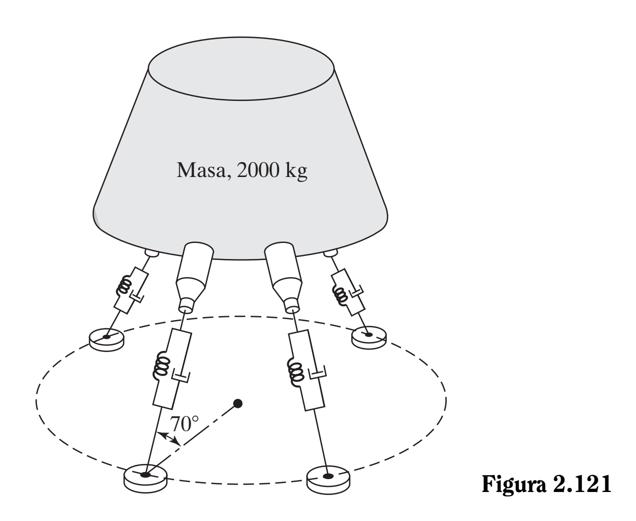


Figura 2.121

2.169*Considere la pluma telescópica y canastilla del camión de bomberos que se muestran en la figura 2.12(a). Suponga que la pluma telescópica *PQRS* está soportada por un tirante *QT*, como se muestra en la figura 2.122. Determine la sección transversal del tirante *QT* de modo que el periodo natural de vibración de la canastilla con el bombero en ella sea igual a 1 s con los siguientes datos. Suponga que cada segmento de la pluma telescópica y el tirante es una sección transversal hueca. Suponga, además, que el tirante actúa como un resorte que se deforma sólo en la dirección axial.

Datos:

Longitudes de los segmentos: PQ = 12 pies, QR = 10 pies, RS = 8 pies, TP = 3 pies

Módulo de Young del brazo telescópico y tirante = 3×10^6 lb/pulg^2

Diámetros externos de las secciones: PQ = 2.0 pulg, QR = 1.5 pulg, RS = 1.0 pulg

Diámetros internos de las secciones: PQ = 1.75 pulg, QR = 1.25 pulg, RS = 0.75 pulg

Peso de la canastilla = 100 lb

Peso del bombero = 200 lb

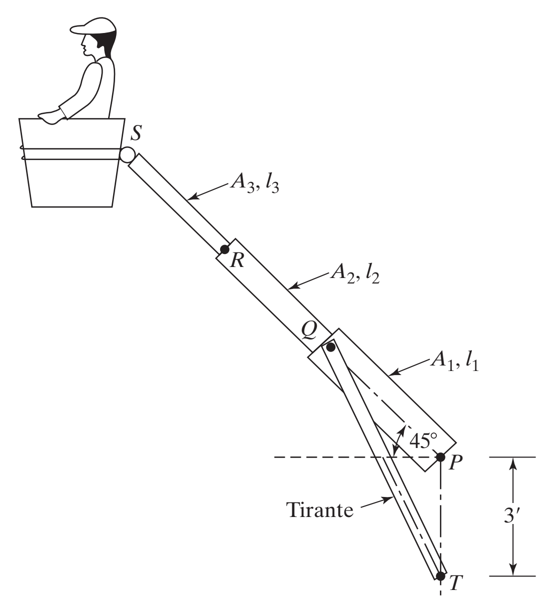


Figura 2.122

CAPÍTULO 3

Vibración armónicamente excitada

Charles Augustin de Coulomb
(1736-1806)

Ingeniero militar y físico francés. En su estupenda obra *Mémoires sur l'électricité et le magnétisme* (1784-1806), presentó su primer trabajo (*The Theory of Simple Machines)* sobre estática y mecánica en 1779, el cual describe el efecto de la resistencia y la llamada "ley de la proporcionalidad de Coulomb" entre la fricción y la presión normal. En 1784 obtuvo la solución correcta al problema de oscilaciones pequeñas de un cuerpo sometido a torsión. Es bien conocido por sus leyes de fuerza para cargas electrostáticas y magnéticas. A la unidad de carga eléctrica se le dio su nombre. (Cortesía de *Applied Mechanics Reviews*).

Esquema del capítulo

Este capítulo se ocupa de la respuesta de sistemas de un solo grado de libertad sometidos a excitaciones armónicas. En primer lugar presenta la derivación de la ecuación de movimiento y su solución cuando un sistema de un solo grado de libertad se somete a excitación armónica. Se consideran tanto sistemas amortiguados como no amortiguados. Luego, el factor de amplificación y los fenómenos de resonancia y batido se presentan en el contexto de un sistema de resorte-masa no amortiguado. Se presenta asimismo la solución total de la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea rectora como una suma de la ecuación homogénea (solución de vibración libre) y la integral particular (solución de vibración forzada). Para evaluar las constantes en la solución total se utilizan las condiciones iniciales conocidas del sistema. A continuación se presentan en detalle las importantes características del factor de amplificación y el ángulo de fase de un sistema viscosamente amortiguado. Se definen el factor de calidad, el ancho de banda y el punto de mediana potencia, y se describe el uso del factor de calidad para estimar el factor de amortiguamiento viscoso en un sistema mecánico. Enseguida se expone la respuesta del sistema de resorte-masa-amortiguador junto con la función forzada armónica en forma compleja, así como el concepto de respuesta de frecuencia compleja. Luego se presentan la respuesta de un sistema amortiguado sometido al movimiento armónico de la base y las ideas de transmisibilidad de desplazamiento y de fuerza. Las aplicaciones de este problema incluyen la vibración de los aviones provocada por las asperezas de la pista durante el rodamiento y el aterrizaje; la vibración de vehículos terrestres debido a la irregularidad y baches en carreteras, y la vibración de los edificios provocada por el movimiento del suelo durante sismos. También se analiza la respuesta de un sistema amortiguado por desbalance rotatorio; las aplicaciones de este problema comprenden varias máquinas con desbalance en los rotores. Avanzado el capítulo, se presenta la vibración forzada de un sistema de resorte-masa sometido a amortiguamiento de Coulomb, histéresis y otros tipos de amortiguamiento. La autoexcitación y el análisis de estabilidad dinámica de un sistema de un solo grado de libertad se analizan junto con aplicaciones. Se describen asimismo el método general de la función de transferencia, el método de la transformada de Laplace y el método de función de transferencia armónica para la solución de sistemas armónicamente excitados. Por último se ofrece la solución de diferentes tipos de problemas de vibración no amortiguada y amortiguada armónicamente excitada, la cual se obtiene utilizando MATLAB.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Encontrar las respuestas de sistemas de un solo grado de libertad no amortiguados y viscosamente amortiguados sometidos a diferentes tipos de fuerza armónica, como excitación de base y desbalance rotatorio.
- Distinguir entre soluciones transitorias, de estado estable y totales.
- Entender las variaciones del factor de amplificación y ángulos de fase con la frecuencia de excitación y los fenómenos de resonancia y batidos.
- Encontrar la respuesta de sistemas que implican amortiguamiento de Coulomb, histerético, y otros tipos de amortiguamiento.
- Identificar problemas autoexcitados e investigar sus aspectos de estabilidad.
- Derivar funciones de transferencia de sistemas regidos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
- Resolver problemas de vibración de un solo grado de libertad armónicamente excitada utilizando transformadas de Laplace.

- Obtener funciones de transferencia de frecuencia a partir de la función general de transferencia y representar las características de respuesta de frecuencia utilizando diagramas de Bode.
- Resolver la respuesta de vibración armónicamente excitada utilizando MATLAB.

3.1 Introducción

Se dice que un sistema mecánico o estructural experimenta vibración forzada siempre que se suministra energía externa al sistema durante la vibración. La energía externa se puede suministrar ya sea mediante una fuerza aplicada o por una excitación de desplazamiento impuesta. La fuerza aplicada o la excitación de desplazamiento pueden ser armónica, no armónica pero periódica, no periódica, o aleatoria. La respuesta de un sistema a una excitación armónica se llama *respuesta armónica*. La excitación no periódica puede ser de larga o de corta duración. La respuesta de un sistema dinámico a excitaciones no periódicas repentinamente aplicadas se llama *respuesta transitoria*.

En este capítulo consideraremos la respuesta dinámica de un sistema de un solo grado de libertad sujeto a excitaciones armónicas de la forma $F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ o $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ o $F(t) = F_0$ sen $(\omega t + \phi)$, donde F_0 es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es el ángulo de fase de la excitación armónica. El valor de ϕ depende del valor de $F(t)$ en $t = 0$ y suele considerársele cero. Bajo excitación armónica, la respuesta del sistema también será armónica. Si la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, la respuesta será muy grande. Esta condición, conocida como resonancia, se debe evitar para que no falle el sistema. La vibración producida por una máquina rotatoria desbalanceada, la oscilación de una alta chimenea producida por la formación de torbellino en un viento constante y el movimiento vertical de un automóvil sobre un carretera ondulada son ejemplos de vibración excitada.

También se abordan en este capítulo las aplicaciones de los métodos de función de transferencia, transformada de Laplace y función de frecuencia, en la solución de sistemas armónicamente excitados.

3.2 Ecuación de movimiento

Si una fuerza $F(t)$ actúa en un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado como se muestra en la figura 3.1, la ecuación de movimiento se puede obtener aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Como esta ecuación es no homogénea, la suma de la solución homogénea $x_h(t)$ y la solución particular, $x_p(t)$ proporciona su solución general. La solución homogénea, la cual es la solución de la ecuación homogénea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.2}$$

representa la vibración libre del sistema y se abordó en el capítulo 2. Como se vio en la sección 2.6.2, esta vibración libre se reduce con el tiempo en cada una de las tres posibles condiciones de amortiguamiento (subamortiguamiento, amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento) y en todas las posibles condiciones iniciales. Por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.1) se reduce en último término a la solución particular $x_p(t)$, la cual representa la vibración de estado estable. El movimiento de estado estable está presente mientras la función forzada está presente. Las variaciones con

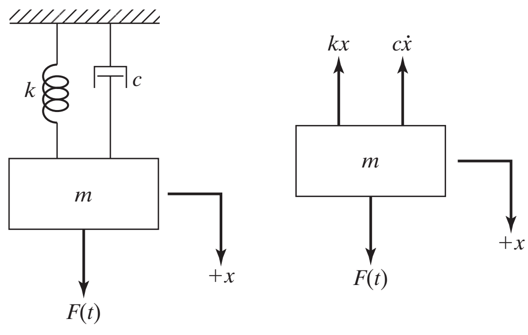


Figura 3.1 Sistema de resorte-masa-amortiguador.

el tiempo de las soluciones homogénea, particular y general en un caso típico se muestran en la figura 3.2. Se ve que $x_h(t)$ se reduce y que $x(t)$ se transforma en $x_p(t)$ después de algún tiempo (τ en la figura 3.2). La parte del movimiento que se reduce a causa del amortiguamiento (la parte de vibración libre) se llama *transitoria*. El ritmo al cual el movimiento transitorio se reduce depende de los valores de los parámetros del sistema k, c y m. En este capítulo, excepto en la sección 3.3, ignoramos el movimiento transitorio y derivamos sólo la solución particular de la ecuación (3.1), la cual representa la respuesta de estado estable, sometida a funciones forzadas armónicas.

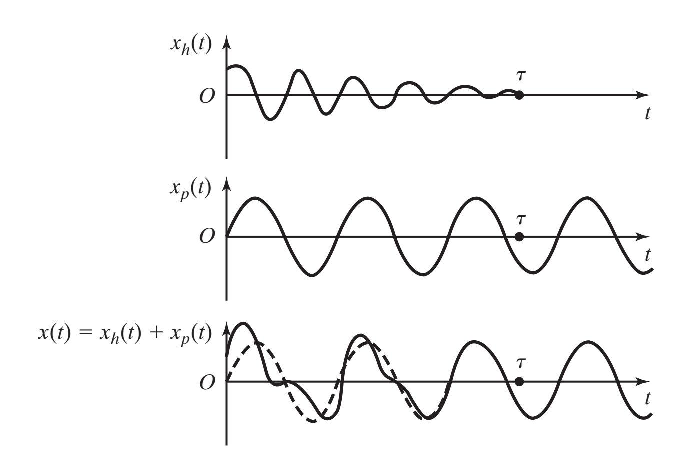


Figura 3.2 Soluciones homogénea, particular y general de la ecuación (3.1) en el caso no amortiguado.

3.3 Respuesta de un sistema no amortiguado sometido a una fuerza armónica

Por sencillez, antes de estudiar la respuesta de un sistema amortiguado consideramos un sistema no amortiguado sometido a una fuerza armónica. Si una fuerza $F(t) = F_0 \cos \omega t$ actúa en la masa m de un sistema no amortiguado, la ecuación de movimiento, ecuación (3.1), se reduce a

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.3}$$

La solución homogénea de esta ecuación está dada por

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \operatorname{sen} \omega_n t \tag{3.4}$$

donde $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ es la frecuencia natural del sistema. Como la fuerza de excitación $F(t)$ es armónica, la solución particular $x_p(t)$ también es armónica, y tiene la misma frecuencia ω. Por lo tanto suponemos una solución en la forma

$$x_p(t) = X \cos \omega t \tag{3.5}$$

donde X es una constante que indica la amplitud máxima de $x_p(t)$. Sustituyendo la ecuación (3.5) en la ecuación (3.3) y resolviendo X, obtenemos

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{est}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{3.6}$$

donde $\delta_{est} = F_0/k$ indica la desviación de la masa bajo la fuerza F_0 y en ocasiones se conoce como *deflexión estática* porque F_0 es una fuerza constante (estática). Por lo tanto, la solución total de la ecuación (3.3) es

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \tag{3.7}$$

Utilizando las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$, vemos que

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \tag{3.8}$$

y por consiguiente

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \operatorname{sen} \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega t \tag{3.9}$$

La amplitud máxima X en la ecuación (3.6) se expresa como

$$\frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{3.10}$$

La cantidad X/δ_{est} representa la relación de la amplitud de movimiento dinámica con la amplitud de movimiento estática y se conoce como *factor de amplificación* o *relación de amplitud*. La variación de la relación de amplitud, X/δ_{est}, con la relación de frecuencia $r = \omega/\omega_n$ (ecuación 3.10) se muestra en la figura 3.3. Según esta figura, se puede identificar la respuesta del sistema como de tres tipos.

Caso 1. Cuando $0 < \omega/\omega_n < 1$, el denominador en la ecuación (3.10) es positivo y la ecuación (3.5) da la respuesta sin cambios. Se dice que la respuesta armónica del sistema $x_p(t)$ está en fase con la fuerza externa como se muestra en la figura 3.4.

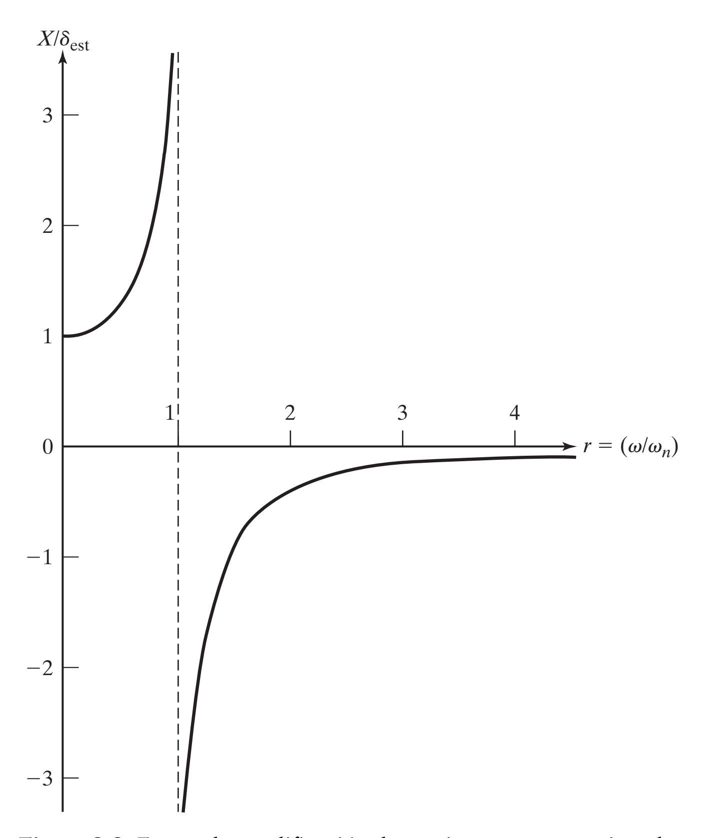
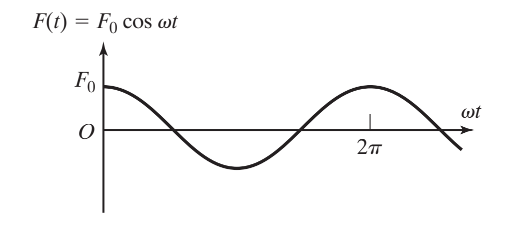


Figura 3.3 Factor de amplificación de un sistema no amortiguado, ecuación (3.10).



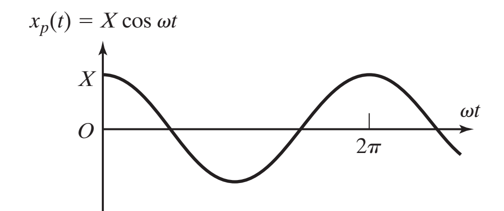
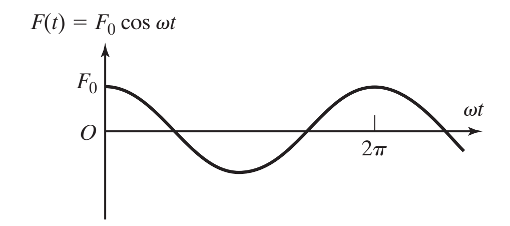


Figura 3.4 Respuesta armónica cuando $0 < \omega/\omega_n < 1$.

Caso 2. Cuando $\omega/\omega_n > 1$, el denominador en la ecuación (3.10) es negativo, y la solución de estado estable se expresa como

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \tag{3.11}$$



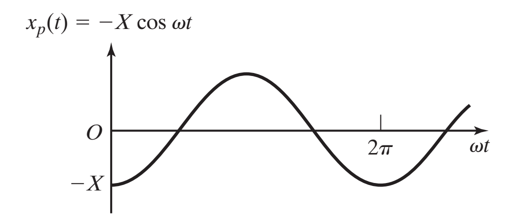


Figura 3.5 Respuesta armónica cuando $\omega/\omega_n > 1$.

donde la amplitud de movimiento X se vuelve a definir como una cantidad positiva como sigue

$$X = \frac{\delta_{\text{est}}}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \tag{3.12}$$

Las variaciones de $F(t)$ y $x_p(t)$ con el tiempo se muestran en la figura 3.5. Como $x_p(t)$ y $F(t)$ tienen signos opuestos, se dice que la respuesta está desfasada 180° con respecto a la fuerza externa. Además, a medida que $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$. Por lo tanto, la respuesta del sistema a una fuerza armónica de muy alta frecuencia se aproxima a cero.

Caso 3. Cuando $\omega/\omega_n = 1$, la amplitud X dada por la ecuación (3.10) o (3.12) se vuelve infinita. Esta condición, en la cual la frecuencia forzada ω es igual a la frecuencia natural del sistema ω_n se llama *resonancia*. Para encontrar la respuesta a está condición, reescribimos la ecuación (3.9) como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \delta_{\text{est}} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \tag{3.13}$$

Como el último término de esta ecuación toma una forma indefinida para $\omega = \omega_n$, aplicamos la regla de L'Hospital [3.1] para evaluar el límite de este término:

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\dfrac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\dfrac{d}{d\omega}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right]$$

$$= \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{t \operatorname{sen} \omega t}{2 \dfrac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{3.14}$$

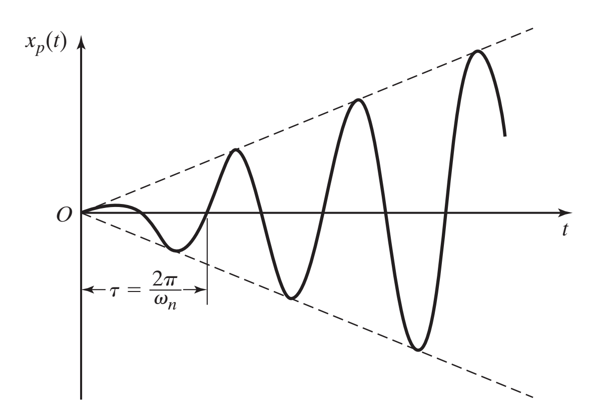


Figura 3.6 Respuesta cuando $\omega/\omega_n = 1$.

Por lo tanto, la respuesta del sistema en resonancia es

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\delta_{est}\omega_n t}{2} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{3.15}$$

En la ecuación (3.15) se ve que en resonancia, $x(t)$ se incrementa indefinidamente. El último término de la ecuación (3.15) se muestra en la figura 3.6, donde se ve que la amplitud de la respuesta se incrementa linealmente con el tiempo.

3.3.1 Respuesta total

La respuesta total del sistema, ecuación (3.7) o ecuación (3.9), también se expresa como

$$x(t) = A \cos (\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{est}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t; \qquad \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \tag{3.16}$$

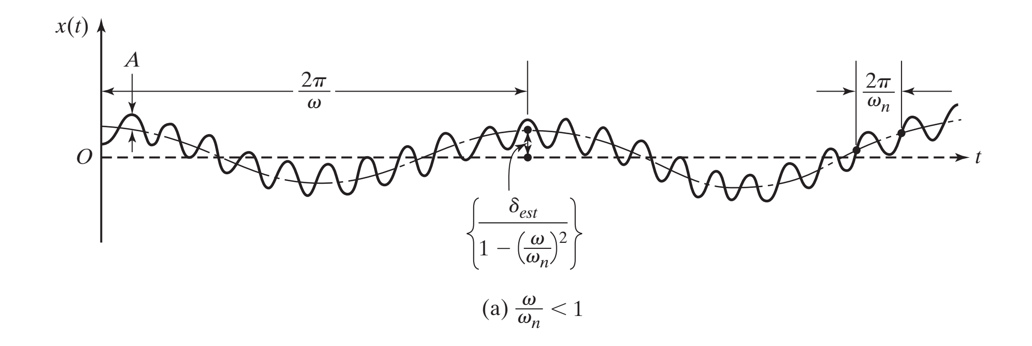
$$x(t) = A \cos (\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{est}}{-1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t; \quad \text{para } \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \tag{3.17}$$

donde A y ϕ se determinan como en el caso de la ecuación (2.21). Por lo tanto, el movimiento completo se expresa como la suma de dos curvas coseno de diferentes frecuencias. En la ecuación (3.16), la frecuencia forzada ω es menor que la frecuencia natural, y la respuesta total se muestra en la figura 3.7(a). En la ecuación (3.17), la frecuencia forzada es mayor que la frecuencia natural, y la respuesta total aparece como se muestra en la figura 3.7(b).

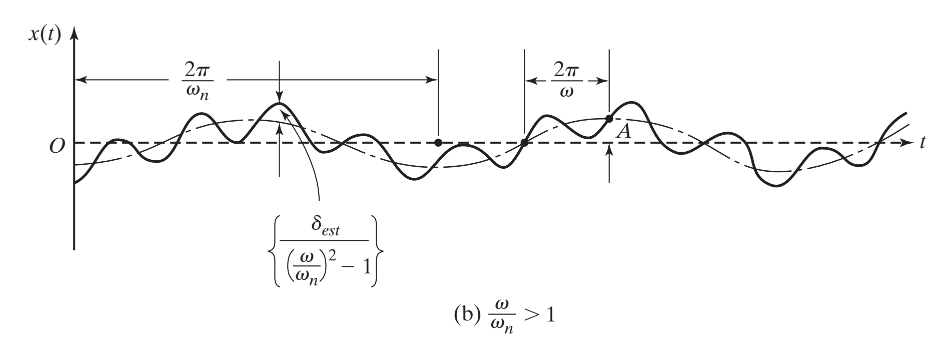
3.3.2 Fenómeno de batido

Si la frecuencia forzada se aproxima a, pero no es igual a, la frecuencia natural del sistema, puede ocurrir un fenómeno conocido como *batido*. En esta clase de vibración, la amplitud se incrementa y luego disminuye de una forma regular (vea la sección 1.10.5). El fenómeno de batido se explica considerando la solución que aporta la ecuación (3.9). Si las condiciones iniciales se consideran como $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, la ecuación (3.9) se reduce a

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\ &= \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\omega + \omega_n}{2} t \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right] \end{aligned} \tag{3.18}$$



(a) $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$



(b) $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$

Figura 3.7 Respuesta total.

Sea la frecuencia forzada ω un poco menor que la frecuencia natural.

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon \tag{3.19}$$

donde ε es una pequeña cantidad positiva. Entonces $\omega_n \approx \omega$ y

$$\omega + \omega_n \simeq 2\omega \tag{3.20}$$

La multiplicación de las ecuaciones (3.19) y (3.20) da

$$\omega_n^2 + \omega^2 \simeq 4\varepsilon\omega \tag{3.21}$$

El uso de las ecuaciones (3.19) a (3.21) en la ecuación (3.18) da

$$x(t) = \left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \operatorname{sen} \varepsilon t\right) \operatorname{sen} \omega t \tag{3.22}$$

Como ε es pequeña, la función sen εt varía lentamente; su periodo, igual a $2\pi/\varepsilon$, es grande. Por lo tanto, se ve que la ecuación (3.22) representa vibración con periodo $2\pi/\omega$ y de amplitud variable igual a

$$\left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega}\right) \operatorname{sen} \varepsilon t$$

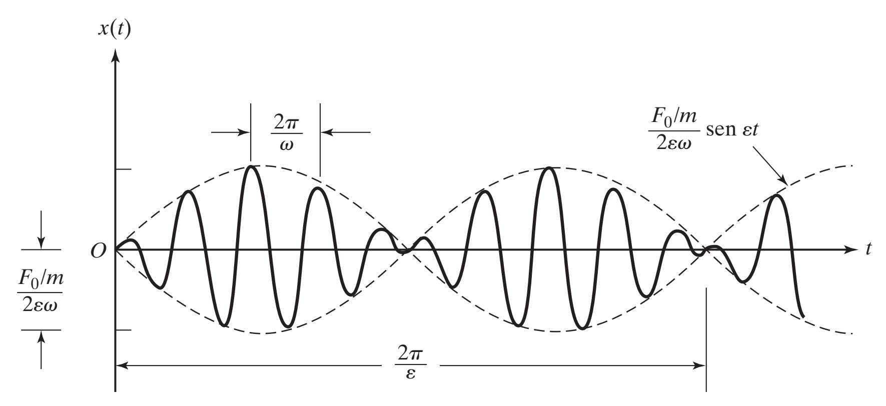


Figura 3.8 Fenómeno de batidos.

También se observa que la curva sen ωt pasará por varios ciclos, en tanto que la onda sen εt pasa por un solo ciclo, como se muestra en la figura 3.8. Por lo tanto, la amplitud se incrementa y disminuye de forma continua. El tiempo entre los puntos de amplitud cero o los puntos de amplitud máxima se llama *periodo de batido* (τ_b) y se expresa como

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \tag{3.23}$$

con la frecuencia de batido definida como

$$\omega_b = 2\varepsilon = \omega_n - \omega$$

Ejemplo 3.1 Placa que soporta una bomba

Una bomba que pesa 150 lb está montada a la mitad de una placa de acero de 0.5 pulg de espesor, 20 pulg de ancho, y 100 pulg de largo, sujeta a lo largo de dos bordes como se muestra en la figura 3.9. Durante la operación de la bomba, la placa se somete a una fuerza armónica, $F(t) = 50 \cos 62.832t/\text{lb}$. Encuentre la amplitud de vibración de la placa.

Solución: La placa se puede modelar con una viga empotrada como un módulo de Young (E) $= 30 \times 10^6$ lb/pulg^2, longitud (l) $= 100$ pulg, y momento de inercia de área (I) $= \frac{1}{12}(20)(0.5)^3 = 0.2083$ pulg^4. La rigidez a flexión de la viga está dada por

$$k = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192(30 \times 10^6)(0.2083)}{(100)^3} = 1200.0 \text{ lb/pulg} \tag{E.1}$$

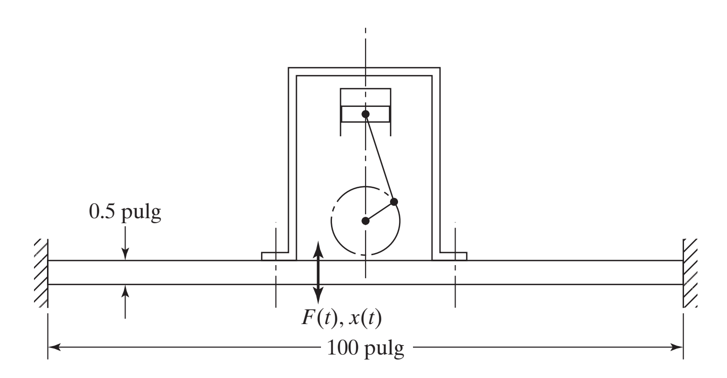


Figura 3.9 Placa que soporta una bomba desbalanceada.

La ecuación (3.6) da la amplitud de respuesta armónica con $F_0 = 50$ lb, $m = 150/386.4$ lb-s^2/pulg (sin tener en cuenta el peso de la placa de acero), $k = 1200.0$ lb/pulg y $\omega = 62.832$ rad/s. Por lo tanto, la ecuación (3.6) da por resultado

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{50}{1200.0 - (150/386.4)(62.832)^2} = -0.1504 \text{ pulg} \tag{E.2}$$

El signo negativo indica que la respuesta $x(t)$ de la placa está desfasada con respecto a la excitación $F(t)$.

■

Ejemplo 3.2 Determinación de la masa a partir de una respuesta armónica conocida

Un sistema de resorte-masa con un resorte de rigidez de 5 000 N/m, se somete a una fuerza armónica de 30 N de magnitud y frecuencia de 20 Hz. Se ve que la masa vibra con una amplitud de 0.2 m. Suponiendo que la vibración se inicia desde el reposo ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$), determine la masa del sistema.

Solución: La respuesta de vibración del sistema se puede hallar a partir de la ecuación (3.9) con $x_0 = \dot{x}_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_n t) \tag{E.1}$$

la cual se puede volver a escribir como

$$x(t) = \frac{2F_0}{k - m\omega^2} \operatorname{sen} \frac{\omega_n + \omega}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_n - \omega}{2} t \tag{E.2}$$

Como se sabe que la amplitud de vibración es de 0.2 m, la ecuación (E.2) resulta

$$\frac{2F_0}{k - m\omega^2} = 0.2 \tag{E.3}$$

Con los valores conocidos de $F_0 = 30$ N, $\omega = 20$ Hz $= 125.665$ rad/s y $k = 5000$ N/m, la ecuación (E.3) resulta

$$\frac{2(30)}{5000 - m(125.664)^2} = 0.2 \tag{E.4}$$

Se resuelve la ecuación (E.4) para encontrar $m = 0.2976$ kg.

■

3.4 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a una fuerza armónica

Si la función forzada es $F(t) = F_0 \cos \omega t$, la ecuación de movimiento se vuelve

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.24}$$

También se espera que la solución particular de la ecuación (3.24) sea armónica; la suponemos en la forma[1]

$$x_p(t) = X \cos (\omega t - \phi) \tag{3.25}$$

[1] Como alternativa, podemos suponer que $x_p(t)$ tiene la forma $x_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$, la cual también implica dos constantes C_1 y C_2. Pero el resultado final será el mismo en ambos casos.

donde X y ϕ son constantes que se tienen que determinar. X y ϕ indican la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta, respectivamente. Sustituyendo la ecuación (3.25) en la ecuación (3.24), llegamos a

$$X[(k - m\omega^2)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \operatorname{sen}(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t \tag{3.26}$$

Utilizando las relaciones trigonométricas

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen}(\omega t - \phi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \operatorname{sen} \phi$$

en la ecuación (3.26) e igualando los coeficientes de cos ωt y sen ωt en ambos lados de la ecuación resultante, obtenemos

$$X[(k - m\omega^2)\cos \phi + c\omega \operatorname{sen} \phi] = F_0$$

$$X[(k - m\omega^2)\operatorname{sen} \phi - c\omega \cos \phi] = 0 \tag{3.27}$$

La solución de la ecuación (3.27) da

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \tag{3.28}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \tag{3.29}$$

Si insertamos las expresiones de X y ϕ desde las ecuaciones (3.28) y (3.29) en la ecuación (3.25), obtenemos la solución particular de la ecuación (3.24). La figura 3.10(a) muestra gráficas típicas de la función forzada y respuesta (de estado estable). Los diversos términos de la ecuación (3.26) se muestran vectorialmente en la figura 3.10(b). Dividiendo tanto el numerador como el denominador de la ecuación (3.28) entre k y haciendo las siguientes sustituciones

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frecuencia natural no amortiguada}$$

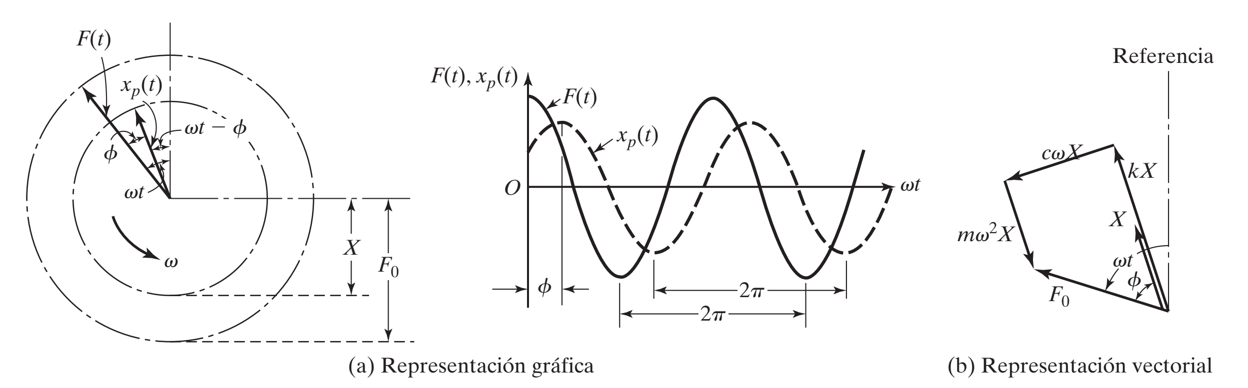
$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

$$\delta_{\text{est}} = \frac{F_0}{k} = \text{deflexión bajo la fuerza estática } F_0\text{, y}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{relación de frecuencia}$$

obtenemos

$$\frac{X}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1}{\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{3.30}$$



(a) Representación gráfica (b) Representación vectorial

Figura 3.10 Representación de una función forzada y respuesta.

y

$$\phi = \tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \tag{3.31}$$

Como se manifestó en la sección 3.3, la cantidad $M = X/\delta_{est}$ se conoce como *factor de amplificación o relación de amplitud*. Las variaciones de X/δ_{est} y ϕ con la relación de frecuencia r y la relación de amortiguamiento ζ se muestran en la figura 3.11.

Las siguientes características del factor de amplificación (M) se derivan de la ecuación (3.30) y la figura 3.11(a):

1. Para un sistema no amortiguado ($\zeta = 0$), la ecuación (3.30) se reduce a la ecuación (3.10), y $M \to \infty$ a medida que $r \to 1$.

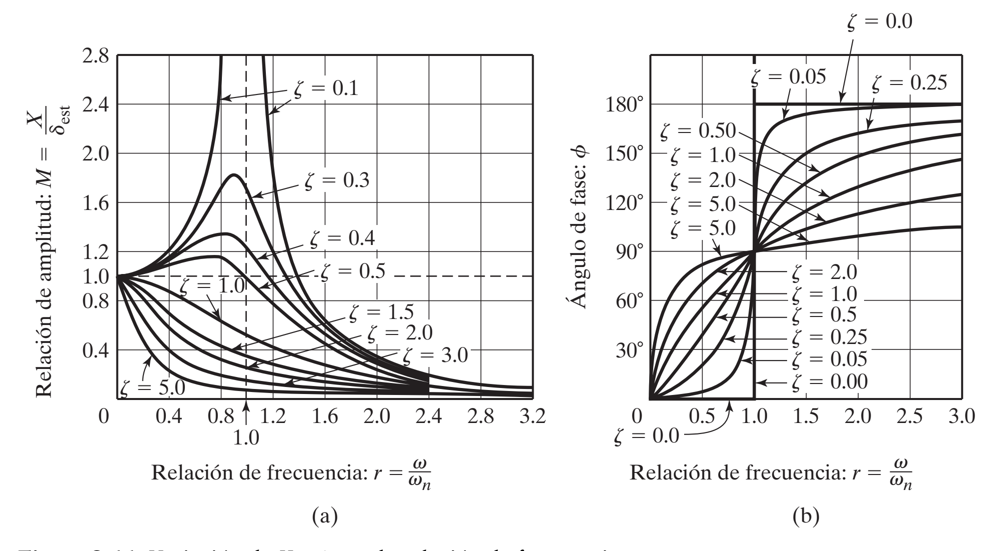


Figura 3.11 Variación de X y ϕ con la relación de frecuencia r.

2. Cualquier cantidad de amortiguamiento ($\zeta > 0$), reduce el factor de amplificación (M) con todos los valores de la frecuencia forzada.
3. Para cualquier valor especificado de r, un valor mayor de amortiguamiento reduce el valor de M.
4. En el caso degenerado de una fuerza constante (cuando $r = 0$), el valor de $M = 1$.
5. La reducción en M al haber amortiguamiento es muy significativa en o cerca de la resonancia.
6. La amplitud de vibración forzada se reduce con valores crecientes de la frecuencia forzada (es decir, $M \to 0$ a medida que $r \to \infty$).
7. Para $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, el valor máximo de M ocurre cuando (vea el problema 3.32)

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \qquad \text{o} \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{3.32}$$

el cual es menor que la frecuencia natural no amortiguada ω_n y la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

8. El valor máximo de X (cuando $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$) está dado por

$$\left(\frac{X}{\delta_{\text{est}}}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{3.33}$$

y el valor de X en $\omega = \omega_n$ es

$$\left(\frac{X}{\delta_{\text{est}}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} \tag{3.34}$$

Se puede utilizar la ecuación (3.33) para la determinación experimental de la medida de amortiguamiento presente en el sistema. En una prueba de vibración, si se mide la amplitud máxima de la respuesta $(X)_{\text{máx}}$, la relación de amortiguamiento del sistema se puede encontrar utilizando la ecuación (3.33). Por el contrario, si se conoce la cantidad de amortiguamiento, podemos estimar la amplitud de vibración máxima.

9. Para $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dM}{dr} = 0$ cuando $r = 0$. Con $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la gráfica de M decrece monotónicamente con valores crecientes de r.

Las siguientes características del ángulo de fase se observan por la ecuación (3.31) y la figura 3.11(b):

1. Para un sistema no amortiguado ($\zeta = 0$), la ecuación (3.31) muestra que el ángulo de fase es 0 con $0 < r < 1$ y 180° con $r > 1$. Esto implica que la excitación y respuesta están en fase con $0 < r < 1$ y desfasadas con $r > 1$ cuando $\zeta = 0$.
2. Para $\zeta > 0$ y $0 < r < 1$, el ángulo de fase es $0 < \phi < 90°$, lo que implica que la respuesta se retrasa con respecto a la excitación.
3. Para $\zeta > 0$ y $r > 1$, el ángulo de fase es de $90° < \phi < 180°$, lo que implica que la respuesta se adelanta a la excitación.
4. Para $\zeta > 0$ y $r = 1$, el ángulo de fase es $\phi = 90°$, lo que implica que la diferencia de fase entre la excitación y la respuesta es de 90°.
5. Para $\zeta > 0$, y grandes valores de r, el ángulo de fase se aproxima a 180°, lo que implica que la respuesta y la excitación están desfasadas.

3.4.1 Respuesta total

La solución completa la dan $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ donde $x_h(t)$ está dada por la ecuación (2.70). Por lo tanto, para un sistema subamortiguado, tenemos

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega t - \phi) \tag{3.35}$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) dan X y ϕ, respectivamente, y X_0 y ϕ_0 [diferentes de los valores obtenidos con la ecuación (2.70)] se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales. Para las condiciones iniciales, $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$, la ecuación (3.35) da por resultado

$$x_0 = X_0\cos\phi_0 + X\cos\phi$$

$$\dot{x}_0 = -\zeta\omega_n X_0\cos\phi_0 + \omega_d X_0 \operatorname{sen}\phi_0 + \omega X\operatorname{sen}\phi \tag{3.36}$$

La solución de la ecuación (3.36) da X_0 y ϕ_0 como

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \left[(x_0 - X\cos\phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2}(\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\operatorname{sen}\phi)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ \tan\phi_0 &= \frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\operatorname{sen}\phi}{\omega_d(x_0 - X\cos\phi)} \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Ejemplo 3.3 Respuesta total de un sistema

Encuentre la respuesta total de un sistema de un solo grado de libertad con $m = 10$ kg, $c = 20$ N-s/m, $k = 4000$ N/m, $x_0 = 0.01$ m, y $\dot{x}_0 = 0$ en las siguientes condiciones:

a. Una fuerza externa $F(t) = F_0\cos\omega t$ actúa en el sistema con $F_0 = 100$ N y $\omega = 10$ rad/s.
b. Vibración libre con $F(t) = 0$.

Solución:

a. Con los datos dados, obtenemos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\delta_{\text{est}} = \frac{F_0}{k} = \frac{100}{4000} = 0.025 \text{ m}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20}{2\sqrt{(4000)(10)}} = 0.05$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-(0.05)^2}(20) = 19.974984 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5$$

$$X = \frac{\delta_{\text{est}}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{0.025}{\left[(1-0.05^2)^2 + (2\cdot 0.5\cdot 0.5)^2\right]^{1/2}} = 0.03326 \text{ m} \tag{E.1}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot 0.05\cdot 0.5}{1-0.5^2}\right) = 3.814075° \tag{E.2}$$

Utilizando las condiciones iniciales, $x_0 = 0.01$ y $\dot{x}_0 = 0$, la ecuación (3.36) da por resultado

$$0.01 = X_0 \cos \phi_0 + (0.03326)(0.997785)$$

o

$$X_0 \cos \phi_0 = -0.023186 \tag{E.3}$$

$$0 = -(0.05)(20)\, X_0 \cos \phi_0 + X_0(19.974984) \operatorname{sen} \phi_0 + (0.03326)(10) \operatorname{sen} (3.814075°) \tag{E.4}$$

Sustituyendo el valor de $X_0 \cos \phi_0$ de la ecuación (E.3) en (E.4), obtenemos

$$X_0 \operatorname{sen} \phi_0 = -0.002268 \tag{E.5}$$

La solución de las ecuaciones (E.3) y (E.5) da por resultado

$$X_0 = [(X_0 \cos \phi_0)^2 + (X_0 \operatorname{sen} \phi_0)^2]^{1/2} = 0.023297 \tag{E.6}$$

y

$$\tan \phi_0 = \frac{X_0 \operatorname{sen} \phi_0}{X_0 \cos \phi_0} = 0.0978176$$

o

$$\phi_0 = 5.586776° \tag{E.7}$$

b. Para vibración libre, la respuesta total la da

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos (\omega_d t - \phi_0) \tag{E.8}$$

Utilizando las condiciones iniciales $x(0) = x_0 = 0.01$ y $\dot{x}(0) = \dot{x} = 0$, X_0 y ϕ_0 de la ecuación (E.8) se determinan como (vea las ecuaciones 2.73 y 2.75):

$$X_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[0.01^2 + \left(\frac{0.05 \cdot 20 \cdot 0.01}{19.974984} \right)^2 \right]^{1/2} = 0.010012 \tag{E.9}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d\, x_0} \right) = \tan^{-1}\left(-\frac{0.05 \cdot 20}{19.974984} \right) = -2.865984° \tag{E.10}$$

Observe que las constantes X_0 y ϕ_0 en los casos (a) y (b) son muy diferentes.

■

3.4.2 Factor de calidad y ancho de banda

Con valores pequeños de amortiguamiento ($\zeta < 0.05$), podemos considerar

$$\left(\frac{X}{\delta_{\text{est}}} \right)_{\text{máx}} \simeq \left(\frac{X}{\delta_{\text{est}}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q \qquad (3.38) \tag{3.38}$$

El valor de la relación de amplitud en resonancia también se conoce como *factor Q* o *factor de calidad* del sistema, en analogía con algunas aplicaciones de ingeniería eléctrica, como el circuito de sintonización de un radio, donde el interés radica en una amplitud en resonancia que sea lo más grande posible [3.2]. Los puntos R_1 y R_2, donde el factor de amplificación se reduce a $Q/\sqrt{2}$, se llaman *puntos de mediana potencia* porque la potencia absorbida (ΔW) por el amortiguador (o por el resistor en un circuito eléctrico), que responde armónicamente a una frecuencia dada, es proporcional al cuadrado de la amplitud (vea la ecuación (2.94)):

$$\Delta W = \pi c \omega X^2 \tag{3.39}$$

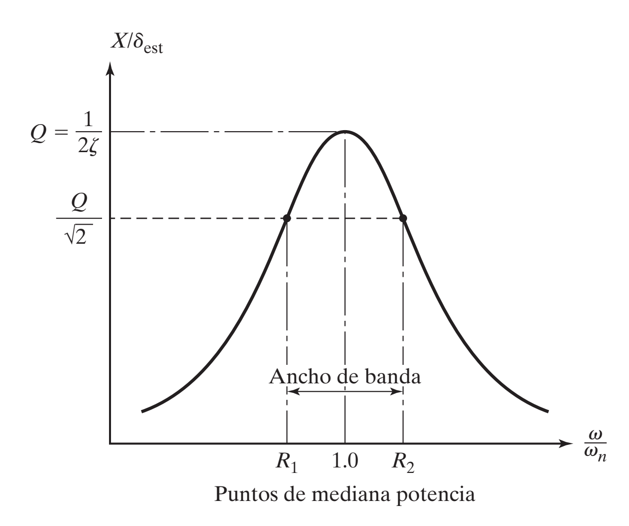


Figura 3.12 Curva de respuesta armónica que muestra los puntos de mediana potencia y el ancho de banda.

La diferencia entre las frecuencias asociadas con los puntos de mediana potencia R_1 y R_2 se llama ancho de banda del sistema (vea la figura 3.12). Para encontrar los valores de R_1 y R_2, establecemos $X/\delta_{est} = Q/\sqrt{2}$ en la ecuación (3.30) de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta}$$

o

$$r^4 - r^2(2 - 4\zeta^2) + (1 - 8\zeta^2) = 0 \tag{3.40}$$

La solución de la ecuación (3.40) da

$$r_1^2 = 1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}, \qquad r_2^2 = 1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \tag{3.41}$$

Para valores pequeños de ζ, la ecuación (3.41) se puede aproximar como

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1 - 2\zeta, \qquad r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1 + 2\zeta \tag{3.42}$$

donde $\omega_1 = \omega|_{R_1}$ y $\omega_2 = \omega|_{R_2}$. De acuerdo con la ecuación (3.42),

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 \simeq 4\zeta\omega_n^2 \tag{3.43}$$

Utilizando la relación,

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n \tag{3.44}$$

en la ecuación (3.43), vemos que el ancho de banda $\Delta\omega$ es

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \simeq 2\zeta\omega_n \tag{3.45}$$

Combinando las ecuaciones (3.38) y (3.45), obtenemos

$$Q \simeq \frac{1}{2\zeta} \simeq \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} \tag{3.46}$$

Vemos que podemos utilizar el factor de calidad para estimar el amortiguamiento viscoso equivalente en un sistema mecánico.[2]

3.5 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Representemos la función forzada armónica en forma compleja como $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ de modo que la ecuación de movimiento se escriba como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \tag{3.47}$$

Como la parte real de $F(t)$ da la excitación real, la parte real de $x(t)$ también dará sólo la respuesta, donde $x(t)$ es una cantidad compleja que satisface la ecuación diferencial (3.47). F_0 en la ecuación (3.47) es, en general, un número complejo. Suponiendo la solución particular $x_p(t)$

$$x_p(t) = Xe^{i\omega t} \tag{3.48}$$

obtenemos, al sustituir la ecuación (3.48) en la ecuación (3.47),[3]

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \tag{3.49}$$

Multiplicando el numerador y el denominador del lado derecho de la ecuación (3.49) por $[(k - m\omega^2) - ic\omega]$ y separando las partes real e imaginaria, obtenemos

$$X = F_0\left[\frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i\frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right] \tag{3.50}$$

Utilizando la relación $x + iy = Ae^{i\phi}$, donde $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\tan\phi = y/x$, y la ecuación (3.50) se expresa como

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} e^{-i\phi} \tag{3.51}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \tag{3.52}$$

Por lo tanto, la solución de estado estable, ecuación (3.48), se escribe como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e^{i(\omega t - \phi)} \tag{3.53}$$

Respuesta de frecuencia. La ecuación (3.49) se reescribe como

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega) \tag{3.54}$$

---

[2] La determinación de los parámetros del sistema (m, c y k) basada en puntos de mediana potencia y otras características de respuesta del sistema se considera en la sección 10.8 en el sitio web.

[3] La ecuación (3.49) se puede escribir como $Z(i\omega)X = F_0$, donde $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k$ es la denominada impedancia mecánica del sistema [3.8].

donde $H(i\omega)$ se conoce como la respuesta de frecuencia compleja del sistema. El valor absoluto de $H(i\omega)$ está dada por

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{kX}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{3.55}$$

indica el factor de amplificación definido en la ecuación (3.30). Recordando que $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, podemos demostrar que las ecuaciones (3.54) y (3.55) están relacionadas:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi} \tag{3.56}$$

donde ϕ lo da la ecuación (3.52), la cual también se puede expresar como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{3.57}$$

Por lo tanto, la ecuación (3.53) se expresa como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} \tag{3.58}$$

Se ve que la función de respuesta de frecuencia compleja, $H(i\omega)$, contiene tanto la magnitud como la fase de la respuesta de estado estable. El uso de esta función en la determinación experimental de los parámetros del sistema (m, c y k) se aborda en la sección 10.8. Si $F(t) = F_0 \cos \omega t$, la parte real de la ecuación (3.53) proporciona la solución de estado estable correspondiente:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{F_0}{k} H(i\omega)e^{i\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{F_0}{k}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right] \end{aligned} \tag{3.59}$$

la cual es igual a la ecuación (3.25). Asimismo, si $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, la parte imaginaria de la ecuación (3.53) da la solución de estado estable correspondiente:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Im}\left[\frac{F_0}{k}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right] \end{aligned} \tag{3.60}$$

Representación del movimiento armónico como un vector complejo. La excitación armónica y la respuesta del sistema amortiguado a dicha excitación se pueden representar gráficamente en el plano complejo, y al diagrama resultante se le puede dar una interesante interpretación. Primero diferenciamos la ecuación (3.58) con respecto al tiempo para obtener

$$\begin{aligned} \text{Velocidad} &= \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{k}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t) \\ \text{Aceleración} &= \ddot{x}_p(t) = (i\omega)^2\frac{F_0}{k}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Porque i se expresa como

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \tag{3.62}$$

podemos concluir que la velocidad se adelanta al desplazamiento por el ángulo de fase $\pi/2$ y que está multiplicada por ω. Asimismo, -1 se puede escribir como

$$-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = e^{i\pi} \tag{3.63}$$

Por consiguiente, la aceleración se adelanta al desplazamiento en el ángulo de fase π, y está multiplicada por ω^2.

De ese modo, los diversos términos de la ecuación de movimiento (3.47) se pueden representar en el plano complejo, como se muestra en la figura 3.13. La interpretación de esta figura es que la suma de los vectores complejos $m\ddot{x}(t)$, $c\dot{x}(t)$, y $kx(t)$ balancea $F(t)$, que es precisamente lo que se requiere para satisfacer la ecuación (3.47). También es de notarse que el diagrama completo gira con una velocidad angular ω en el plano complejo. Si sólo se tiene que considerar la parte real de la respuesta, entonces el diagrama completo debe proyectarse sobre el eje real. Asimismo, si sólo se tiene que considerar la parte imaginaria de la respuesta, entonces el diagrama debe proyectarse sobre el eje imaginario. En la figura 3.13, observe que la fuerza $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ aparece representada como un vector localizado a un ángulo ωt con respecto al eje real. Esto implica que F_0 es real. Si F_0 también es compleja, entonces el vector fuerza $F(t)$ estará localizado a un ángulo de $(\omega + \psi)$ donde ψ es algún ángulo de fase introducido por F_0. En ese caso, todos los demás vectores, es decir, $m\ddot{x}$, $c\dot{x}$, y kx, se desplazarán el mismo ángulo ψ. Esto equivale a multiplicar ambos lados de la ecuación (3.47) por $e^{i\psi}$.

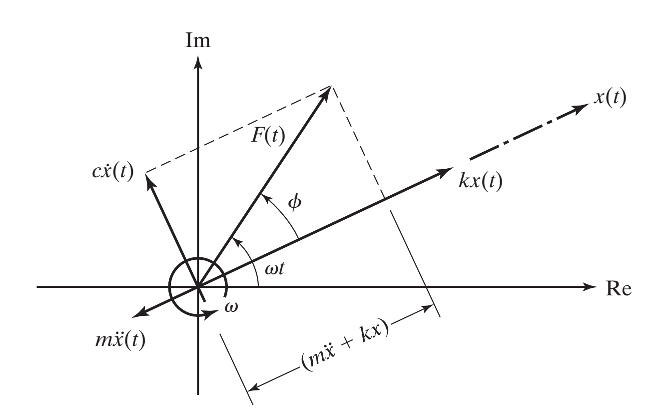


Figura 3.13 Representación de la ecuación (3.47) en un plano complejo.

3.6 Respuesta de un sistema amortiguado sometido al movimiento armónico de la base

En ocasiones la base o soporte de un sistema de resorte-masa-amortiguador experimenta movimiento armónico, como se muestra en la figura 3.14(a). Sea $y(t)$ el desplazamiento de la base y $x(t)$ el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de equilibrio estático en el tiempo t. Entonces el alargamiento neto del resorte es $x - y$, y la velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador es $\dot{x} - \dot{y}$. Del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 3.14(b), obtenemos la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{3.64}$$

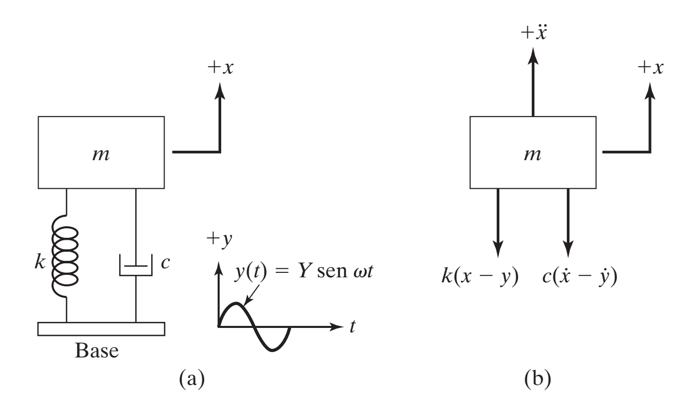


Figura 3.14 Excitación de la base.

Si $y(t) = Y$ sen ωt, la ecuación (3.64) se escribe como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY \text{ sen } \omega t + c\omega Y \cos \omega t$$
$$= A \text{ sen } (\omega t + \alpha) \tag{3.65}$$

donde $A = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$ y $\alpha = \tan^{-1}\left[-\frac{c\omega}{k}\right]$. Esto demuestra que excitar la base equivale a aplicar una fuerza armónica de magnitud A a la masa. Utilizando la solución indicada por la ecuación (3.60), la respuesta de estado estable de la masa, $x_p(t)$, se puede expresar como

$$x_p(t) = \frac{Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{1/2}} \text{ sen } (\omega t - \phi_1 - \alpha) \tag{3.66}$$

donde

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

Utilizando identidades trigonométricas, la ecuación (3.66) se reescribe en una forma más conveniente como

$$x_p(t) = X \text{ sen } (\omega t + \phi) \tag{3.67}$$

donde X y ϕ se expresan como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2} \tag{3.68}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (\omega c)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right] \tag{3.69}$$

La relación de la amplitud de la respuesta $x_p(t)$ a la del movimiento de la base $y(t)$, $\frac{X}{Y}$, se llama *transmisibilidad del desplazamiento*.[4] Las variaciones de $\frac{X}{Y} \equiv T_d$ y ϕ dadas por las ecuaciones (3.68) y (3.69) se muestran en las figuras 3.15(a) y (b), respectivamente, para diferentes valores de r y ζ.

[4] La expresión para la transmisibilidad del desplazamiento también se puede obtener siguiendo el método de función de transferencia que se describe en la sección 3.14.

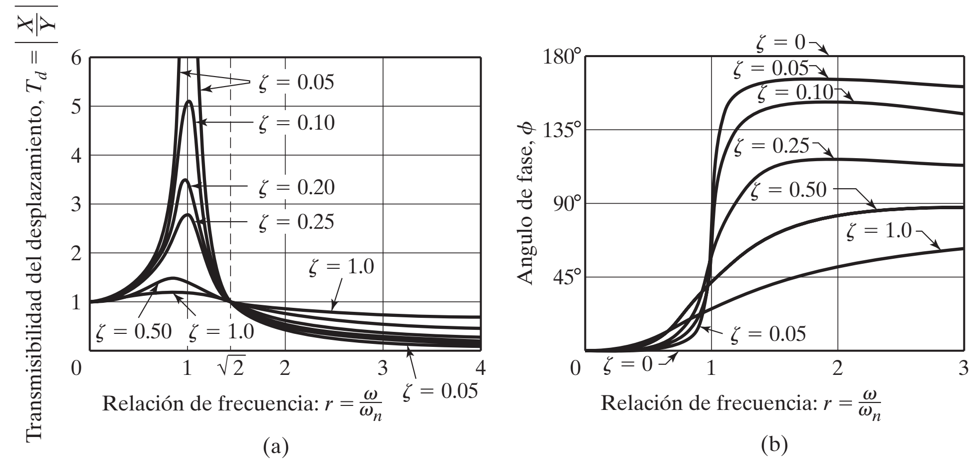


Figura 3.15 Variaciones de T_d y ϕ con r.

Observe que si la excitación armónica de la base se expresa en forma compleja como $y(t) = \text{Re}(Ye^{i\omega t})$, la respuesta del sistema se expresa, basada en el análisis de la sección 3.5, como

$$x_p(t) = \text{Re}\left\{\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r}\right)Ye^{i\omega t}\right\} \tag{3.70}$$

y la transmisibilidad de desplazamiento como

$$\frac{X}{Y} = T_d = \left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}|H(i\omega)| \tag{3.71}$$

donde la ecuación (3.55) da por resultado $|H(i\omega)|$.

Los siguientes aspectos de la *transmisibilidad del desplazamiento*, $T_d = \frac{X}{Y}$, se observan en la figura 3.15(a):

1. El valor de T_d es unitario en $r = 0$ y se aproxima a la unidad con valores pequeños de r.
2. Para un sistema no amortiguado ($\zeta = 0$), $T_d \to \infty$ en resonancia ($r = 1$).
3. El valor de T_d es menor que la unidad ($T_d < 1$) para valores de $r > \sqrt{2}$ (para cualquier cantidad de amortiguamiento ζ).
4. El valor de T_d es unitario para todos los valores de ζ y con $r = \sqrt{2}$.
5. Para $r < \sqrt{2}$, las relaciones de amortiguamiento pequeñas conducen a valores grandes de T_d. Por otra parte, para $r > \sqrt{2}$, los valores pequeños de la relación de amortiguamiento conducen a valores pequeños de T_d.
6. La transmisibilidad del desplazamiento, T_d, alcanza un valor máximo con $0 < \zeta < 1$ a la relación de frecuencia $r = r_m < 1$ dada por (vea el problema 3.60):

$$r_m = \frac{1}{2\zeta}\left[\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1\right]^{1/2}$$

3.6.1 Fuerza transmitida

En la figura 3.14, una fuerza, F, se transmite a la base o soporte debido a las reacciones del resorte y el amortiguador hidráulico. Esta fuerza se determina como

$$F = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \tag{3.72}$$

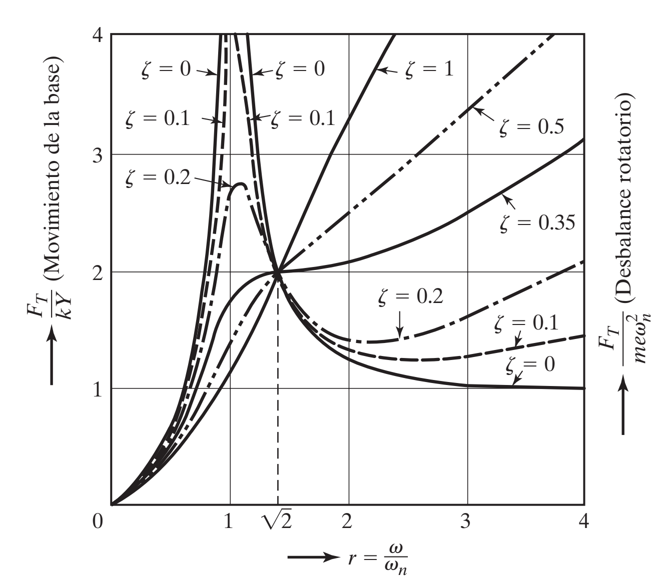


Figura 3.16 Transmisibilidad de fuerza.

Según la ecuación (3.67), la ecuación (3.72) se puede escribir como

$$F = m\omega^2 X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = F_T \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.73}$$

donde F_T es la amplitud o valor máximo de la fuerza transmitida a la base dada por

$$\frac{F_T}{kY} = r^2\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2} \tag{3.74}$$

La relación (F_T/kY) se conoce como *transmisibilidad de fuerza*.[5] Observe que la fuerza transmitida está en fase con el movimiento de la masa $x(t)$. La variación de la fuerza transmitida a la base con la relación de frecuencia r se muestra en la figura 3.16 para valores diferentes de ζ.

3.6.2 Movimiento relativo

Si $z = x - y$ indica el movimiento de la masa con respecto a la base, la ecuación (3.64) de movimiento se puede volver a escribir como

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \operatorname{sen}\omega t \tag{3.75}$$

La solución de estado estable de la ecuación (3.75) es

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = Z \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1) \tag{3.76}$$

donde Z, la amplitud de $z(t)$, se expresa como

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Y\frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{3.77}$$

[5] El uso del concepto de transmisibilidad en el diseño de sistemas aislantes de la vibración se aborda en el capítulo 8. La expresión para la transmisibilidad también se puede obtener por medio del método de función de transferencia que se describe en la sección 3.14.

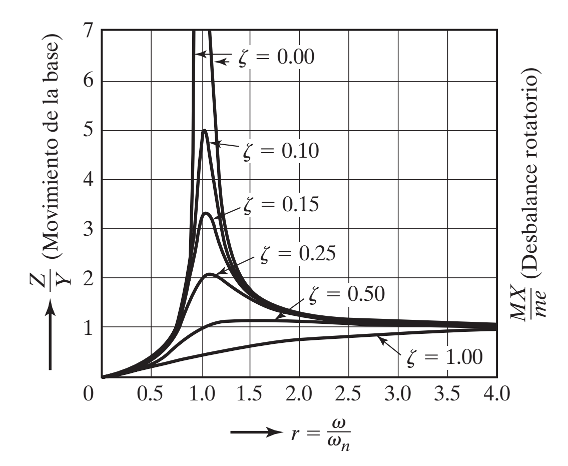


Figura 3.17 Variación de (Z/Y) o (MX/me) con relación de frecuencia $r = (\omega/\omega_n)$.

y ϕ_1 por

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$$

La relación Z/X se muestra gráficamente en la figura 3.17. La variación de ϕ_1 es la misma que se muestra para ϕ en la figura 3.11(b).

Ejemplo 3.4 Vehículo que viaja sobre una carretera desigual

La figura 3.18 muestra un modelo simple de un automotor que vibra en la dirección vertical al viajar por una carretera desigual. El vehículo tiene una masa de 1200 kg. El sistema de suspensión tiene una constante de resorte de 400 kN/m y una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.5$. Si la velocidad del vehículo es de 20 km/h, determine la amplitud de desplazamiento del vehículo. La superficie de la carretera varía senoidalmente con una amplitud de $Y = 0.05$ m y longitud de onda de 6 m.

Solución: La frecuencia ω de la excitación de la base se determina dividiendo la velocidad del vehículo, v km/h, entre la longitud de un ciclo de aspereza de ondulación de la carretera:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{v \times 1000}{3600}\right)\frac{1}{6} = 0.290889v \text{ rad/s}$$

Para $v = 20$ km/h, $\omega = 5.81778$ rad/s. La frecuencia natural del vehículo es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{400 \times 10^3}{1200}\right)^{1/2} = 18.2574 \text{ rad/s}$$

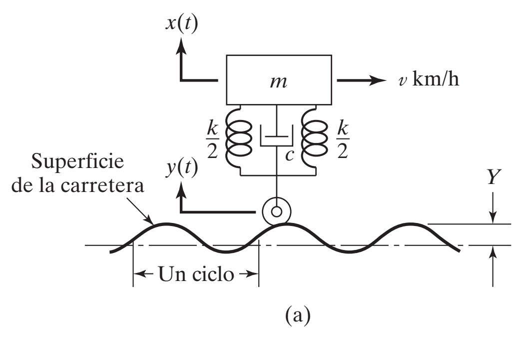
y por consiguiente la relación de frecuencia r es

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5.81778}{18.2574} = 0.318653$$

La relación de amplitud se puede derivar de la ecuación (3.68):

$$\frac{X}{Y} = \left\{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right\}^{1/2} = \left\{\frac{1 + (2 \times 0.5 \times 0.318653)^2}{(1 - 0.318653)^2 + (2 \times 0.5 \times 0.318653)^2}\right\}^{1/2}$$

$$= 1.100964$$



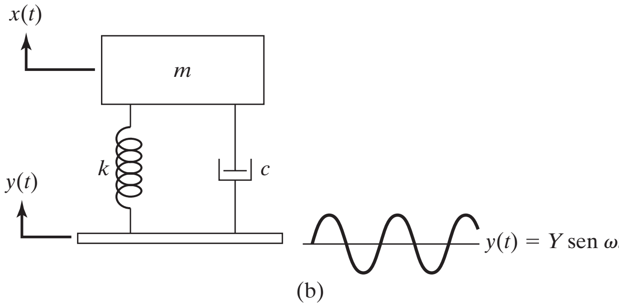


Figura 3.18 Vehículo que viaja por una carretera desigual.

Por lo tanto, la amplitud de desplazamiento del vehículo es

$$X = 1.100964Y = 1.100964(0.05) = 0.055048 \text{ m}$$

Esto indica que un desnivel de 5 cm en la carretera se transmite como un desnivel de 5.5 cm al chasis y a los pasajeros en el automóvil. Por lo tanto, en este caso los pasajeros sienten un movimiento amplificado (vea el problema 3.107 para otras situaciones).

■

Ejemplo 3.5 Máquina sobre una base elástica

Una máquina que pesa 3000 N está montada en una base elástica. La deflexión estática de la base debida al peso de la máquina es de 7.5 cm. Se observa que la máquina vibra con una amplitud de 1 cm cuando la base se somete a oscilaciones armónicas a la frecuencia natural no amortiguada del sistema con una amplitud de 0.25 cm. Encuentre

a. la constante de amortiguamiento de la base.
b. la amplitud de fuerza dinámica sobre la base, y
c. la amplitud del desplazamiento de la máquina con respecto a la base.

Solución:

a. La rigidez de la base se determina a partir de la deflexión estática: k = peso de la máquina$/\delta_{\text{est}}$ = $3000/0.075 = 40{,}000$ N/m

En resonancia ($\omega = \omega_n$ o $r = 1$), la ecuación (3.68) da por resultado

$$\frac{X}{Y} = \frac{0.010}{0.0025} = 4 = \left[\frac{1 + (2\zeta)^2}{(2\zeta)^2}\right]^{1/2} \tag{E.1}$$

La solución de la ecuación (E.1) resulta ser $\zeta = 0.1291$. La constante de amortiguamiento es

$$c = \zeta \cdot c_c = \zeta 2\sqrt{km} = 0.1291 \times 2 \times \sqrt{40{,}000 \times (3000/9.81)}$$
$$= 903.0512 \text{ N-s/m} \tag{E.2}$$

b. La amplitud de fuerza dinámica sobre la base en $r = 1$ se puede derivar de la ecuación (3.74):

$$F_T = Yk\left[\frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta^2}\right]^{1/2} = kX = 40{,}000 \times 0.01 = 400 \text{ N} \tag{E.3}$$

c. La amplitud del desplazamiento relativo de la máquina en $r = 1$ se obtiene de la ecuación (3.77):

$$Z = \frac{Y}{2\zeta} = \frac{0.0025}{2 \times 0.1291} = 0.00968 \text{ m} \tag{E.4}$$

Se observa que $X = 0.01$ m, $Y = 0.0025$ m, y $Z = 0.00968$ m; por consiguiente, $Z \quad X - Y$. Esto se debe a las diferencias de fase entre x, y y z.

■

3.7 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a desbalance rotatorio

El desbalance en una maquinaria rotatoria es una de las causas principales de vibración. En la figura 3.19 se muestra un modelo simplificado de una máquina como esa. La masa total de la máquina es M, y tiene dos masas excéntricas $m/2$ que giran en direcciones opuestas con una velocidad angular ω constante. La fuerza centrífuga $(me\omega^2)/2$ producida por cada masa excitará la masa M. Consideramos dos masas iguales $m/2$ que giran en direcciones opuestas de modo que los componentes horizontales de la fuerza de excitación de las dos masas se eliminan entre sí. Sin embargo, los componentes verticales de excitación se suman a lo largo del eje de simetría A-A en la figura 3.19. Si la posición angular de las masas se mide con respecto a la posición horizontal, el componente vertical total de la excitación siempre es $F(t) = me\omega^2$ sen ωt. La ecuación de movimiento se deriva por medio del procedimiento usual:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \text{ sen } \omega t \tag{3.78}$$

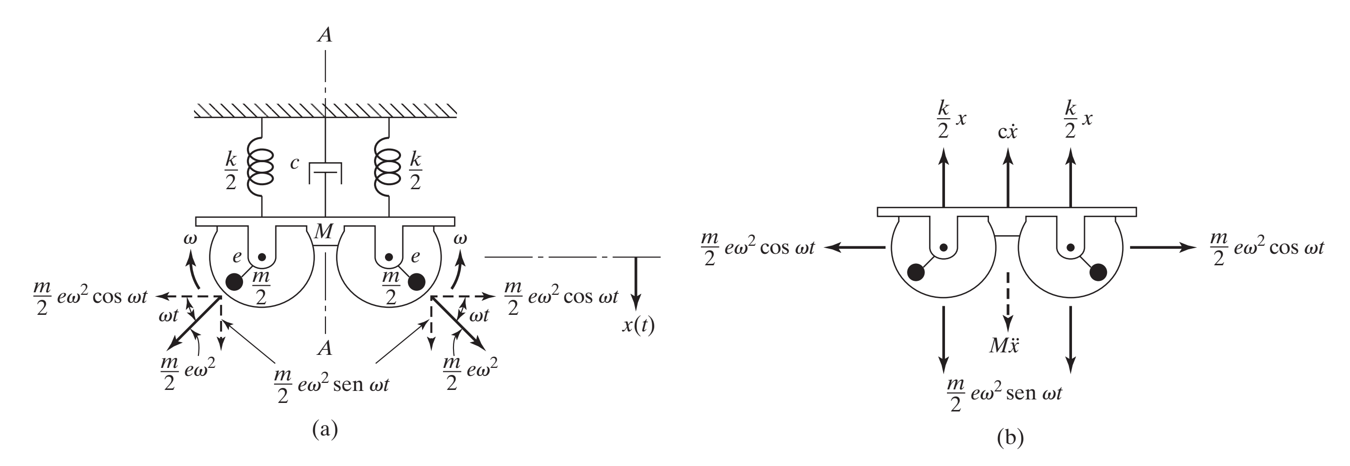


Figura 3.19 Masas desbalanceadas rotatorias.

La solución de esta ecuación será idéntica a la ecuación (3.60) si reemplazamos m y F_0 por M y $me\omega^2$, respectivamente. Esta solución también se puede expresar como

$$x_p(t) = X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = \operatorname{Im}\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right] \tag{3.79}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/M}$ y X y ϕ indican la amplitud y el ángulo de fase de vibración dados por

$$X = \frac{me\omega^2}{\left[(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{1/2}} = \frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - M\omega^2}\right) \tag{3.80}$$

Al definir $\zeta = c/c_c$ y $c_c = 2M\omega_n$, las ecuaciones (3.80) se reescriben como

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}} = r^2 |H(i\omega)|$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \tag{3.81}$$

La variación de MX/me con r para diferentes valores de ζ se muestra en la figura 3.17. Por otro lado, la gráfica de ϕ contra r permanece como la figura 3.11(b). Las siguientes observaciones se pueden hacer a partir de la ecuación (3.81) y la figura 3.17:

1. Todas las curvas se inician con una amplitud cero. La amplitud cerca de la resonancia ($\omega = \omega_n$) se ve marcadamente afectada por el amortiguamiento. Por lo tanto, si la máquina tiene que funcionar cerca de la resonancia, deberá introducirse amortiguamiento a propósito para evitar amplitudes peligrosas.
2. A velocidades muy altas (ω grande), MX/me es casi unitaria, y el efecto del amortiguamiento es insignificante.
3. Para $0 < \zeta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, el valor máximo de $\dfrac{MX}{me}$ ocurre cuando

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{MX}{me}\right) = 0 \tag{3.82}$$

La solución de la ecuación (3.82) da

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1$$

con el valor máximo correspondiente de $\dfrac{MX}{me}$ dado por

$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{3.83}$$

Por lo tanto, los valores máximos ocurren a la derecha del valor de resonancia de $r = 1$.

4. Para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}, \left[\frac{MX}{me}\right]$ no alcanza un máximo. Su valor crece desde 0 en $r = 0$ hasta 1 en $r \to \infty$.
5. La fuerza transmitida a la base producida por la fuerza desbalanceada rotatoria (F) es $F(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$. La magnitud (o valor máximo) de F se deriva (vea el problema 3.73) como:

$$|F| = me\omega^2 \left[\frac{1 + 4\zeta^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.84}$$

Ejemplo 3.6 Deflexión de un motor eléctrico debido a desbalance rotatorio

Un motor eléctrico de masa M, montado sobre un cimiento elástico, vibra con una deflexión de 0.15 m en resonancia (figura 3.20). Se sabe que la masa desbalanceada del motor es un 8% de la masa del rotor debido a las tolerancias de fabricación utilizadas, y la relación de amortiguamiento del cimiento es $\zeta = 0.025$. Determine lo siguiente:

a. La excentricidad de la ubicación radial de la masa desbalanceada (e).
b. La deflexión pico del motor cuando la relación de frecuencia varía desde la resonancia.
c. La masa adicional que se agregará de manera uniforme al motor si la deflexión del motor en resonancia se tiene que reducir a 0.1 m.

Suponga que la masa excéntrica no cambia cuando se agrega la masa adicional al motor.

a. De acuerdo con la ecuación (3.81), la deflexión en resonancia ($r = 1$) es

$$\frac{MX}{me} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2(0.025)} = 20$$

Con la cual la excentricidad se determina como

$$e = \frac{MX}{20m} = \frac{M(0.15)}{20(0.08\,M)} = 0.09375 \text{ m}$$

b. La ecuación (3.83) da la deflexión máxima del motor como:

$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{2(0.025)\sqrt{1 - 0.025^2}} = 20.0063$$

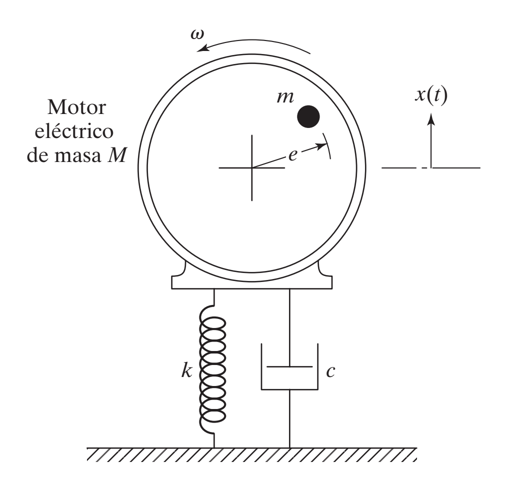


Figura 3.20

a partir de la cual la deflexión máxima se determina como

$$X_{\text{máx}} = \frac{20.0063me}{M} = \frac{20.0063(0.08M)(0.09375)}{M} = 0.150047 \text{ m}$$

c. Si la masa adicional agregada al motor se indica como M_a, la ecuación (3.81) da la deflexión correspondiente:

$$\frac{(M + M_a)(0.1)}{(0.08M)(0.09375)} = 20$$

la cual da $M_a = 0.5M$. Por lo tanto, la masa del motor se tiene que incrementar en 50% para reducir la deflexión en resonancia de 0.15 m a 0.10 m.

■

Ejemplo 3.7 Turbina hidráulica Francis

La figura 3.21 es un diagrama de una turbina hidráulica Francis, en la cual el agua fluye de A a las aspas y hacia el canal de descarga. El rotor tiene una masa de 250 kg y un desbalance (me) de 5 kg-mm. La holgura radial entre el rotor y el estator es de 5 mm. La turbina opera en el rango de velocidad de 600 a 6000 rpm. Se supone que la flecha de acero donde está montado el rotor está sujeta en los cojinetes. Determine el diámetro de la flecha de modo que el rotor siempre libre el estator a todas las velocidades de operación de la turbina. Suponga que el amortiguamiento es insignificante.

Solución: La amplitud máxima de la flecha (rotor) producida por el desbalance rotatorio se obtiene con la ecuación (3.80) con $c = 0$ como

$$X = \frac{me\omega^2}{(k - M\omega^2)} = \frac{me\omega^2}{k(1 - r^2)} \tag{E.1}$$

donde $me = 5$ kg-mm, $M = 250$ kg y el valor límite de $X = 5$ mm. El valor de ω varía de

$$600 \text{ rpm} = 600 \times \frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ rad/s}$$

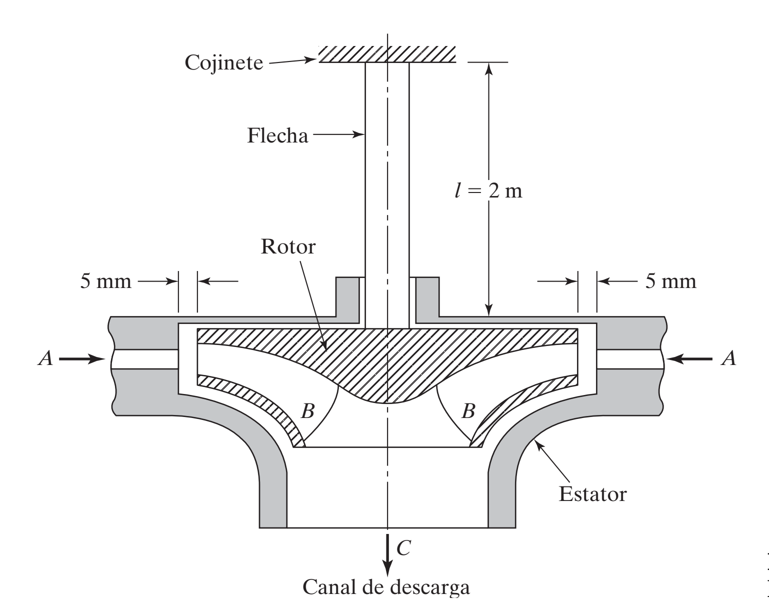


Figura 3.21 Turbina hidráulica Francis.

a

$$6000 \text{ rpm} = 6000 \times \frac{2\pi}{60} = 200\pi \text{ rad/s}$$

mientras que la frecuencia natural del sistema se calcula como

$$X = \frac{me\omega^2}{(k - M\omega^2)} = \frac{me\omega^2}{k(1 - r^2)} \tag{E.2}$$

si k está en N/m. Para $\omega = 20\pi$ rad/s, la ecuación (E.1) da por resultado

$$0.005 = \frac{(5.0 \times 10^{-3}) \times (20\pi)^2}{k\left[1 - \frac{(20\pi)^2}{0.004\,k}\right]} = \frac{2\pi^2}{k - 10^5\pi^2}$$

$$k = 10.04 \times 10^4\pi^2 \text{ N/m} \tag{E.3}$$

Para $\omega = 200\pi$ rad/s, la ecuación (E.1) da

$$0.005 = \frac{(5.0 \times 10^{-3}) \times (200\pi)^2}{k\left[1 - \frac{(200\pi)^2}{0.004k}\right]} = \frac{200\pi^2}{k - 10^7\pi^2}$$

$$k = 10.04 \times 10^6\,\pi^2 \text{ N/m} \tag{E.4}$$

A partir de la figura 3.17 se ve que la amplitud de vibración de la flecha rotatoria se puede minimizar haciendo $r = \omega/\omega_n$ muy grande. Esto significa que ω_n debe hacerse pequeña en comparación con ω, es decir, k debe hacerse pequeña. Esto se puede lograr seleccionando el valor de k como $10.04 \times 10^4\pi^2$ N/m. Como la rigidez de una viga en voladizo (flecha) que soporta una carga (rotor) en el extremo está dada por

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3}\left(\frac{\pi d^4}{64}\right) \tag{E.5}$$

el diámetro de la viga (flecha) se puede hallar como

$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} = \frac{(64)(10.04 \times 10^4\pi^2)(2^3)}{3\pi(2.07 \times 10^{11})} = 2.6005 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

o

$$d = 0.1270 \text{ m} = 127 \text{ mm} \tag{E.6}$$

■

3.8 Vibración forzada con amortiguamiento de Coulomb

Para un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento de Coulomb o de fricción seca, sometido a una fuerza armónica $F(t) = F_0$ sen ωt como en la figura 3.22, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t \tag{3.85}$$

donde el signo de la fuerza de fricción ($\mu N = \mu mg$) es positivo (negativo) cuando la masa se mueve de izquierda a derecha (derecha a izquierda). La solución exacta de la ecuación (3.85) es bastante

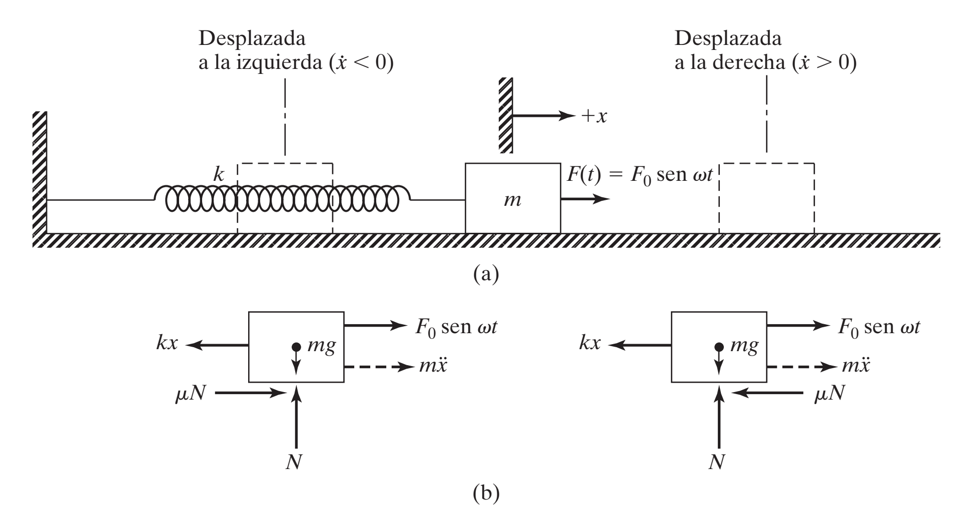


Figura 3.22 Sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento de Coulomb.

complicada. Sin embargo, podemos esperar que si la fuerza de amortiguamiento de fricción seca es grande, el movimiento de la masa será discontinuo. Por otra parte, si la fuerza de fricción seca es pequeña comparada con la amplitud de la fuerza aplicada F_0, se espera que la solución de estado estable sea casi armónica. En este caso, podemos determinar una solución aproximada de la ecuación (3.85) por medio de una relación de amortiguamiento viscoso equivalente. Para determinar tal relación, igualamos la energía disipada por la fricción seca a la energía disipada por un amortiguador viscoso equivalente durante un ciclo de movimiento completo. Si X denota la amplitud de movimiento, la energía disipada por la fuerza de fricción μN en un cuarto de ciclo es μNX. Por consiguiente, en un ciclo completo la energía disipada por el amortiguamiento de fricción seca está dada por

$$\Delta W = 4\mu NX \tag{3.86}$$

Si la constante de amortiguamiento viscoso equivalente se indica como c_{eq}, la energía disipada durante un ciclo completo (vea la ecuación (2.94)) será

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \tag{3.87}$$

Igualando las ecuaciones (3.86) y (3.87), obtenemos

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \tag{3.88}$$

Por lo tanto, la respuesta de estado estable está dada por

$$x_p(t) = X \text{ sen } (\omega t - \phi) \tag{3.89}$$

donde la amplitud X se puede hallar a partir de la ecuación (3.60):

$$X = \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2\right]^{1/2}} = \frac{(F_0/k)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{3.90}$$

con

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} = \frac{4\mu N}{2m\omega_n \pi \omega X} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \omega_n X} \tag{3.91}$$

La sustitución de la ecuación (3.91) en la ecuación (3.90) da

$$X = \frac{(F_0/k)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{3.92}$$

La solución de esta ecuación da la amplitud X como

$$X = \frac{F_0}{k}\left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{3.93}$$

Como ya antes se dijo, se puede utilizar la ecuación (3.93) sólo si la fuerza de fricción es pequeña comparada con F_0. De hecho, el valor límite de la fuerza de fricción μN se determina con la ecuación (3.93). Para evitar valores imaginarios de X, necesitamos tener

$$1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

Si no se satisface esta condición se debe utilizar el análisis exacto, dado en la referencia [3.3]. El ángulo de fase ϕ que aparece en la ecuación (3.89) se calcula utilizando la ecuación (3.52):

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_{\text{eq}}\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta_{\text{eq}}\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right] = \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right\} \tag{3.94}$$

Sustituyendo la ecuación (3.93) en la ecuación (3.94) para X, obtenemos

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}}\right] \tag{3.95}$$

La ecuación (3.94) muestra que $\tan \phi$ es una constante para un valor dado de $F_0/\mu N$. ϕ es discontinuo en $\omega/\omega_n = 1$ (resonancia), puesto que adquiere un valor positivo para $\omega/\omega_n < 1$ y un valor negativo para $\omega/\omega_n > 1$. Por lo tanto, la ecuación 3.95 también se puede expresar como

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\pm\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}}\right] \tag{3.96}$$

La ecuación (3.93) muestra que la fricción sirve para limitar la amplitud de vibración forzada para ω/ω_n 1. Sin embargo, en resonancia ($\omega/\omega_n = 1$), la amplitud se vuelve infinita. Esto se

puede explicar como sigue. La energía dirigida hacia el sistema durante un ciclo cuando es excitado armónicamente en resonancia es

$$\Delta W' = \int_{\text{ciclo}} F \cdot dx = \int_0^{\tau} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_0^{\tau = 2\pi/\omega} F_0 \operatorname{sen} \omega t \cdot [\omega X \cos(\omega t - \phi)]\, dt \tag{3.97}$$

Como la ecuación (3.94) da $\phi = 90°$ en resonancia, la ecuación (3.97) se escribe como

$$\Delta W' = F_0 X \omega \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = \pi F_0 X \tag{3.98}$$

La ecuación (3.86) da la energía disipada por el sistema. Como $\pi F_0 X > 4\mu N X$ para que X tenga un valor real, $\Delta W' > \Delta W$ en resonancia (vea la figura 3.23). Por lo tanto, más energía se dirige al sistema por ciclo que la que se disipa por ciclo. Esta energía extra se utiliza para incrementar la amplitud de vibración. Para la condición no resonante $(\omega/\omega_n \quad 1)$, la energía alimentada se determina con la ecuación (3.97):

$$\Delta W' = \omega F_0 X \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen} \omega t \cos(\omega t - \phi)\, dt = \pi F_0 X \operatorname{sen} \phi \tag{3.99}$$

Por la presencia de sen ϕ en la ecuación (3.99), se hace que la curva de la energía alimentada en la figura 3.23 coincida con la curva de la energía disipada, así que la amplitud se limita. Por lo tanto, se ve que la fase del movimiento ϕ limita la amplitud de movimiento.

La respuesta periódica de un sistema de resorte-masa con amortiguamiento de Coulomb sometido a excitación de la base se da en las referencias [3.10, 3.11].

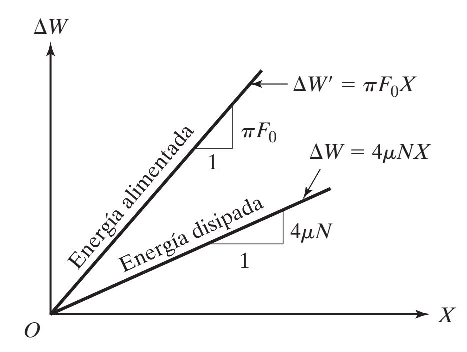


Figura 3.23 Energía alimentada y energía disipada con amortiguamiento de Coulomb.

Ejemplo 3.8 Sistema de resorte-masa con amortiguamiento de Coulomb

Un sistema de resorte de 4000 N/m rigidez y masa de 10 kg vibra sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción es de 0.12. Cuando se somete a una fuerza armónica de 2 Hz de frecuencia, la masa vibra con una amplitud de 40 mm. Determine la amplitud de la fuerza armónica aplicada a la masa.

Solución: La fuerza vertical (peso) de la masa es $N = mg = 10 \times 9.81 = 9.81$ N. La frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \text{ rad/s}$$

y la relación de frecuencia es

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times 2\pi}{20} = 0.6283$$

La ecuación (3.93) da la amplitud de vibración X:

$$X = \frac{F_0}{k}\left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2}\right]^{1/2}$$

$$0.04 = \frac{F_0}{4000}\left[\frac{1 - \left\{\frac{4(0.12)(98.1)}{\pi F_0}\right\}^2}{(1 - 0.6283^2)^2}\right]^{1/2}$$

La solución de esta ecuación es $F_0 = 97.9874$ N.

■

3.9 Vibración forzada con amortiguamiento de histéresis

Considere un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento de histéresis sometido a una fuerza armónica $F(t) = F_0$ sen ωt, como se indica en la figura 3.24. La ecuación de movimiento de la masa se deriva con la ecuación (2.157), como

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \text{ sen } \omega t \tag{3.100}$$

donde $(\beta k/\omega)\dot{x} = (h/\omega)\dot{x}$ indica la fuerza de amortiguamiento.[6] Aun cuando la solución de la ecuación 3 100 es bastante complicada en el caso de una función forzada general $F(t)$, nos interesa encontrar la respuesta bajo una fuerza armónica.

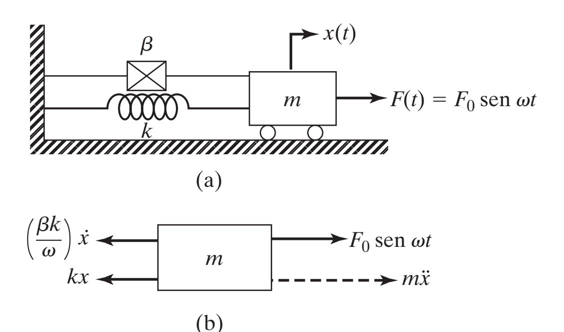


Figura 3.24 Sistema con amortiguamiento de histéresis.

[6] En contraste con el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento en este caso se puede considerar que es una función de la frecuencia forzada (vea la sección 2.10).

La solución de estado estable de la ecuación (3.100) se puede suponer como:

$$x_p(t) = X \text{ sen } (\omega t - \phi) \tag{3.101}$$

Sustituyendo la ecuación (3.101) en la ecuación (3.100), obtenemos

$$X = \frac{F_0}{k\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \beta^2\right]^{1/2}} \tag{3.102}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\beta}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right] \tag{3.103}$$

Las gráficas de las ecuaciones (3.102) y (3.103) se muestran en la figura 3.25 para varios valores de β. Una comparación de la figura 3.25 con la figura 3.11 para amortiguamiento viscoso revela lo siguiente:

1. La relación de amplitud

$$\frac{X}{(F_0/k)}$$

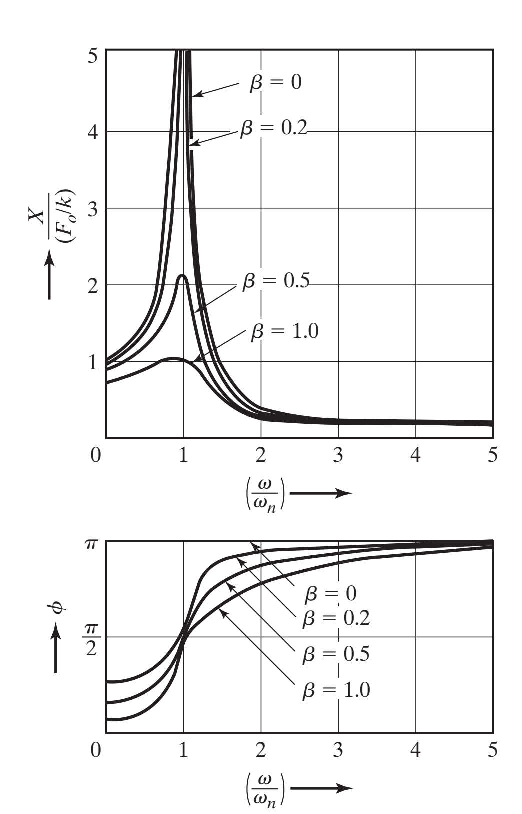


Figura 3.25 Respuesta de estado estable.

alcanza su valor máximo de $F_0/k\beta$ a la frecuencia ($\omega = \omega_n$) en el caso de amortiguamiento de histéresis, en tanto que ocurre a una frecuencia por debajo de la de resonancia ($\omega < \omega_n$) en el caso de amortiguamiento viscoso.

2. El ángulo de fase ϕ tiene un valor de $\tan^{-1}(\beta)$ a $\omega = 0$ en el caso de amortiguamiento de histéresis, en tanto tiene un valor de cero en $\omega = 0$ en el caso de amortiguamiento viscoso. Esto indica que la respuesta nunca puede estar en fase con la función forzada en el caso de amortiguamiento de histéresis.

Observe que si supone que la excitación armónica es $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ en la figura 3.24, la ecuación de movimiento se escribe entonces como

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \tag{3.104}$$

En este caso, la respuesta $x(t)$ también es una función armónica que implica el factor $e^{i\omega t}$. Por consiguiente, $i\omega x(t)$ da por resultado $\dot{x}(t)$, y la ecuación (3.104) se escribe como

$$m\ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 e^{i\omega t} \tag{3.105}$$

donde la cantidad $k(1 + i\beta)$ se conoce como *rigidez compleja* o *amortiguamiento complejo* [3.7]. La parte real de la siguiente ecuación proporciona la solución de estado estable de la ecuación (3.105)

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\beta\right]} \tag{3.106}$$

3.10 Movimiento forzado con otros tipos de amortiguamiento

El amortiguamiento viscoso es la forma más simple de amortiguamiento utilizado en la práctica, ya que conduce a ecuaciones lineales de movimiento. En los casos de amortiguamiento de Coulomb e histerético, definimos coeficientes de amortiguamiento viscoso equivalentes para simplificar el análisis. Incluso, para una forma más compleja de amortiguamiento definimos un coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente, como se ilustra en los siguientes ejemplos. El uso práctico de amortiguamiento equivalente se analiza en la referencia [3.12].

Ejemplo 3.9 Amortiguamiento cuadrático

Determine el coeficiente de amortiguamiento viscoso correspondiente a *amortiguamiento cuadrático* o de *velocidad al cuadrado* que se presenta cuando un cuerpo se mueve en un flujo de fluido turbulento.

Solución: Se supone que la fuerza de amortiguamiento es

$$F_d = \pm a(\dot{x})^2 \tag{E.1}$$

donde a es una constante, $\dot{x}$ es la velocidad relativa a través del amortiguador, y cuando $\dot{x}$ es positiva (negativa) se debe utilizar el signo negativo (positivo) en la ecuación (E.1). La energía disipada por ciclo durante el movimiento armónico $x(t) = X$ sen ωt está dada por

$$\Delta W = 2\int_{-x}^{x} a(\dot{x})^2\, dx = 2X^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\omega^2 \cos^3 \omega t\, d(\omega t) = \frac{8}{3}\omega^2 a X^3 \tag{E.2}$$

Si igualamos esta energía a la energía disipada en un amortiguador viscoso equivalente (vea la ecuación 2.94))

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \tag{E.3}$$

obtenemos el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente (c_{eq})

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} a \omega X \tag{E.4}$$

Se observa que c_{eq} no es una constante sino que varía con ω y X. La amplitud de la respuesta de estado estable se determina con la ecuación (3.30):

$$\frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta_{eq} r)^2}} \tag{E.5}$$

donde $r = \omega/\omega_n$ y

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} \tag{E.6}$$

Utilizando las ecuaciones (E.4) y (E.6), se puede resolver la ecuación (E.5) para obtener

$$X = \frac{3\pi m}{8ar^2}\left[-\frac{(1 - r^2)^2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - r^2)^4}{4} + \left(\frac{8ar^2\delta_{est}}{3\pi m}\right)^2}\,\right]^{1/2} \tag{E.7}$$

■

3.11 Autoexcitación y análisis de estabilidad

La fuerza que actúa en un sistema vibratorio suele ser externa al sistema e independiente del movimiento. Sin embargo, hay sistemas para los cuales la fuerza de excitación es una función de los parámetros de movimiento del sistema, digamos desplazamiento, velocidad o aceleración. Tales sistemas se conocen como sistemas vibratorios autoexcitados, puesto que el movimiento en sí produce la fuerza de excitación (vea el problema 3.92). La inestabilidad de las flechas rotatorias, la agitación de las aspas de turbina, la vibración de tubos inducida por el flujo, y la trepidación de las ruedas de un automóvil y el movimiento aerodinámicamente inducido de puentes son ejemplos típicos de vibraciones autoexcitadas.

3.11.1 Análisis de estabilidad dinámica

Un sistema es dinámicamente estable si el movimiento (o desplazamiento) converge o permanece estable con el tiempo. Por otra parte, si la amplitud del desplazamiento se incrementa continuamente (diverge) con el tiempo, se dice que es dinámicamente inestable. El movimiento diverge y el sistema se vuelve inestable si la autoexcitación proporciona energía al sistema. Para ver las circunstancias que conducen a la inestabilidad, consideramos la ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.107}$$

Si se supone una solución de la forma $x(t) = Ce^{st}$, donde C es una constante, la ecuación (3.107) nos lleva a la ecuación característica

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{3.108}$$

Las raíces de esta ecuación son

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2} \tag{3.109}$$

Como se supone que la solución es $x(t) = Ce^{est}$, el movimiento será divergente y aperiódico si las raíces s_1 y s_2 son reales y positivas. Esta situación se puede evitar si c/m y k/m son positivas. El movimiento también divergirá si las raíces s_1 y s_2 son conjugadas complejas con partes reales positivas. Para analizar esta situación, exprésense las raíces s_1 y s_2 de la ecuación (3.108) como

$$s_1 = p + iq, \qquad s_2 = p - iq \tag{3.110}$$

donde p y q son números reales, de modo que

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \tag{3.111}$$

Las ecuaciones (3.111) y (3.110) dan

$$\frac{c}{m} = -(s_1 + s_2) = -2p, \qquad \frac{k}{m} = s_1 s_2 = p^2 + q^2 \tag{3.112}$$

Las ecuaciones (3.112) muestran que para p negativo, c/m debe ser positiva y para $p^2 + q^3$ positiva, k/m debe ser positiva. Por lo tanto, el sistema será dinámicamente estable si c y k son positivos (suponiendo que m es positivo).

Ejemplo 3.10 Inestabilidad de una masa soportada por un resorte sobre una banda móvil

Considere una masa soportada por un resorte sobre una banda móvil, como se muestra en la figura 3.26(a). El coeficiente de fricción cinética entre la masa y la banda varía con una velocidad (de frotación) relativa, como se muestra en la figura 3.26(b). A medida que la velocidad de frotación se incrementa, el coeficiente de fricción primero se reduce a partir de su valor estático linealmente, y luego comienza a incrementarse. Suponiendo que la velocidad de frotación, v, es menor que el valor de transición v_Q, el coeficiente de fricción se expresa como

$$\mu = \mu_0 - \frac{a}{W}v$$

donde a es una constante y $W = mg$ es el peso de la masa. Determine la naturaleza de la vibración libre con respecto a la posición de equilibrio de la masa.

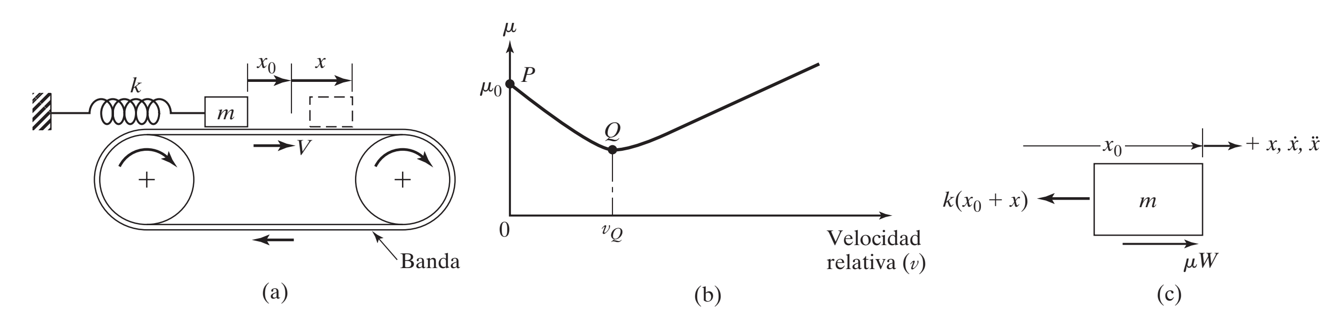


Figura 3.26 Movimiento de una masa soportada por un resorte debido a la fricción de la banda.

Solución: Sea la posición de equilibrio de la masa m la correspondiente a una extensión de x_0 del resorte. Entonces

$$\mu W = kx_0$$

o

$$x_0 = \frac{\mu W}{k} = \frac{\mu_0 W}{k} - \frac{aV}{k}$$

donde V es la velocidad de la banda. Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio (x_0), la velocidad de frotación v está dada por

$$v = V - \dot{x}$$

La ecuación de movimiento de vibración libre se escribe, aplicando la segunda ley del movimiento de Newton, como (vea la figura 3.26(c)):

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + \mu W = -k(x_0 + x) + W\left(\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x})\right)$$

es decir,

$$m\ddot{x} - a\dot{x} + kx = 0 \tag{E.1}$$

Como el coeficiente de $\dot{x}$ es negativo, el movimiento dado por la ecuación (E.1) será inestable. La solución de la ecuación (E.1) resulta de

$$x(t) = e^{(a/2m)t}\{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\} \tag{E.2}$$

donde C_1 y C_2 son constantes y

$$r_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)\right]^{1/2}$$

Por la ecuación (E.2) se ve que el valor de x se incrementa con el tiempo. Se incrementa hasta que $V - \dot{x} = 0$ o $V + \dot{x} = v_Q$. Después de esto, el coeficiente μ tiene una pendiente positiva, y por consiguiente la naturaleza del movimiento será diferente [3.13].

Nota: En los frenos de absorción de banda y polea se observa un movimiento parecido, así como en mesas deslizantes de máquinas herramienta [3.14]. En máquinas herramienta, por ejemplo, una mesa de trabajo se monta sobre guías ajustadas y se utiliza un tornillo de avance para impartirle movimiento, como se muestra en

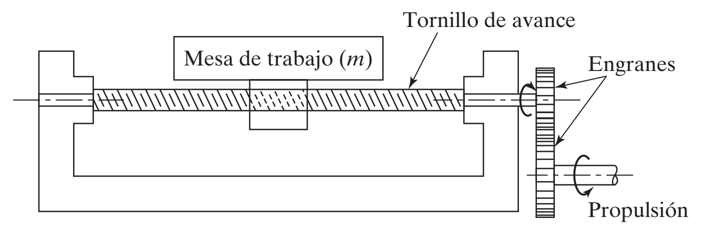


Figura 3.27 Movimiento de una mesa de trabajo mediante un tornillo de avance en una máquina herramienta.

la figura 3.27. En algunos casos, la mesa de trabajo puede deslizarse a trompicones incluso cuando el tornillo de avance tenga un movimiento uniforme. Tal movimiento se conoce como movimiento trompicado. Este movimiento se puede analizar de un modo sencillo modelando la mesa de trabajo como una masa (m) y la conexión entre la mesa de trabajo y el tornillo de avance (la cual nunca es perfectamente rígida) como un resorte (k) y un amortiguador viscoso (c). El coeficiente de fricción entre la masa y la superficie deslizante varía como una función de la velocidad de deslizamiento, como se indica en la figura 3.26(b). La ecuación de movimiento de la masa (mesa de trabajo) se puede obtener igual que en el caso de la ecuación (E.1) del ejemplo 3.8 como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mu W = W\left[\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x})\right]$$

es decir,

$$m\ddot{x} + (c - a)\dot{x} + kx = 0$$

Podemos ver que la inestabilidad dinámica ocurre si $c < a$.

■

3.11.2 Inestabilidad dinámica provocada por el flujo de un fluido

La vibración provocada por un fluido que fluye alrededor de un cuerpo se conoce como vibración inducida por flujo [3.4]. Por ejemplo, las chimeneas altas, los periscopios de submarinos, las líneas de transmisión eléctrica y las barras de combustible nuclear vibran violentamente en ciertas condiciones de flujo de fluido alrededor de ellos. Asimismo, las tuberías de agua y petróleo, así como los tubos en compresores de aire experimentan vibración severa en ciertas condiciones de flujo de fluido a través de ellos. En todos estos ejemplos, la vibración del sistema extrae energía de forma continua de la fuente, lo que conduce amplitudes de vibración cada vez más grandes.

La vibración inducida por flujo puede ser provocada por varios fenómenos. Por ejemplo, en líneas de transmisión eléctrica cubiertas de hielo, la vibración de baja frecuencia (1 a 2 Hz) conocida como *galope* ocurre a consecuencia de las fuerzas de levantamiento y resistencia desarrolladas por el aire que fluye alrededor de las líneas. La vibración inestable conocida como *agitación*, de secciones de superficies aerodinámicas también se debe a las fuerzas de levantamiento y resistencia desarrolladas por el aire que fluye alrededor de la superficie aerodinámica. Además, una vibración conocida como *canturreo de líneas de transmisión* ocurre a consecuencia del fenómeno de formación de torbellinos.

Para ver el fenómeno de galope, considere una sección cilíndrica contra la que el viento choca a una velocidad U, como se muestra en la figura 3.28(a) [3.3]. Por la simetría de la sección, la dirección de la fuerza producida por el viento será la misma que la del viento. Si se le imparte una pequeña velocidad descendente u al cilindro, el viento tendrá un componente ascendente de velocidad u (con respecto al cilindro) junto con el componente horizontal U. Por lo tanto, la dirección de la fuerza resultante debido al viento contra el cilindro será ascendente, como se muestra en la figura 3.28(b). Como esta fuerza (ascendente) se opone a la dirección del movimiento del cilindro (descendente), el movimiento del cilindro se amortiguará. Por el contrario, si se considera una sección no circular como un alambre cilíndrico cubierto de hielo, quizá la fuerza del viento resultante no siempre se oponga al movimiento del alambre, como se muestra en la figura 3.28(c). En ese caso, el movimiento del alambre es ayudado por las fuerzas del viento, lo que implica un amortiguamiento negativo en el sistema.

Para visualizar el fenómeno del canturreo de alambres, considere un fluido al pasar sobre un cilindro liso. En determinadas condiciones se forman torbellinos alternos descendentes en un patrón regular, como se muestra en la figura 3.29. Éstos se conocen como torbellinos de Karman en honor al prominente mecánico de fluidos, Theodor von Karman, quien predijera en 1911 la separación estable de los torbellinos sobre suelos teóricos. Los torbellinos de Karman se alternan en el sentido de las manecillas del reloj y en el sentido contrario y así provocan fuerzas de levantamiento variables

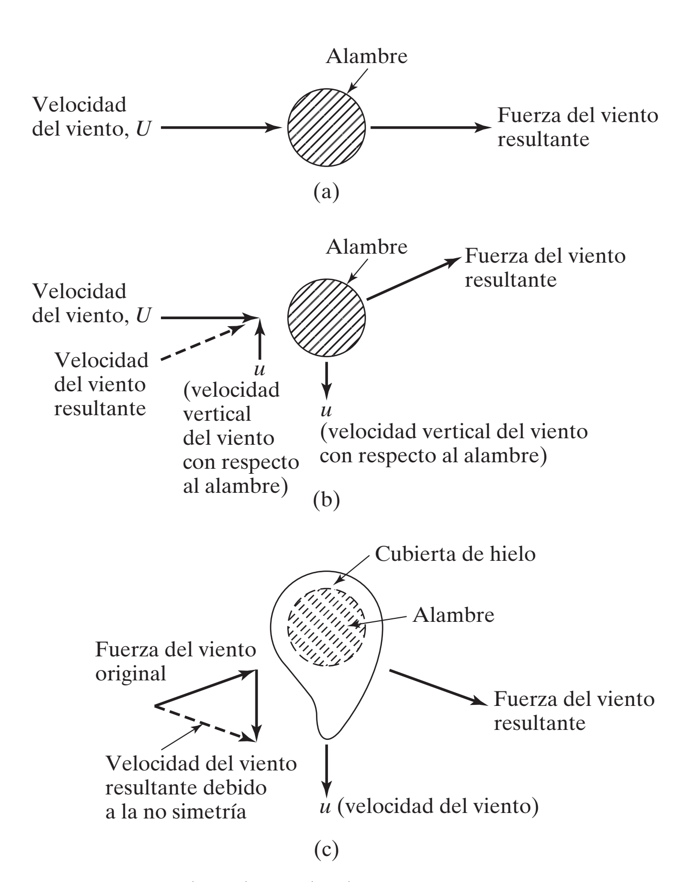


Figura 3.28 Galope de un alambre.

armónicamente sobre el cilindro, perpendiculares a la velocidad del fluido. Datos experimentales muestran que la formación de torbellinos regulares ocurren fuertemente en el rango del número de Reynolds (Re) desde alrededor de 60 hasta 5000. En este caso

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \tag{3.113}$$

donde d es el diámetro del cilindro, ρ es la densidad, V es la velocidad y μ es la viscosidad absoluta del fluido. Para Re $>$ 1000, la frecuencia sin unidades de la formación de torbellinos, expresada como un número de Strouhal (St), es aproximadamente igual a 0.21 [3.15]

$$\text{St} \equiv \frac{fd}{V} = 0.21 \tag{3.114}$$

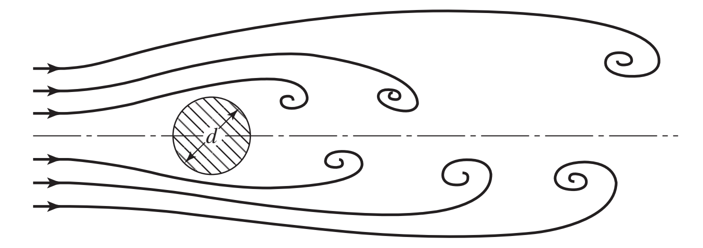


Figura 3.29 Flujo de un fluido sobre un cilindro.

donde f es la frecuencia de formación de torbellinos. La fuerza de levantamiento armónicamente variable (F) está dada por

$$F(t) = \frac{1}{2} c\rho V^2 A \text{ sen } \omega t \tag{3.115}$$

donde c es una constante ($c \approx 1$ para un cilindro), A es el área proyectada del cilindro perpendicular a la dirección de V, ω es la frecuencia circular ($\omega = 2\pi f$), y t es el tiempo. El mecanismo de formación de torbellinos en un cilindro se puede considerar autoexcitado, puesto que el flujo de fluido (V) no tiene ningún componente alterno. Desde el punto de vista de diseño, tenemos que asegurarnos de lo siguiente:

1. La magnitud de la fuerza ejercida sobre el cilindro, dada por la ecuación (3.115), es menor que la carga de falla estática.
2. Incluso si la magnitud de la fuerza F es pequeña, la frecuencia de oscilación (f) no deberá provocar fallas por fatiga durante la duración esperada de la estructura (o cilindro).
3. La frecuencia de la formación de torbellinos (f) no coincide con la frecuencia natural de la estructura o cilindro para evitar la resonancia.

Reducción de la vibración inducida por flujo. Se pueden utilizar varios métodos para reducir las fallas provocadas por vibración inducida por flujo.

1. Para reducir el canturreo de líneas de transmisión provocado por la formación de torbellinos, se puede utilizar un amortiguador conocido como amortiguador de Stockbridge. Este amortiguador se compone de un cable de acero corto con dos masas en sus extremos. Este amortiguador se fija en la línea de transmisión, como se muestra en la figura 3.30(a). El dispositivo actúa por lo tanto como un sistema de resorte-masa el cual se puede sintonizar a la frecuencia de vibración inducida por flujo ajustando su longitud (la longitud del cable) o el valor de las masas. El amortiguador de Stockbridge se sujeta a la línea de transmisión en un punto donde se prevé que la vibración sea grande.
2. Para chimeneas altas de acero, el efecto de vibración inducida por flujo puede minimizarse por medio de amortiguadores de vibración mediante tirantes entre la parte superior de la chimenea y el suelo, como se muestra en la figura 3.30(b).
3. En chimeneas altas, se pueden utilizar deflectores helicoidales o tracas alrededor de la chimenea, como se muestra en la figura 3.31. Los deflectores helicoidales rompen el patrón del torbellino de modo que se aplique una excitación no bien definida a la pared de la chimenea.
4. Para automóviles de alta velocidad (de carreras), las fuerzas de levantamiento inducidas por flujo pueden aligerar la carga sobre las llantas, lo que provoca problemas de maniobrabilidad y estabilidad del vehículo. Aun cuando las fuerzas de levantamiento se pueden contrarrestar

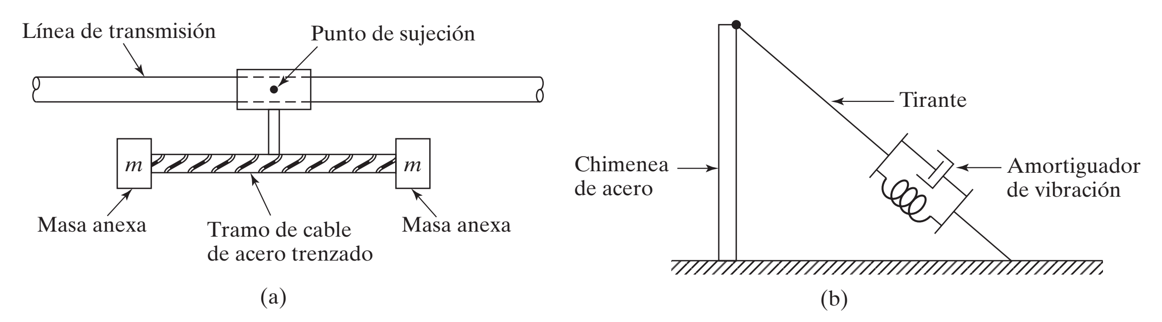


Figura 3.30 Amortiguador de Stockbridge.

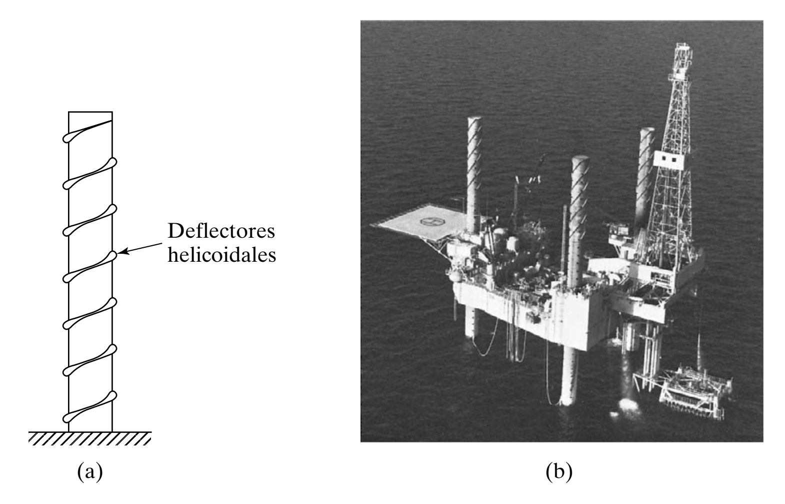


Figura 3.31 Deflectores helicoidales. (Foto cortesía de Bethlehem Steel Corporation).

en parte por medio de deflectores, la fuerza de resistencia al avance se incrementará. En años recientes se han estado utilizando superficies aerodinámicas invertidas móviles para desarrollar una fuerza aerodinámica dirigida hacia abajo para mejorar la estabilidad (vea la figura 3.32).

Figura 3.32 Auto de carreras contemporáneo con características aerodinámicas para una baja resistencia al avance y alta estabilidad. (Foto cortesía de Goodyear Tire & Rubber Co. Inc.).

Ejemplo 3.11 Inestabilidad dinámica de una superficie aerodinámica

Encuentre el valor de la velocidad de corriente libre u a la cual la sección de la superficie aerodinámica (sistema de un solo grado de libertad) mostrada en la figura 3.33 se vuelve inestable.

Solución:

Método: Encuentre la fuerza vertical que actúa en la superficie aerodinámica (o masa m) y obtenga la condición que conduce a amortiguamiento cero.

La fuerza vertical que actúa en la superficie aerodinámica (o masa m) producida por un paso de fluido se puede expresar como [3.4]

$$F = \frac{1}{2}\rho u^2 D C_x \tag{E.1}$$

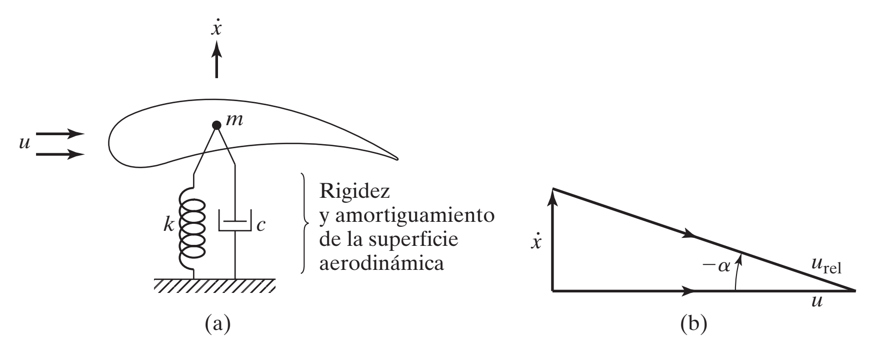


Figura 3.33 Modelado de una superficie aerodinámica como un sistema de un solo grado de libertad.

donde ρ = densidad del fluido, u = velocidad de corriente libre, D = ancho de la sección transversal normal a la dirección del paso del fluido, y C_x = coeficiente de fuerza vertical, el cual se puede expresar como

$$C_x = \frac{u_{\text{rel}}^2}{u^2}\,(C_L \cos\alpha + C_D \operatorname{sen}\alpha) \tag{E.2}$$

donde u_{rel} es la velocidad relativa del fluido y C_L es el coeficiente de levantamiento, C_D es el coeficiente de resistencia al avance, y α es el ángulo de ataque (vea la figura 3.33):

$$\alpha = -\tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}}{u}\right) \tag{E.3}$$

Para ángulos de ataque pequeños,

$$\alpha = -\frac{\dot{x}}{u} \tag{E.4}$$

y C_x se puede representar de forma aproximada, mediante una expansión de serie de Taylor, aproximadamente $\alpha = 0$, como

$$C_x \simeq C_x\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha \tag{E.5}$$

donde, para valores pequeños de α, $u_{\text{rel}} \simeq u$ y la ecuación (E.2) se escribe como

$$C_x = C_L \cos\alpha + C_D \operatorname{sen}\alpha \tag{E.6}$$

La ecuación (E.5) se rescribe, mediante las ecuaciones (E.6) y (E.4) como

$$\begin{aligned} C_x &= (C_L \cos\alpha + C_D \operatorname{sen}\alpha)\bigg|_{\alpha=0} \\ &\quad + \alpha\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\cos\alpha - C_L \operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\operatorname{sen}\alpha + C_D\cos\alpha\right]\bigg|_{\alpha=0} \\ &= C_L\bigg|_{\alpha=0} + \alpha\,\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ &= C_L\bigg|_{\alpha=0} - \frac{\dot{x}}{u}\left\{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + C_D\bigg|_{\alpha=0}\right\} \end{aligned} \tag{E.7}$$

La sustitución de la ecuación (E.7) en la ecuación (E.1) da

$$F = \frac{1}{2}\rho u^2 D C_L \Big|_{\alpha=0} - \frac{1}{2}\rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \dot{x} \tag{E.8}$$

La ecuación de movimiento de la superficie aerodinámica (o masa) es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F = \frac{1}{2}\rho u^2 D C_L \Big|_{\alpha=0} - \frac{1}{2}\rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \dot{x} \tag{E.9}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (E.9) produce un desplazamiento estático y por consiguiente sólo el segundo término puede desestabilizar el sistema. La ecuación de movimiento, considerando sólo el segundo término del lado derecho, es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \equiv m\ddot{x} + \left[c + \frac{1}{2}\rho u D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right] \dot{x} + kx = 0 \tag{E.10}$$

Observe que m incluye la masa del fluido atrapado. En la ecuación (E.10) se ve que el desplazamiento de la superficie aerodinámica (o masa m) crecerá ilimitadamente (es decir, el sistema se vuelve inestable) si c es negativo. Por consiguiente, la velocidad mínima del fluido para que se inicien las oscilaciones inestables es $c = 0$, o

$$u = -\left\{ \frac{2c}{\rho D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}} \right\} \tag{E.11}$$

El valor $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = -2.7$ para una sección cuadrada en un flujo estable [3.4].

■

Nota: Un análisis similar al del ejemplo 3.11 se puede aplicar a otras estructuras vibratorias, como tanques de agua (vea la figura 3.34a) y líneas de potencia cubiertas de hielo galopantes (figura 3.34b) bajo la acción de cargas de viento.

Ejemplo 3.12 Vibración de una chimenea inducida por flujo

Una chimenea de acero tiene una altura de 2 m, un diámetro interno de 0.75 m y un diámetro externo de 0.80 m. Determine la velocidad del viento que fluye alrededor de la chimenea que hará que ésta vibre transversalmente en la dirección del flujo de aire.

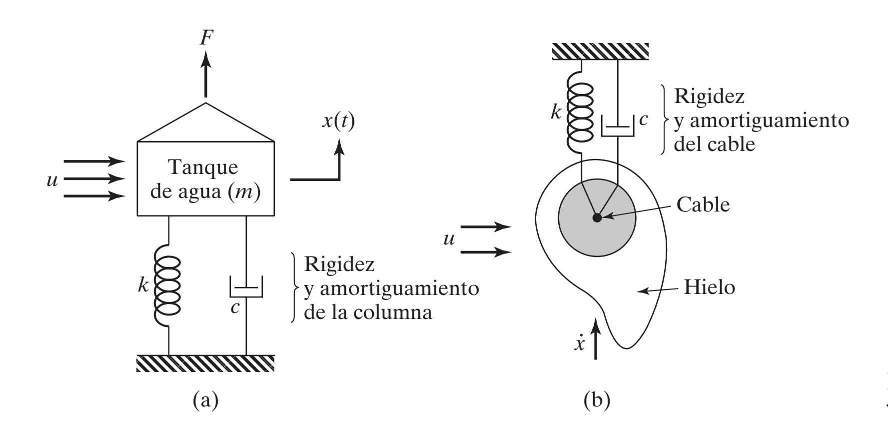


Figura 3.34 Inestabilidad de estructuras vibratorias típicas.

Solución

Método: Modele la chimenea como una viga en voladizo e iguale la frecuencia natural de la vibración transversal de la chimenea a la frecuencia de la formación de torbellinos.

Para hallar la frecuencia natural de la vibración transversal de la chimenea se puede utilizar el método de Rayleigh, suponiendo una deflexión transversal adecuada de la viga en voladizo (vea la sección 8.7). Sin embargo, en este caso, usaremos las frecuencias naturales de la viga en voladizo dada en la figura 8.15. La figura 8.15 da la frecuencia natural fundamental de vibración transversal (ω_1) de una viga en voladizo (empotrada-libre) como

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \tag{E.1}$$

donde

$$\beta_1 l = 1.875104 \tag{E.2}$$

Para la chimenea, $E = 207 \times 10^9$ Pa, ρg = peso unitario = 76.5×10^3 N/m^3, $l = 20$ m, $d = 0.75$ m, $D = 0.80$ m,

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(0.80^2 - 0.75^2) = 0.0608685 \text{ m}^2$$

y

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(0.80^4 - 0.75^4) = 0.004574648 \text{ m}^4$$

Por lo tanto,

$$\omega_1 = (1.875104)^2 \left\{ \frac{(207 \times 10^9)(0.004574648)}{\left(\frac{76.5 \times 10^3}{9.81}\right)(0.0608685)(20)^4} \right\}^{1/2}$$

$$= 12.415417 \text{ rad/s} = 1.975970 \text{ Hz}$$

El número de Strouhal da la frecuencia de formación de torbellinos (f):

$$\text{St} = \frac{fd}{V} = 0.21$$

Utilizando $d = 0.80$ m y $f = f_1 = 1.975970$ Hz, la velocidad del viento (V) que provoca resonancia se puede determinar como

$$V = \frac{f_1 d}{0.21} = \frac{1.975970(0.80)}{0.21} = 7.527505 \text{ m/s}$$

■

3.12 Método de la función de transferencia

El método de función de transferencia, basado en transformadas de Laplace, se utiliza comúnmente para formular y resolver problemas dinámicos en la literatura de controles. También se puede utilizar para resolver problemas de vibración forzada. La función de transferencia relaciona la salida de un sistema con su entrada. Esta función permite separar la entrada, el sistema y la salida en tres partes separadas y distintas (a diferencia de la ecuación diferencial, en la cual los tres aspectos no son fáciles de separar).

Definición: La función de transferencia de una ecuación diferencial lineal invariable con el tiempo se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida o función de respuesta con la transformada de Laplace de la entrada o función forzada, suponiendo condiciones iniciales cero.

El procedimiento general utilizado para determinar la función de transferencia de una ecuación diferencial lineal implica tomar las transformadas de Laplace de ambos lados, suponiendo condiciones iniciales cero, y resolviendo para la relación de la transformada de Laplace de la salida a la transformada de Laplace de la entrada. Como la ecuación diferencial lineal se compone de la variable y sus derivadas, la transformada de Laplace la transforma en una ecuación polinomial en la variable de Laplace s. La expresión dada en el apéndice D para las transformadas de Laplace de las derivadas se pueden utilizar al derivar la función de transferencia.

Ejemplo 3.13 Función de transferencia correspondiente a una ecuación diferencial

Considere la siguiente ecuación diferencial lineal invariable con el tiempo de orden enésimo que rige el comportamiento de un sistema dinámico:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 f(t) \tag{E.1}$$

donde $x(t)$ es la salida, $f(t)$ es la entrada, t es el tiempo y las a_i y b_i son constantes. Determine la función de transferencia del sistema y muestre la entrada, el sistema y la salida en un diagrama de bloques.

Solución: Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (E.1), obtenemos

$$\begin{aligned} a_n s^n X(s) + a_{n-1} s^{n-1} X(s) + \ldots + a_0 X(s) &+ \textit{condiciones iniciales que conllevan } x(t) \\ = b_m s^m F(s) + b_{m-1} s^{m-1} F(s) + \ldots + b_0 F(s) & \\ + \textit{condiciones iniciales que conllevan } f(t) & \end{aligned} \tag{E.2}$$

Se ve que la ecuación (E.2) es una expresión puramente algebraica. Si se supone que todas las condiciones iniciales son cero, la ecuación (E.2) se reduce a la forma siguiente:

$$\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\} X(s) = \{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\} F(s) \tag{E.3}$$

Resolviendo la ecuación (E.3) la función de transferencia del sistema evaluado en condiciones iniciales cero, $T(s)$, se determina como la relación de la transformada de salida, $X(s)$, y la transformada de entrada, $F(s)$:

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0)} \tag{E.4}$$

Se ve que la función de transferencia identifica la entrada, $F(x)$, la salida, $X(s)$, y el sistema (definidos por la expresión del lado derecho de la ecuación (E.4)) como entidades aparte. Según la ecuación (E.4), la salida del sistema se determina como

$$X(s) = T(s)\, F(s) \tag{E.2}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de la ecuación (E.5), podemos determinar la salida del sistema en el dominio del tiempo para cualquier entrada conocida.

La función de transferencia se puede representar como un diagrama de bloques como se muestra en la figura 3.35, donde la entrada y salida se muestran en los lados izquierdo y derecho, respectivamente, del bloque con la función de transferencia mostrada dentro del bloque. Observe que el denominador de la función de transferencia es idéntico a la polinomial característica de la ecuación diferencial.

Entrada, $F(s)$ → Sistema, $T(s)$ → Salida, $X(s)$

Figura 3.35 Representación como diagrama de bloques de la entrada, el sistema y la salida.

■

Ejemplo 3.14 Función de transferencia de un sistema de un solo grado de libertad amortiguado

Obtenga la función de transferencia de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado sometido a una fuerza externa $f(t)$ como se muestra en la figura 3.1.

Solución: La ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{E.1}$$

Si tomamos las transformadas de Laplace de ambos lados de la ecuación (E.1), obtenemos

$$m\mathscr{L}[\ddot{x}(t)] + c\mathscr{L}[\dot{x}(t)] + k\mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \tag{E.2}$$

o

$$m\,\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s) \tag{E.3}$$

La ecuación (E.2) se reescribe como

$$(ms^2 + cs + k)\,X(s) - \{msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)\} = F(s) \tag{E.4}$$

donde $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$. La función de transferencia del sistema se obtiene a partir de la ecuación (E.4), fijando $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, como

$$T(s) = \frac{\mathscr{L}[\text{salida}]}{\mathscr{L}[\text{entrada}]}\Big|_{\text{condiciones iniciales cero}} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{E.5}$$

Notas:

1. La función de transferencia es una propiedad del sistema y no se relaciona con la entrada o la función forzada.
2. La función de transferencia no proporciona ninguna información sobre la estructura física del sistema. De hecho, las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.
3. La representación de un sistema dinámico mediante la función de transferencia es muy útil en la teoría de control así como en pruebas de vibración para medir la respuesta dinámica y para identificar sistemas. Por ejemplo, en el caso de un sistema cuyos parámetros como masa (m), constante de amortiguamiento (c) y rigidez de resorte no son conocidos, la función de transferencia se determina experimentalmente midiendo la respuesta o salida ante una entrada conocida. Una vez determinada la función de transferencia, describe por completo las características dinámicas del sistema.

   En pruebas de vibración, la respuesta de vibración medida (por una entrada o función forzada conocida) podría ser el desplazamiento, la velocidad o, más comúnmente, la aceleración. La función de transferencia correspondiente se define como la relación $\dfrac{s^2X(s)}{F(s)}$, donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada y $s^2\,X(s)$ es la transformada de Laplace de la aceleración.
4. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, la salida o respuesta del sistema se puede determinar para cualquier tipo de entrada.

5. La variable s en la transformada de Laplace es un número complejo y por consiguiente la función de transferencia es una cantidad compleja. La variable s es similar a la raíz característica s utilizada para representar la solución de una ecuación diferencial [vea la ecuación (2.61)]. Se indica la variable s en la transformada de Laplace en forma compleja como

$$s = \sigma + i\omega_d \tag{3.116}$$

donde σ y ω_d representan las partes real e imaginaria, respectivamente, de s; el análisis completo considerado en la sección 2.8 también es válida para la variable s de la transformada de Laplace.

6. En la ecuación (3.1) se ve que la ecuación de movimiento de un sistema vibratorio está en el dominio del tiempo. Aunque la salida o respuesta del sistema del sistema se puede determinar en el dominio del tiempo de forma directa como se indica en la sección 3.4, en ocasiones es más fácil determinar la respuesta con el método de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial lineal en una expresión algebraica, la cual es más fácil de manipular. Transforma las funciones definidas en función de la variable independiente (como el tiempo) en funciones en términos de la cantidad compleja s como la variable independiente. Para utilizar la transformada de Laplace, primero tenemos que determinar la función de transferencia del sistema.

7. Aun cuando la función de transferencia se deriva formalmente mediante la aplicación de la transformada de Laplace, se puede obtener de manera informal de un modo muy simple. Para esto, considere la ecuación

$$m\ddot{x} + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{3.117}$$

La función de transferencia asociada con esta ecuación se deriva reemplazando $x(t)$ por $X(s)e^{est}$ y $f(t)$ por $F(s)e^{est}$. Las derivadas con respecto al tiempo se obtienen diferenciando $X(s)e^{est}$ con respecto al tiempo como $\dot{x}(t) = X(s)\, se^{\text{est}}$ y $\ddot{x}(t) = X(s)\, s^2 e^{\text{est}}$. Por lo tanto, la ecuación (3.117) se puede volver a escribir como

$$ms^2X(s)e^{est} + csX(s)e^{est} + kX(s)e^{est} = F(s)e^{est} \tag{3.118}$$

La ecuación (3.118) se puede resolver para la relación $X(s)/F(s)$ y obtener la función de transferencia $T(s)$, como

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{3.119}$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (E.5) del ejemplo 3.14.

■

3.13 Soluciones obtenidas utilizando transformadas de Laplace

El cálculo de respuestas de sistemas de un solo grado de libertad obtenido utilizando transformadas de Laplace se ilustra mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.15 Respuesta de un sistema amortiguado obtenida con transformadas de Laplace

Obtenga una expresión para la respuesta completa de un sistema de un solo grado de libertad amortiguado sujeto a una fuerza general, $f(t)$ como se muestra en la figura 3.1 por medio de transformadas de Laplace.

Solución: La transformada de Laplace de la ecuación (3.1) conduce a la relación (vea la ecuación (E.4) del ejemplo 3.14).

$$X(s) = \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\,\zeta\omega_n}{s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2}x(0) + \frac{1}{s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\dot{x}(0) \tag{E.1}$$

La respuesta completa del sistema se puede determinar tomando las transformadas de Laplace de cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación (E.1). Por comodidad, definimos las siguientes funciones donde los subíndices *i* y *s* indican la entrada y el sistema, respectivamente:

$$F_i(s) = F(s) \tag{E.2}$$

$$F_s(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{E.3}$$

Observamos que la transformada inversa de Laplace de $F_i(s)$ será igual a la función forzada conocida

$$f_i(t) = F_0 \cos \omega t \tag{E.4}$$

y la transformada inversa de Laplace de $F_i(s)$ es (vea el apéndice D)

$$f_s(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{E.5}$$

donde

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n \tag{E.6}$$

La transformada inversa de Laplace del primer término del lado derecho de la ecuación (E.1) se puede expresar como (vea el apéndice D):

$$\mathcal{L}^{-1} F_i(s) F_s(s) = \int\limits_{r=0}^{t} f_i(\tau) f_s(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{m\omega_d} \int\limits_{r=0}^{t} f(\tau) e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t - \tau)\, d\tau \tag{E.7}$$

La transformada inversa de Laplace del coeficiente de $x(0)$ en la ecuación (E.1) da

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \frac{s + 2\,\zeta\omega_n}{s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_1) \tag{E.8}$$

donde

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \qquad \text{(E.9)} \tag{E.9}$$

La transformada inversa de Laplace del coeficiente de $\dot{x}$ (0) se puede obtener multiplicando $f_s(t)$ por m de modo que

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \frac{1}{(s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{E.10}$$

Por lo tanto, la respuesta completa del sistema, utilizando las respuestas dadas en los lados derechos de las ecuaciones (E.7), (E.8) y (E.10), se pueden expresar como

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int\limits_{\tau=0}^{t} f(\tau) e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t - \tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_1) + \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{E.11}$$

Observando que la transformada inversa de Laplace de la función producto en la ecuación (E.7) también se puede expresar como

$$\mathscr{L}^{-1}F_i(s)F_s(s) = \int_{\tau=0}^{t} f_i(t - \tau)f_s(\tau)\, d\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_{\tau=0}^{t} f(t - \tau)e^{-\zeta\omega_n\tau} \operatorname{sen} \omega_d\tau\, d\tau \qquad \text{(E.12)}$$

la respuesta completa del sistema también se puede expresar como

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_{\tau=0}^{t} f(t - \tau)\, e^{-\zeta\omega_n\tau} \operatorname{sen} \omega_d\tau\, d\tau$$
$$+ \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_1) + \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t \qquad \text{(E.13)}$$

■

Ejemplo 3.16 Respuesta de estado estable obtenida con la transformada de Laplace

Determine la respuesta de estado estable de un sistema de un solo grado de libertad amortiguado ante una fuerza armónica $f(t) = F_0 \cos \omega t$ con la transformada de Laplace.

Solución: La transformada de Laplace de la ecuación (3.1) conduce a la relación (con condiciones iniciales cero para respuesta de estado estable en la ecuación (E.1) del ejemplo 3.15)

$$X(s) = \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad \text{(E.1)}$$

La transformada de Laplace de la entrada $f(t) = F_0 \cos \omega t$ es $F(s) = F_0\frac{s}{s^2 + \omega^2}$. Por lo tanto, la ecuación (E.1) se escribe como

$$X(s) = \frac{F_0}{m}\frac{s}{s^2 + \omega^2}\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{(E.2)}$$

donde las relaciones $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ se utilizaron para expresar la ecuación (E.2). Expresando el lado derecho de la ecuación (E.2) como

$$F(s) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{a_1 s + a_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{a_3 s + a_4}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right) \qquad \text{(E.3)}$$

las constantes a_1, a_2, a_3 y a_4 se identifican como (vea el problema 3.99)

$$a_1 = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(2\zeta\omega_n)^2\omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2} \qquad \text{(E.4)}$$

$$a_2 = \frac{2\zeta\omega_n\omega^2}{(2\zeta\omega_n)^2\omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2} \qquad \text{(E.5)}$$

$$a_3 = -\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(2\zeta\omega_n)^2\omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2} \qquad \text{(E.6)}$$

$$a_4 = -\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(2\zeta\omega_n)^2\omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2} \qquad \text{(E.7)}$$

Por lo tanto, $X(s)$ se puede expresar como

$$X(s) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(2\zeta\omega_n)^2\omega^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}\left\{(\omega_n^2 - \omega^2)\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) + (2\zeta\omega_n\omega)\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right)\right.$$

$$\left. - (\omega_n^2 - \omega^2)\left(\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right) - (2\zeta\omega_n)\left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)\right. \tag{E.8}$$

Utilizando las relaciones 14, 15, 27 y 28 del apéndice D, la respuesta del sistema se puede expresar como

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(2\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}\Big[(\omega_n^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\zeta\omega_n\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$+ \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\,t - \phi)$$

$$- \frac{(2\zeta\omega_n^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\,t)\Big] \tag{E.9}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \zeta^2}{\zeta}\right) \tag{E.10}$$

Se observa que a medida que $t \to \infty$, los términos que implican $e^{-\zeta\omega_n t}$ en la ecuación (E.9) tienden a cero. Por lo tanto, la respuesta de estado estable del sistema se expresa como

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(2\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}[(\omega_n^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\zeta\omega_n\omega\operatorname{sen}\omega t] \tag{E.11}$$

la cual se simplifica como

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}\cos(\omega t - \phi) \tag{E.12}$$

Esta solución es como la determinada en la sección 3.4 [ecuaciones (3.25), (3.28) y (3.29)].

■

3.14 Funciones de transferencia de frecuencia

Como se vio antes, por ejemplo en la sección 3.4, la respuesta de estado estable de un sistema lineal sometido a una entrada senoidal (o armónica) también será senoidal (o armónica) de la misma frecuencia. Aun cuando la respuesta está a la misma frecuencia que la entrada, difiere en amplitud y ángulo de fase de la entrada. Estas diferencias son funciones de la frecuencia (vea la figura 3.11). Además, como se indica en la sección 1.10.2, cualquier sinusoide se puede representar como un número complejo (llamado *fasor*). La magnitud del número complejo es la amplitud de la sinusoide, y el ángulo del número complejo es el ángulo de fase de la sinusoide. Por lo tanto, el fasor de entrada M_i sen$(\omega t + \phi_1)$, se indica en forma polar como $M_i e^{i\phi_i}$, donde se considera que la frecuencia, ω, está implícita.

Como un sistema hace que tanto la amplitud como el ángulo de fase de la entrada cambien (vea por ejemplo, la sección 3.4), podemos pensar en representar el sistema como un número complejo o función definida de modo que el producto de la función del sistema por el fasor de entrada dé el fasor de salida. Por ejemplo, para el sistema de resorte-masa-amortiguador de la figura 3.36(a), la relación de entrada-salida se puede mostrar en la forma de un diagrama de bloques como en la figura 3.36(b). Por lo tanto, la salida o sinusoide de respuesta de estado estable del sistema se indica como

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}} \tag{3.120}$$

donde las M indican las amplitudes y las ϕ indican los ángulos de fase, respectivamente, de las sinusoides. En la ecuación (3.120) se ve que la función del sistema, $M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}$, está definida por su magnitud

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \tag{3.121}$$

y la fase por

$$\phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega) \tag{3.122}$$

La función del sistema, $M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}$, se llama función de *respuesta de frecuencia* y $\phi_s(\omega)$ con $M_s(\omega)$ llamada *respuesta de frecuencia de amplitud* o *magnitud*.

La magnitud de respuesta de frecuencia la da la relación entre la magnitud de la sinusoide de salida con la magnitud de la sinuoside de entrada. La diferencia de los ángulos de fase entre las sinusoides de salida y entrada da la respuesta de fase. Cada una de estas respuestas es una función de frecuencia y se aplicará sólo a las respuestas senoidales de estado estable del sistema. Por

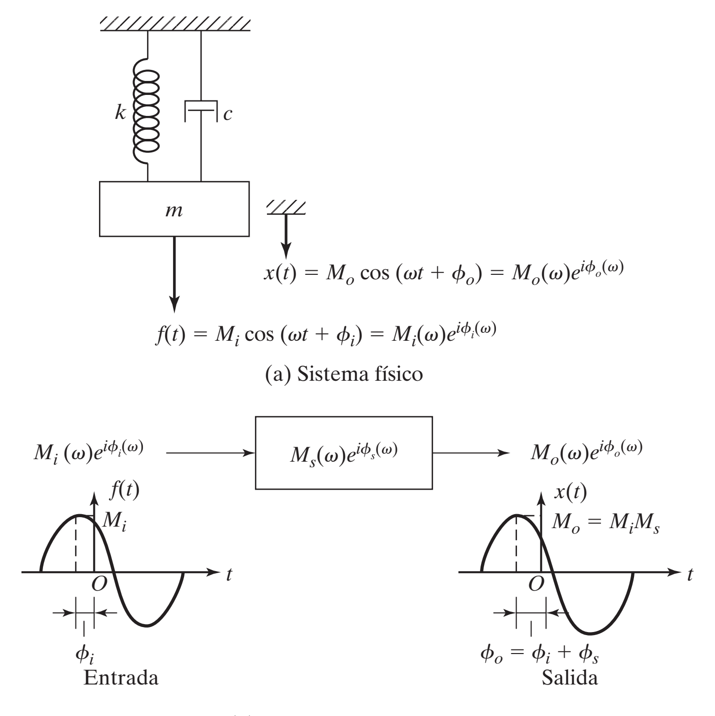


Figura 3.36

conveniencia de notación, en ocasiones la función de respuesta de frecuencia se llama función de transferencia de frecuencia, indicada como $T(i\omega)$, de modo que

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} \tag{3.123}$$

3.14.1 Relación entre la función de transferencia general *T*(*s*) y la función de transferencia de frecuencia *T*(*iω*)

La función de transferencia de frecuencia, $T(i\omega)$, se puede obtener sustituyendo $s = i\omega$ en la función de transferencia general $T(s)$. El siguiente ejemplo ilustra no sólo la generación de la función de transferencia de frecuencia a partir de la función de transferencia general, sino incluso la identificación de la entrada, el sistema y las sinusoides de salida.

Ejemplo 3.17 Generación de una función de transferencia de frecuencia a partir de la función de transferencia general

Considere la función de transferencia de frecuencia derivada de la función de transferencia general para el sistema de resorte-masa-amortiguador considerado en el ejemplo 3.14 e identifique la entrada, el sistema y las sinusoides de salida.

Solución: Para el sistema de resorte-masa-amortiguador considerado en el ejemplo 3.14, la función de transferencia general está dada por

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{E.1}$$

Utilizando $s = i\omega$, la función de transferencia de frecuencia del sistema se genera como

$$T(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega c} \tag{E.2}$$

Esta función de transferencia de frecuencia se puede volver a escribir como

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} = \frac{M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)}}{M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}} \tag{E.3}$$

donde

$$M_o(\omega) = 1, \quad \phi_o(\omega) = 0 \tag{E.4}$$

$$M_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}}, \quad \phi_i(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{k - m\omega^2}\right) \tag{E.5}$$

Se ve que la amplitud o magnitud de $T(i\omega)$ está dada por

$$M_s(s) = |T(i\omega)| = \frac{1}{[(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{E.6}$$

y el ángulo de fase por

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{m\omega^2 - k}\right) \tag{E.7}$$

Se observa que la ecuación (E.5) es idéntica a las ecuaciones (3.30) y (3.31). Por lo tanto, la función de transferencia de frecuencia del sistema, $T(i\omega)$, se puede determinar a partir de la función de transferencia general, $T(s)$, sustituyendo $i\omega$ en lugar de s. Aun cuando esta observación se hace sólo para un sistema de un solo grado de libertad (ecuación diferencial de segundo orden), se puede comprobar para cualquier ecuación diferencial lineal invariable con el tiempo de orden enésimo.

■

3.14.2 Representación de las características de respuesta de frecuencia

La respuesta de frecuencia de un sistema de segundo grado, como el sistema de resorte-masa-amortiguador, indica la respuesta de estado estable del sistema a una entrada senoidal para posibles frecuencias diferentes de la entrada senoidal. Se puede demostrar gráficamente de diferentes maneras. En la sección 3.4, las variaciones de la relación de magnitud o amplitud (M) y el ángulo de fase (ϕ) con la frecuencia (ω) se trazaron como dos gráficas distintas. Para algunos sistemas, la frecuencia ω variará dentro de un rango considerablemente grande. En esos casos es conveniente utilizar escalas logarítmicas para acomodar el rango completo de ω en gráficas trazadas en papel de tamaño estándar.

Diagramas de Bode. Un diagrama de Bode se compone de dos gráficas, una gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia de frecuencia (M) contra el logaritmo de la frecuencia (ω) y una gráfica del ángulo de fase (ϕ) contra el logaritmo de la frecuencia (ω). Los diagramas de Bode también se conocen como *gráficas logarítmicas de la respuesta de frecuencia*.

Como representación estándar de la magnitud logarítmica de $T(i\omega)$, se utiliza una unidad logarítmica conocida como *decibel*, abreviada dB. La relación de magnitud en decibeles, m, se define como

$$m = 10 \log_{10} (M^2) = 20 \log_{10} M \quad \text{dB} \tag{3.124}$$

Línea de conversión de número a decibel. De la ecuación (3.124) se ve que para cualquier número N, su valor en decibeles es 20 $\log_{10} N$. Para algunos valores representativos de N, las equivalencias en decibeles se muestran a continuación:

Valor de N	0.001	0.01	0.1	0.5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100	1000
Valor en dB	−60	−40	−20	−6	−2	0	3	6	20	40	60

Las ventajas principales de representar las características de respuesta de frecuencia en la forma de un diagrama de Bode son las siguientes:

1. La función de transferencia de un sistema se puede identificar (es decir, experimentalmente determinada) con el diagrama de Bode.
2. Las curvas de respuesta de frecuencia se pueden trazar dentro de un amplio rango de la frecuencia, ω.
3. En algunas aplicaciones tenemos que multiplicar las magnitudes de la respuesta de frecuencia. En esos casos, el resultado se obtiene mediante una adición simple en los diagramas de Bode.

Ejemplo 3.18 Diagramas de Bode de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad

Trace los diagramas de Bode correspondientes a un sistema de segundo grado amortiguado (resorte-masa-amortiguador) en forma estándar con la función de transferencia

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{E.1}$$

Solución: La función de transferencia de frecuencia, $T(\omega)$ se obtiene sustituyendo $i\omega$ en lugar de s como

$$T(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(i\omega) + \omega_n^2} \tag{E.2}$$

o

$$T(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \tag{E.3}$$

donde $r = \omega/\omega_n$. La magnitud, M, de $T(\omega)$ está dada por

$$M = |T(i\omega| = \left|\frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{E.4}$$

de modo que

$$20 \log_{10} M = -20 \log_{10} \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \tag{E.5}$$

Observe que a bajas frecuencias con $\omega \ll \omega_n$ o $r \ll 1$, la ecuación (E.5) se reduce a

$$-20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

Para frecuencias muy altas con $\omega \gg \omega_n$ o $r \gg 1$, la ecuación (E.5) se escribe como

$$-20 \log_{10} r^2 = -40 \log_{10} r \text{ dB}$$

El ángulo de fase dado por la ecuación (E.3) es

$$\phi = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} = -\tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \tag{E.6}$$

La ecuación (E.6) muestra que ϕ es una función de ω y ζ. En $\omega = 0$, $\phi = 0$. Cuando $\omega = \omega_n$, $\phi = -90°$ independientemente del valor de ζ, puesto que

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{0}\right) = -\tan^{-1}\infty = -90°$$

En $\omega = \infty$, el ángulo de fase es $-180°$. El ángulo de fase será antisimétrico con respecto al punto de inflexión, el punto donde $\phi = -90°$.

Los diagramas de Bode de las ecuaciones (E.5) y (E.6) se muestran en las figuras 3.37(a) y (b), respectivamente.

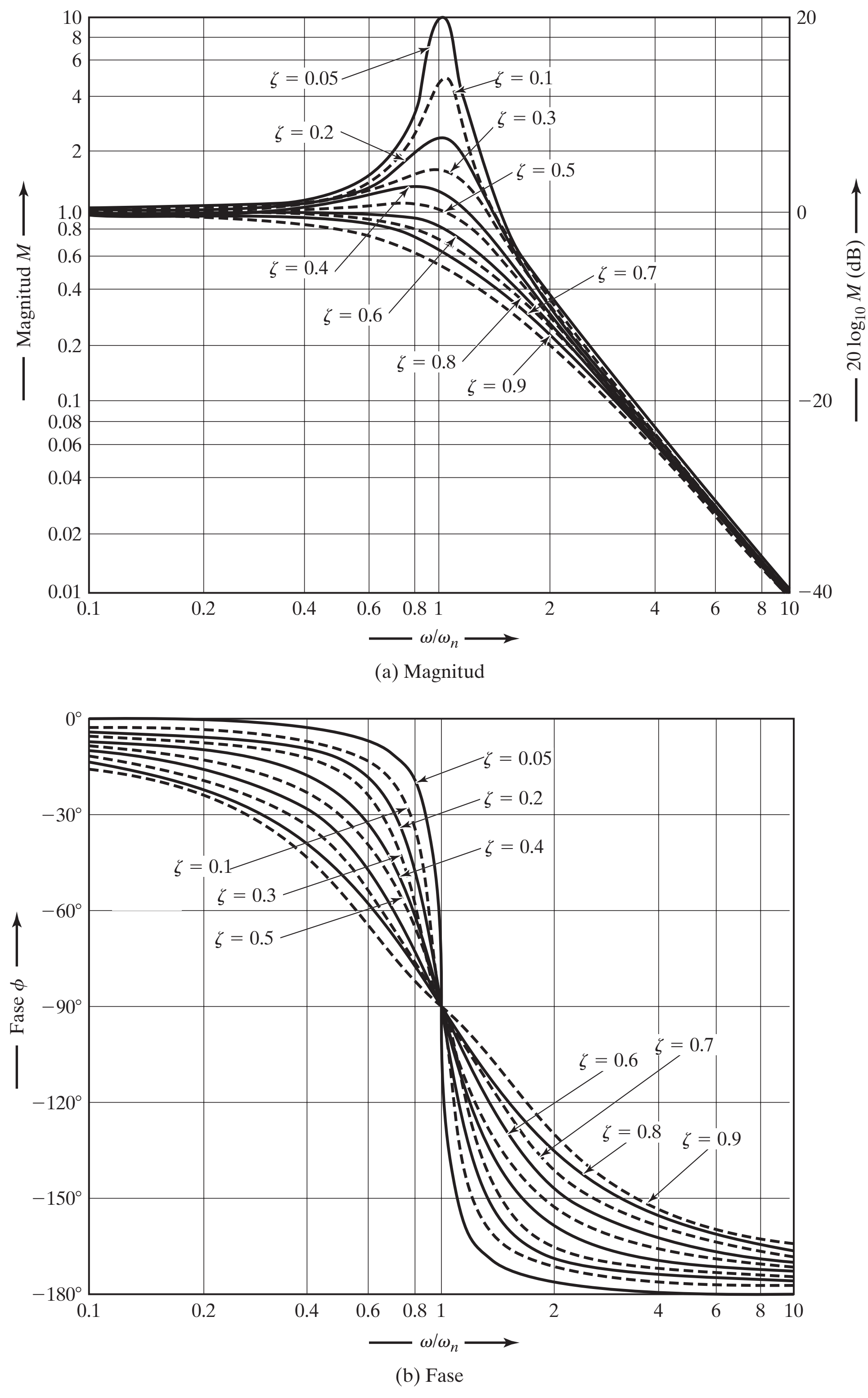


Figura 3.37 Diagramas de Bode.

■

3.15 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 3.19 Respuesta total de un sistema no amortiguado

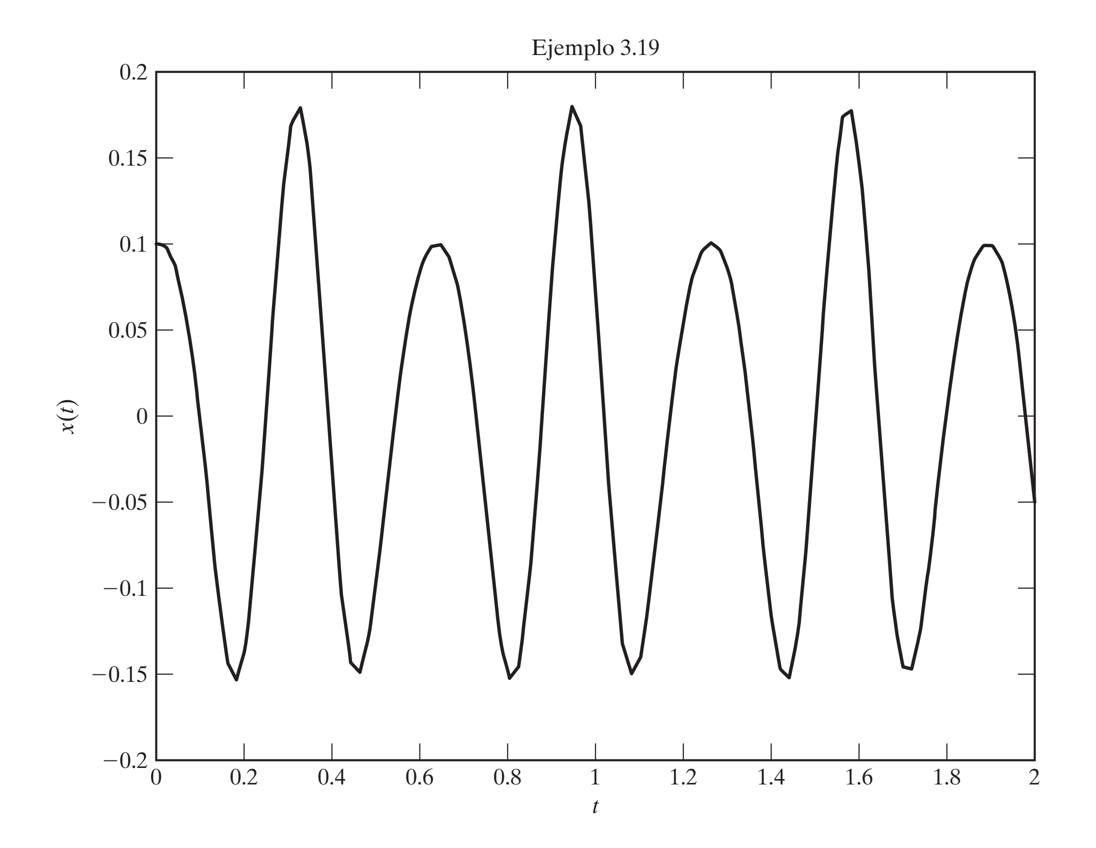
Utilizando MATLAB, trace la respuesta de un sistema de resorte-masa sometido a una fuerza armónica para los siguientes datos:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad k = 2000 \text{ N/m}, \quad F(t) = 100 \cos 30t\, N, \quad x_0 = 0.1 \text{ m}, \quad \dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$$

Solución: La ecuación (3.9) da la respuesta del sistema, la cual se puede volver a escribir como

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad \text{(E.1)}$$

donde $f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{100}{5} = 20$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20$ rad/s, y $\omega = 30$ rad/s.



La ecuación (E.1) se traza utilizando el siguiente programa MATLAB:

```
% Ex3_19.m
F0 = 100;
wn = 20;
m = 5;
w = 30;
x0 = 0.1;
x0_dot = 0.1;
f_0 = F0/m;
for i = 1: 101
    t(i) = 2 * (i-1)/100;
    x(i) = x0_dot*sin(wn*t(i))/wn + (x0 - f_0/(wn&and;2-w&and;2))*cos
        (wn*t(i)).. + f_0/ (wn^2-w^2)*cos(w*t(i));
end
plot (t, x);
xlabel ('t');
ylabel ('x(t)');
title ('Ex3.11')
```

■

Ejemplo 3.20 Respuesta forzada de un sistema con amortiguamiento de Coulomb

Utilizando MATLAB, trace la respuesta forzada de un sistema de resorte-masa con amortiguamiento de Coulomb para los siguientes datos: $m = 5$ kg, $k = 2000$ N/m, $\mu = 0.5$, $F(t) = 100$ sen $30t$ N, $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0.1$ m/s.

Solución: La ecuación de movimiento del sistema se expresa como

$$m\ddot{x} + kx + \mu mg\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{E.1}$$

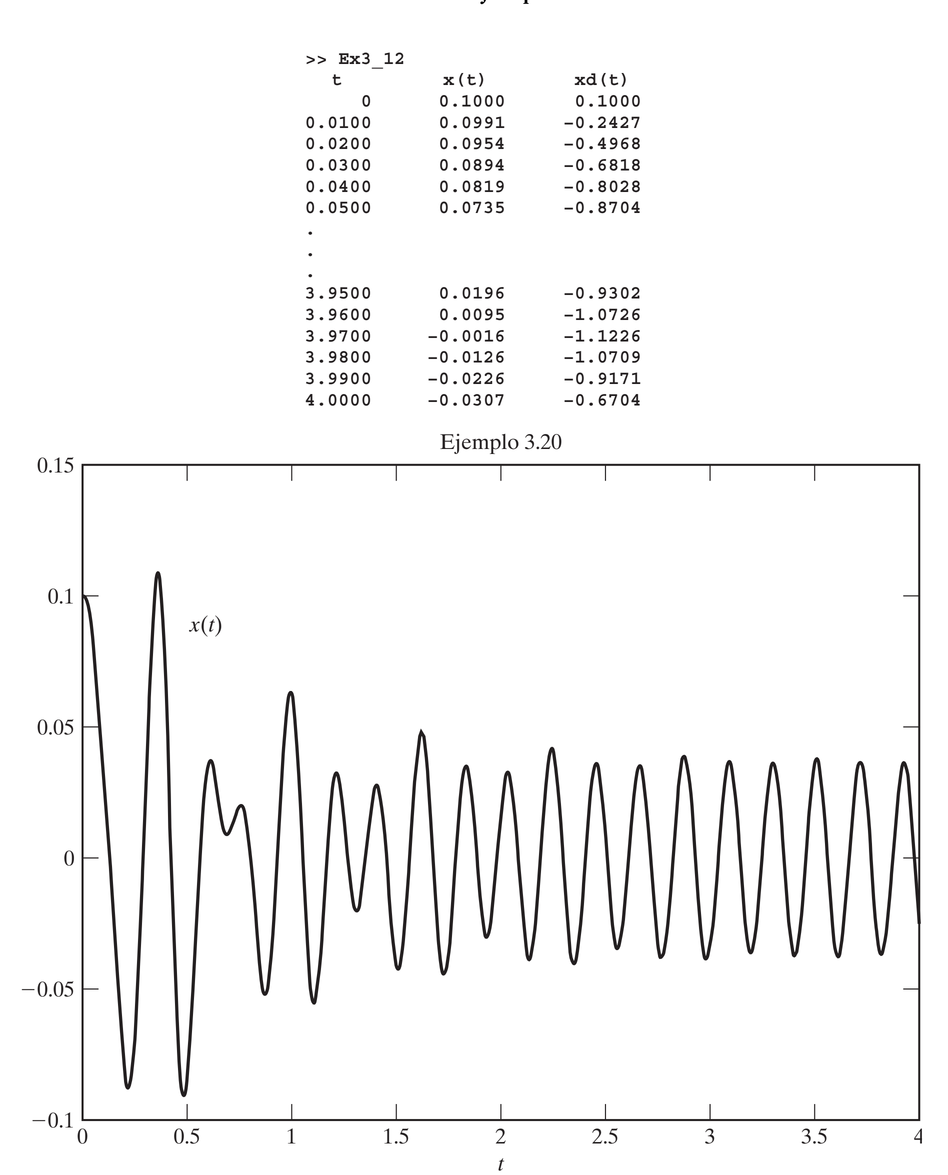
la cual se puede volver a escribir como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden (utilizando $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t - \frac{k}{m} x_1 - \mu g\,\mathrm{sgn}(x_2) \end{aligned} \tag{E.2}$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 0.1$. A continuación se da la solución de la ecuación (E.2), obtenida con MATLAB utilizando **ode23**.

```
% Ex3_20.m
% Este programa utilizará la función dfunc3_20.m, deben
% estar en la misma carpeta
tspan  =  [0: 0.01: 4];
x0  =  [0.1; 0.1];
[t, x]  =  ode23 ('dfunc3_12', tspan, x0);
disp ('        t          x(t)      xd(t)');
disp ([t x]);
plot (t, x(:, 1));
xlabel ('t');
gtext ('x(t)');
title ('Ex3.12');

% dfunc3_12.m
function f = dfunc3_12 (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = 100*sin(30*t)/5 - 9.81*0.5*sign(x(2)) - (2000/5)*x(1);
```

```
>> Ex3_12
   t         x(t)        xd(t)
      0      0.1000      0.1000
0.0100      0.0991     -0.2427
0.0200      0.0954     -0.4968
0.0300      0.0894     -0.6818
0.0400      0.0819     -0.8028
0.0500      0.0735     -0.8704
.
.
.
3.9500      0.0196     -0.9302
3.9600      0.0095     -1.0726
3.9700     -0.0016     -1.1226
3.9800     -0.0126     -1.0709
3.9900     -0.0226     -0.9171
4.0000     -0.0307     -0.6704
```



■

Ejemplo 3.21 Respuesta de un sistema sometido a excitación de base

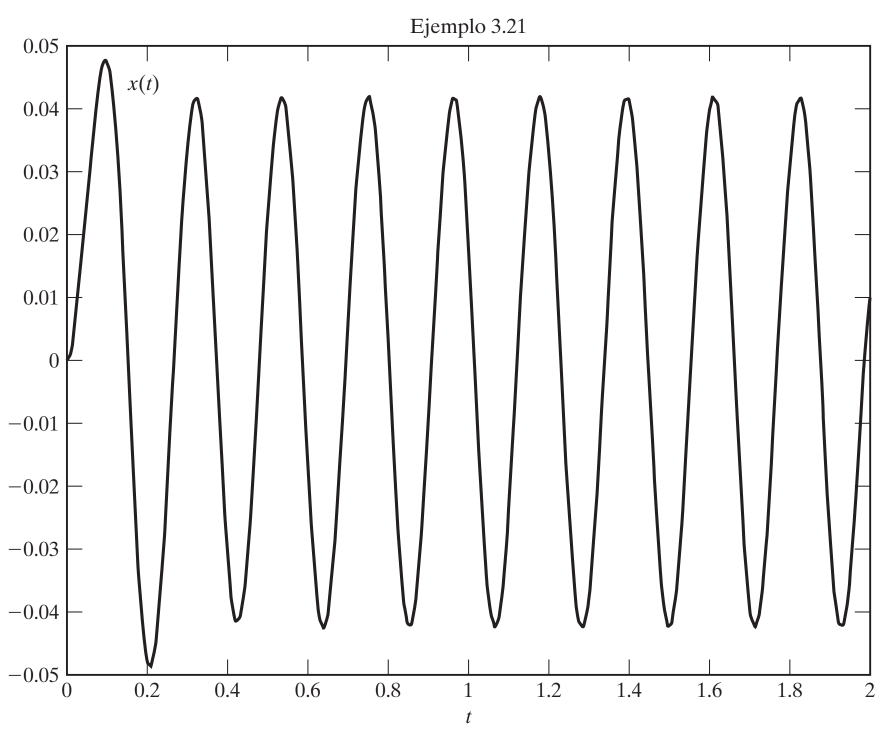
Utilizando MATLAB, encuentre y trace la respuesta de un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado sometido a la excitación de base $y(t) = Y$ sen ωt con los siguientes datos: $m = 1\,200$ kg, $k = 4 \times 10^5$ N/m, $\zeta = 0.5$, $Y = 0.05$ m, $\omega = 29.0887$ rad/s, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0.1$ m/s.

Solución: La ecuación de movimiento, ecuación (3.64):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \tag{E.1}$$

se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (utilizando $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$) como

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}y + \frac{c}{m}\dot{y} \tag{E.2}$$



con $c = \zeta c_c = 2\zeta\sqrt{km} = 2(0.5)\sqrt{(4 \times 10^5)(1200)}$, $y = 0.5 \operatorname{sen} 29.0887t$, y $\dot{y} = (29.0887)(0.05) \cos 29.0887t$. A continuación se da la solución de la ecuación (E.2) obtenida utilizando **`ode23`**.

```
% Ex3_21.m
% Este programa utilizará la función dfunc3_21.m, deben aparecer
% en la misma carpeta
tspan = [0: 0.01: 2];
x0 = [0; 0.1];
[t, x] = ode23 ('dfunc3_13', tspan, x0);
disp ('      t           x(t)     xd(t)');
disp ([t x]);
plot (t, x (:, 1));
xlabel ('t');
gtext ('x(t)');
title ('Ex3.13');

% dfunc3_20.m
function f = dfunc3_20 (t, x)
f = zeros (2, 1);
f(1) = x(2);
f(2) = 400000*0.05*sin(29.0887*t)/1200 + ...
    sqrt (400000*1200)*29.0887*0.05*cos(29.0887*t)/1200 ...
    - sqrt(400000*1200)*x(2)/1200 - (400000/1200)*x(1);

>> Ex3_13
   t            x(t)         xd(t)
     0             0        0.1000
0.0100        0.0022        0.3422
0.0200        0.0067        0.5553
0.0300        0.0131        0.7138
0.0400        0.0208        0.7984
0.0500        0.0288        0.7976
.
.
.
1.9500       -0.0388        0.4997
1.9600       -0.0322        0.8026
1.9700       -0.0230        1.0380
1.9800       -0.0118        1.1862
1.9900        0.0004        1.2348
2.0000        0.0126        1.1796
```

■

Ejemplo 3.22 Respuesta de estado estable de un sistema viscosamente amortiguado

Desarrolle un programa MATLAB de uso general, llamado **Program3.m** para encontrar la respuesta de estado estable de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado sometido a la fuerza armónica $F_0 \cos \omega t$ o F_0 sen ωt. Use el programa para hallar y graficar la respuesta de un sistema con los siguientes datos:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad c = 20 \text{ N-s/m}, \quad k = 500 \text{ N/m}, \quad F_0 = 250 \text{ N}, \quad \omega = 40 \text{ rad/s}, \quad n = 40, \quad ic = 0$$

Solución: Se desarrolla **Program3.m** para que acepte los siguientes datos de entrada:

xm = masa

xc = constante de amortiguamiento

xk = constante de resorte

f_0 = amplitud de la función forzada

om = frecuencia forzada

n = cantidad de pasos en un ciclo en el cual se va a calcular la respuesta

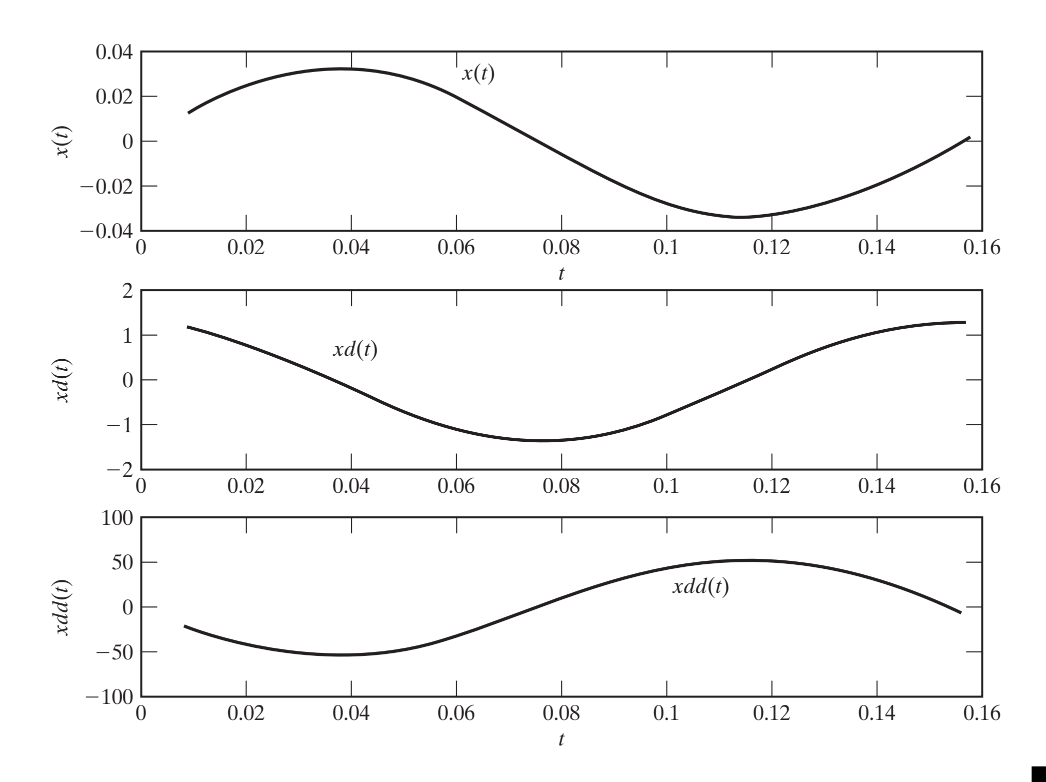
ic = 1 para función forzada tipo coseno; 0 para función forzada tipo seno

El programa da los siguientes resultados:

cantidad de pasos $i, x(i), \dot{x}(i), \ddot{x}(i)$

El programa también traza las variaciones de x, $\dot{x}$, y $\ddot{x}$ con el tiempo.

```
>> program3
Respuesta de estado estable de un sistema de un solo grado
de libertad no amortiguado sometido a una fuerza armónica

Datos dados
xm  =  5.00000000e+000
xc  =  2.00000000e+001
xk  =  5.00000000e+002
f0  =  2.50000000e+002
om  =  4.00000000e+001
ic  =  0
n   =  20

Respuesta:
 i          x(i)              xd(i)              xdd(i)

 1     1.35282024e-002    1.21035472e+000   -2.16451238e+001
 2     2.22166075e-002    9.83897315e-001   -3.55465721e+001
 3     2.87302863e-002    6.61128738e-001   -4.59684581e+001
 4     3.24316314e-002    2.73643972e-001   -5.18906102e+001
 5     3.29583277e-002   -1.40627096e-001   -5.27333244e+001
 6     3.02588184e-002   -5.41132540e-001   -4.84141094e+001
 7     2.45973513e-002   -8.88667916e-001   -3.93557620e+001
 8     1.65281129e-002   -1.14921388e+000   -2.64449806e+001
 9     6.84098018e-003   -1.29726626e+000   -1.09455683e+001
10    -3.51579846e-003   -1.31833259e+000    5.62527754e+000
11    -1.35284247e-002   -1.21035075e+000    2.16454794e+001
12    -2.22167882e-002   -9.83890787e-001    3.55468612e+001
13    -2.87304077e-002   -6.61120295e-001    4.59686523e+001
14    -3.24316817e-002   -2.73634442e-001    5.18906907e+001
15    -3.29583019e-002    1.40636781e-001    5.27332831e+001
16    -3.02587190e-002    5.41141432e-001    4.84139504e+001
17    -2.45971881e-002    8.88675144e-001    3.93555009e+001
18    -1.65279018e-002    1.14921874e+000    2.64446429e+001
19    -6.84074192e-003    1.29726827e+000    1.09451871e+001
20     3.51604059e-003    1.31833156e+000   -5.62566494e+000
```



■

Resumen del capítulo

Consideramos las respuestas de vibración forzada de sistemas no amortiguados y viscosamente amortiguados bajo excitaciones armónicas. Las excitaciones armónicas lo son en la forma de fuerza aplicada a la masa, movimiento de la base y fuerza ejercida en la masa del sistema por una masa desbalanceada rotatoria. También analizamos los aspectos de resonancia, batidos, relación de amplificación o amplitud, ángulo de fase, vibración transitoria y vibración de estado estable. Finalmente, estudiamos la aplicación del método de función de transferencia, las transformadas de Laplace y la función de transferencia de frecuencia para determinar la respuesta de sistemas armónicamente excitados.

Ahora que ya ha terminado este capítulo, deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se dan a continuación.

Referencias

3.1 G. B. Thomas y R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry* (6a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

3.2 J. W. Nilsson, *Electric Circuits,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.

3.3 J. P. Den Hartog, "Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction", *Journal of Applied Mechanics* (*Transactions of ASME*), Vol. 53, 1931, págs. APM 107-115.

3.4 R. D. Blevins, *Flow-Induced Vibration* (2a. ed.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1990.

3.5 J. C. R. Hunt y D. J. W. Richards, "Overhead line oscillations and the effect of aerodynamic dampers", *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers,* Londres, Vol. 116, 1969, págs. 1869-1874.

3.6 K. P. Singh y A. I. Soler, *Mechanical Design of Heat Exchangers and Pressure Vessel Components,* Arcturus Publishers, Cherry Hill, NJ, 1984.

3.7 N. O. Myklestad, "The concept of complex damping", *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 19, 1952, págs. 284-286.

3.8 R. Plunkett (ed.), *Mechanical Impedance Methods for Mechanical Vibrations*, American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1958.

3.9 A. D. Dimarogonas, *Vibration Engineering*, West Publishing, St. Paul, MN, 1976.

3.10 B. Westermo y E. Udwadia, "Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, Núm. 1, 1983, págs. 135-146.

3.11 M. S. Hundal, "Response of a base excited system with Coulomb viscous friction", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 64, 1979, págs. 371-378.

3.12 J. P. Bandstra, "Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems", *Journal of Vibration, Acoustics*, *Stress*, *and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, págs. 382-392.

3.13 W. G. Green, *Theory of Machines* (2a. ed.), Blackie & Son, Londres, 1962.

3.14 S. A. Tobias, *Machine-Tool Vibration*, Wiley, Nueva York, 1965.

3.15 R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 1992.

3.16 N. S. Currey, *Aircraft Landing Gear Design: Principles and Practice*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.

3.17 K. Ogata, *System Dynamics*, (4a. ed.), Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

3.18 C. M. Close, D. K. Frederick y J. C. Newell, *Modelling and Analysis of Dynamic Systems,* (3a. ed.), Wiley, Nueva York, 2002.

Preguntas de repaso

3.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. ¿Cómo se relacionan la amplitud, frecuencia y fase de una vibración de estado estable con las de la fuerza armónica aplicada para un sistema no amortiguado?
2. Explique por qué una fuerza constante que actúa en la masa vibratoria no tiene ningún efecto en la vibración de estado estable.
3. Defina el término *factor de amplificación*. ¿Cómo se relaciona el factor de amplificación con la relación de frecuencia?
4. ¿Cuál será la frecuencia de la fuerza aplicada con respecto a la frecuencia natural del sistema si el factor de amplificación es menor que la unidad?
5. ¿Cuáles son la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado vecino a la resonancia?
6. ¿Es el ángulo de fase correspondiente a la amplitud pico de un sistema viscosamente amortiguado siempre mayor que 90°?
7. ¿Por qué en la mayoría de los casos el amortiguamiento se considera sólo vecino de la resonancia?
8. Muestre los diversos términos en la ecuación de movimiento forzado de un sistema viscosamente amortiguado en un diagrama vectorial.
9. ¿Qué le sucede a la respuesta de un sistema no amortiguado en resonancia?
10. Defina los siguientes términos: *batido*, *factor de calidad*, *transmisibilidad*, *rigidez compleja*, *amortiguamiento cuadrático*.
11. Dé una explicación física de por qué el factor de amplificación es casi igual a 1 para valores pequeños de r y es pequeño para valores grandes de r.

12. ¿Se reducirá la fuerza transmitida a la base de una máquina montada sobre resortes con la adición de amortiguamiento?
13. ¿Cómo cambia la fuerza transmitida a la base a medida que se incrementa la velocidad de la máquina?
14. Si un vehículo vibra fuertemente mientras se desplaza por un camino lleno de baches, ¿mejorará la condición un cambio de velocidad?
15. ¿Es posible encontrar la amplitud máxima de una vibración forzada amortiguada con cualquier valor de r igualando la energía disipada por el amortiguamiento al trabajo realizado por la fuerza externa?
16. ¿Qué suposiciones se hacen sobre el movimiento de una vibración forzada con amortiguamiento no viscoso al hallar la amplitud?
17. ¿Es posible encontrar el valor aproximado de la amplitud de una vibración forzada amortiguada sin considerar el amortiguamiento para nada? De ser así, ¿en qué circunstancias?
18. ¿Es efectiva la fricción seca para limitar la amplitud resonante?
19. ¿Cómo encuentra la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado en situación de desbalance rotatorio?
20. ¿Cuál es la frecuencia de la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado cuando la fuerza externa es F_0 sen ωt? ¿Es armónica esta respuesta?
21. ¿Cuál es la diferencia entre la amplitud pico y la amplitud resonante?
22. ¿Por qué se utiliza el amortiguamiento viscoso en la mayoría de los casos en lugar de otros tipos de amortiguamiento?
23. ¿Qué es vibración autoexcitada?
24. ¿Cómo se define la función de transferencia?
25. ¿Cómo podemos generar la función de transferencia de frecuencia a partir de la función de transferencia general?
26. ¿Qué es un diagrama de Bode?
27. ¿Cómo se define *decibel*?

3.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. El factor de amplificación es la relación de amplitud máxima y deflexión estática.
2. La respuesta será armónica si la excitación es armónica.
3. El ángulo de fase de la respuesta depende de los parámetros del sistema, m, c, k y ω.
4. El ángulo de fase de la respuesta depende de la amplitud de la función forzada.
5. Durante el batido, la amplitud de la respuesta se incrementa y luego se reduce en un patrón regular.
6. Se puede utilizar el factor Q para estimar el amortiguamiento en un sistema.
7. Los puntos de media potencia indican los valores de relación de frecuencia donde el factor de amplificación se reduce a $Q/\sqrt{2}$, donde Q es el factor Q.
8. La relación de amplitud alcanza su valor máximo en resonancia en el caso de amortiguamiento viscoso.
9. La respuesta siempre está en fase con la función forzada armónica en el caso de amortiguamiento de histéresis.
10. El amortiguamiento reduce la amplitud con todos los valores de la frecuencia forzada.
11. El desbalance en una máquina rotatoria ocasiona vibración.
12. Se puede suponer que la solución de estado estable sea armónica para valores pequeños de fuerza de fricción seca.
13. En un sistema con desbalance rotatorio, el efecto de amortiguamiento se vuelve insignificantemente pequeño a altas velocidades.
14. La función de transferencia es una propiedad del sistema y no se relaciona con la entrada.

15. Las funciones de transferencia de varios sistemas diferentes pueden ser las mismas.

16. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se puede encontrar para todos los tipos de entrada.

3.3 Escriba en los siguientes espacios en blanco la palabra correcta:

1. La excitación puede ser ________, periódica, no periódica o de naturaleza aleatoria.

2. La respuesta de un sistema a una excitación armónica se llama respuesta ________.

3. La respuesta de un sistema a una excitación no periódica repentinamente aplicada se llama respuesta ________.

4. Cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, la condición se conoce como ________.

5. El factor de amplificación también se conoce como factor de ________.

6. El fenómeno de ________ puede ocurrir cuando la frecuencia forzada se aproxima a la frecuencia natural del sistema.

7. Cuando la base de un sistema se somete a movimiento armónico con amplitud Y y se produce una amplitud de respuesta X, la relación $\frac{X}{Y}$ se llama ________ de desplazamiento.

8. $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k$ se llama la ________ mecánica del sistema.

9. La diferencia entre las frecuencias asociadas con los puntos de media potencia se conoce como la ________ del sistema.

10. El valor de la relación de amplitud en resonancia se conoce como factor de ________.

11. El amortiguamiento de fricción seca también se conoce como amortiguamiento de ________.

12. Para ________ valores de amortiguamiento de fricción seca, el movimiento de la masa será discontinuo.

13. La cantidad $k(1 + i\beta)$ en el amortiguamiento de histéresis se llama rigidez ________.

14. El amortiguamiento cuadrático o de velocidad al cuadrado está presente siempre que un cuerpo de mueve en un flujo de fluido _____.

15. En sistemas autoexcitados, el _______ mismo produce la fuerza de excitación.

16. La trepidación de las aspas de una turbina es un ejemplo de vibración ________.

17. El movimiento _________ y el sistema se vuelven inestables durante la autoexcitación.

18. El método de la función de transferencia está basado en la transformada de ________.

19. ________ identifica la entrada, el sistema y la salida con claridad.

20. La transformada de Laplace de $f(t)$ se indica como _______.

21. La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial lineal en una expresión _________.

3.4 Seleccione la respuesta correcta de entre las opciones dadas:

1. La respuesta de un sistema no amortiguado en resonancia será
a. muy grande **b.** infinita **c.** cero

2. La reducción de la relación de amplitud en presencia de amortiguamiento es muy significativa
a. casi $\omega = \omega_n$ **b.** casi $\omega = 0$ **c.** casi $\omega = \infty$

3. La frecuencia de batido es
a. $\omega_n - \omega$ **b.** ω_n **c.** ω

4. La energía disipada en un ciclo por amortiguamiento de fricción seca está dada por
a. $4\mu NX$ **b.** $4\mu N$ **c.** $4\mu NX^2$

5. La respuesta de frecuencia compleja, $H(i\omega)$, se define como
a. $\frac{kX}{F_0}$ **b.** $\frac{X}{F_0}$ **c.** $\left|\frac{kX}{F_0}\right|$

6. La energía disipada en la siguiente duración se considera para hallar la constante de amortiguamiento viscoso equivalente de un sistema con amortiguamiento de Coulomb:

a. un medio ciclo **b.** un ciclo completo **c.** un segundo

7. La fuerza de amortiguamiento depende de la frecuencia de la fuerza aplicada en el caso de

a. amortiguamiento viscoso **b.** amortiguamiento de Coulomb
c. amortiguamiento de histéresis

8. El sistema regido por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ es dinámicamente estable si

a. k es positiva **b.** c y k son positivas **c.** c es positiva

9. La rigidez compleja o amortiguamiento complejo se define en el caso de

a. amortiguamiento de histéresis **b.** amortiguamiento de Coulomb
c. amortiguamiento viscoso

10. La ecuación de movimiento de una máquina (que gira a una frecuencia ω) de masa M, con una masa desbalanceada m, en el radio e, está dada por

a. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \text{ sen } \omega t$ **b.** $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \text{ sen } \omega t$
c. $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Me\omega^2 \text{ sen } \omega t$

11. La transmisibilidad de fuerza de un sistema, sometido a excitación de base (con amplitud Y) que produce una fuerza transmitida F_T se define como

a. $\dfrac{F_T}{kY}$ **b.** $\dfrac{X}{kY}$ **c.** $\dfrac{F_T}{k}$

3.5 Utilizando la notación:

r = relación de frecuencia $= \dfrac{\omega}{\omega_n}$
ω = frecuencia forzada
ω_n = frecuencia natural
ζ = relación de amortiguamiento
ω_1, ω_2 = frecuencias correspondientes a puntos de mediana potencia

correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. Factor de amplificación de un sistema no amortiguado — **a.** $\dfrac{2\pi}{\omega_n - \omega}$

2. Periodo de batido — **b.** $\left[\dfrac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$

3. Factor de amplificación de un sistema amortiguado — **c.** $\dfrac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}$

4. Frecuencia amortiguada — **d.** $\dfrac{1}{1 - r^2}$

5. Factor de calidad — **e.** $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

6. Transmisibilidad de desplazamiento — **f.** $\left[\dfrac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$

3.6 Correlacione las siguientes ecuaciones de movimiento:

1. $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$

2. $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$

3. $m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t)$

4. $m\ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 \operatorname{sen}\omega t$

5. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t$

a. Sistema con amortiguamiento de Coulomb

b. Sistema con amortiguamiento viscoso

c. Sistema sometido a excitación de base

d. Sistema con amortiguamiento de histéresis

e. Sistema con desbalance rotatorio

Problemas

Sección 3.3 Respuesta de un sistema no amortiguado sometido a fuerza armónica

3.1 Se cuelga un peso de 50 N de un resorte de 4000 N/m de rigidez y se somete a una fuerza armónica de 60 N de amplitud y 6 Hz de frecuencia. Encuentre (a) la extensión del resorte debido al peso suspendido; (b) el desplazamiento estático del resorte debido a la fuerza máxima aplicada, y (c) la amplitud del movimiento forzado del peso.

3.2 Un sistema de resorte-masa se somete a una fuerza armónica cuya frecuencia se acerca a la frecuencia natural del sistema. Si la frecuencia forzada es de 39.8 Hz y la frecuencia natural es de 40.0 Hz, determine el periodo de batido.

3.3 Considere un sistema de resorte-masa, con $k = 4000$ N/m y $m = 10$ kg, sujeto a una fuerza armónica $F(t) = 400 \cos 10t$ N. Encuentre y trace la respuesta total del sistema en las siguientes condiciones iniciales:

a. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0$
b. $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s
c. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s

3.4 Considere un sistema de resorte-masa, con $k = 4000$ N/m y $m = 10$ kg, sujeto a una fuerza armónica $F(t) = 400 \cos 20t$ N. Encuentre y trace la respuesta total del sistema en las siguientes condiciones iniciales:

a. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0$
b. $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s
c. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s

3.5 Considere un sistema de resorte-masa, con $k = 4000$ N/m y $m = 10$ kg, sujeto a una fuerza armónica $F(t) = 400 \cos 20.1t$ N. Encuentre y trace la respuesta total del sistema en las siguientes condiciones iniciales:

a. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0$
b. $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s
c. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s

3.6 Considere un sistema de resorte-masa, con $k = 4000$ N/m y $m = 10$ kg, sujeto a una fuerza armónica $F(t) = 400 \cos 30t$ N. Determine y trace la respuesta total del sistema en las siguientes condiciones iniciales:

a. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0$
b. $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s
c. $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s

3.7 Un sistema de resorte-masa se compone de una masa que pesa 100 N y un resorte con una rigidez de 2000 N/m. La masa se somete a resonancia por la acción de una fuerza armónica $F(t) = 25 \cos \omega t$ N. Encuentre la amplitud del movimiento forzado al final de (a) $\frac{1}{4}$ ciclo; (b) $2\frac{1}{2}$ ciclos, y (c) $5\frac{3}{4}$ ciclos.

3.8 Se cuelga una masa m de un resorte de 4000 N/m de rigidez y se somete a una fuerza armónica de 100 N de amplitud y frecuencia de 5 Hz. Se observa que la amplitud del movimiento forzado es de 20 mm. Determine el valor de m.

3.9 Un sistema de resorte-masa con $m = 10$ kg y $k = 5000$ N/m se somete a una fuerza armónica de 250 N de amplitud y frecuencia ω. Si la amplitud máxima de la masa es de 100 mm, determine el valor de ω.

3.10 En la figura 3.1(a), se aplica una fuerza periódica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ en un punto del resorte ubicado a una distancia de 25 por ciento de su longitud con respecto al apoyo fijo. Suponiendo que $c = 0$, halle la respuesta de estado estable de la masa m.

3.11 Un sistema de resorte-masa, que descansa sobre un plano inclinado, se somete a una fuerza armónica como se muestra en la figura 3.38. Encuentre la respuesta del sistema suponiendo condiciones iniciales cero.

3.12 La frecuencia natural de vibración de una persona es de 5.2 Hz mientras se encuentra parada sobre una superficie horizontal. Suponiendo que el amortiguamiento sea insignificante, determine lo siguiente:

a. Si el peso de la persona es de 70 kg_f, determine la rigidez equivalente de su cuerpo en la dirección vertical.

b. Si el piso se somete a una vibración armónica vertical de 5.3 Hz de frecuencia y 0.1 m de amplitud debido a una máquina rotatoria desbalanceada que opera apoyada en el piso, determine el desplazamiento vertical de la persona.

3.13 Trace la respuesta de vibración forzada de un sistema de resorte-masa dada por la ecuación (3.13) con los siguientes conjuntos de datos:

a. Conjunto 1: $\delta_{est} = 0.1, \omega = 5, \omega_n = 6, x_0 = 0.1, \quad \dot{x}_0 = 0.5$
b. Conjunto 2: $\delta_{est} = 0.1, \omega = 6.1, \omega_n = 6, x_0 = 0.1, \quad \dot{x}_0 = 0.5$
c. Conjunto 3: $\delta_{est} = 0.1, \omega = 5.9, \omega_n = 6, x_0 = 0.1, \quad \dot{x}_0 = 0.5$

3.14 Se pone a vibrar un sistema de resorte-masa desde condiciones iniciales cero bajo una fuerza armónica. Se encuentra que la respuesta presenta el fenómeno de batidos con el periodo de batidos igual a 0.5 s y el

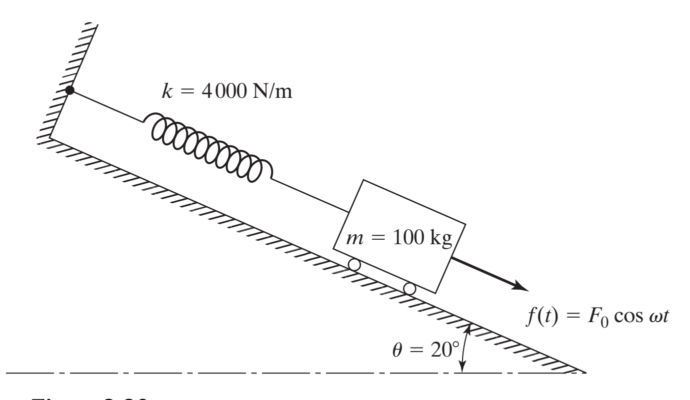


Figura 3.38

periodo de oscilación igual a 0.05 s. Encuentre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de la fuerza armónica.

3.15 Un sistema de resorte-masa con $m = 100$ kg y $k = 400$ N/m, se somete a una fuerza armónica $f(t) = F_0 \cos \omega t$ con $F_0 = 10$ N. Encuentre la respuesta del sistema cuando ω es igual a (a) 2 rad/s; (b) 0.2 rad/s, y (c) 20 rad/s. Analice los resultados.

3.16 Un motor de avión tiene una masa desbalanceada rotatoria m en el radio r. Si el ala se modela como una viga en voladizo de sección transversal uniforme $a \times b$, como se muestra en la figura 3.39(b), determine la deflexión máxima del motor a una velocidad de N rpm. Suponga que el amortiguamiento y el efecto del ala entre el motor y el extremo libre son insignificantes.

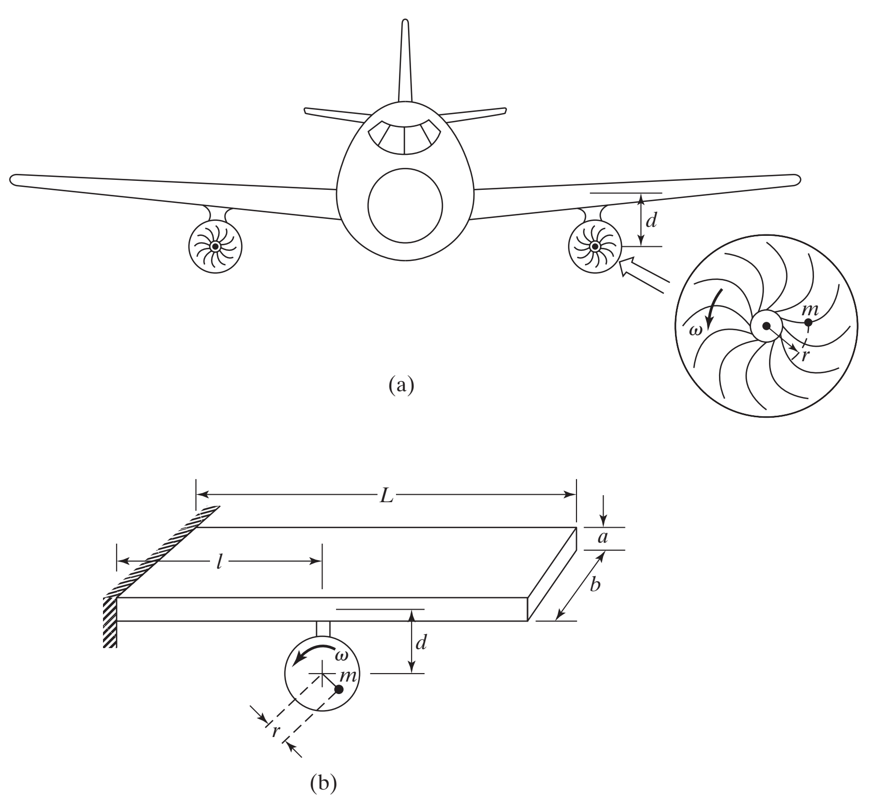


Figura 3.39

3.17 Una turbina de viento de tres aspas (figura 3.40(a)) tiene una pequeña masa desbalanceada m en un radio r en el plano de las aspas. Las aspas se encuentran a una distancia R del eje (y) vertical central y giran a una velocidad angular de ω. Si la armadura de soporte se modela como una flecha de acero hueca de 0.1 m de diámetro externo y 0.08 m de diámetro interno, determine el esfuerzo máximo desarrollado en la base del soporte (punto A). El momento de inercia de la masa del sistema de turbina con respecto al eje vertical (y) es J_0. Suponga $R = 0.5$ m, $m = 0.1$ kg, $r = 0.1$ m, $J_0 = 100$ kg-m^2, $h = 8$ m y $\omega = 31.416$ rad/s.

3.18 En la figura 3.41 se muestra una máquina de prueba de fatiga electromagnética en la cual se aplica una fuerza alterna a la muestra haciendo pasar una corriente alterna de frecuencia f a través de la armadura. Si el peso de la armadura es de 40 lb, la rigidez del resorte (k_1) es de 10,217.0296 lb/pulg y la rigidez de

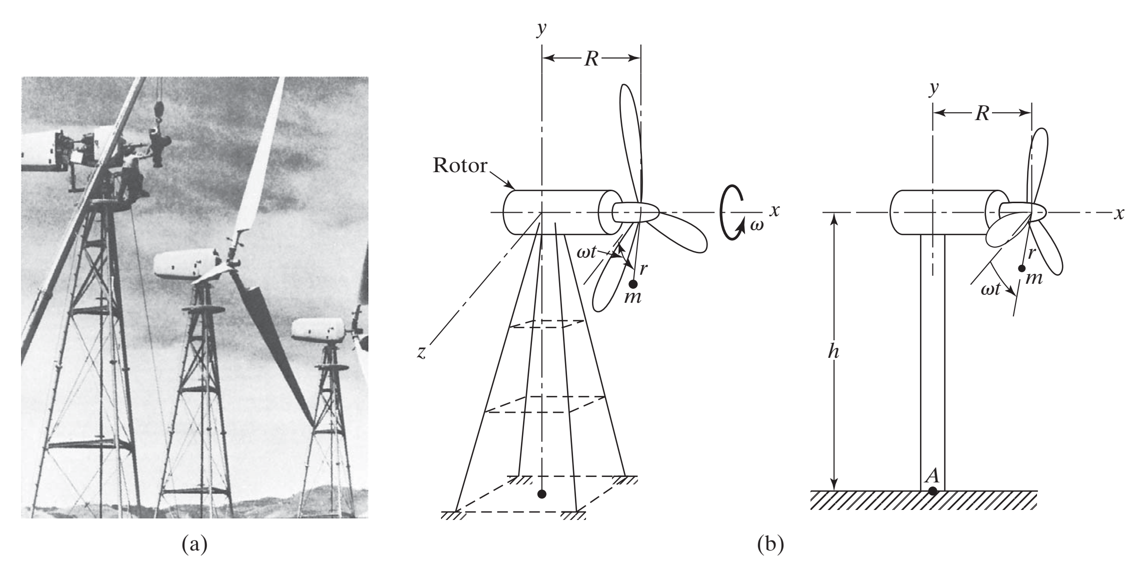


Figura 3.40 Turbina de viento de tres aspas. (Foto cortesía de *Power Transmission Design*).

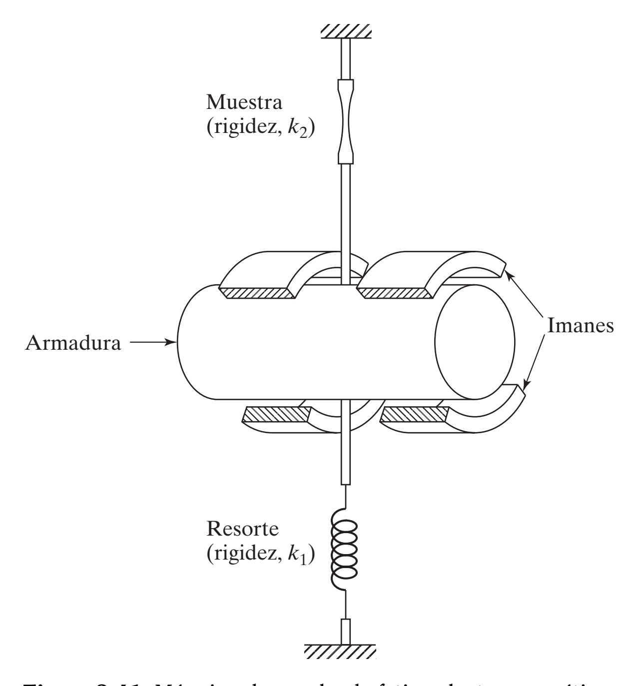


Figura 3.41 Máquina de prueba de fatiga electromagnética.

la muestra de acero es de 75×10^4 lb/pulg, determine la frecuencia de la corriente alterna que induce un esfuerzo en la muestra que es el doble de la cantidad generada por los imanes.

3.19 El actuador de resorte que se ve en la figura 3.42 opera utilizando la presión de aire suministrada por un controlador neumático (p) como entrada y proporciona un desplazamiento de salida a una válvula (x) proporcional a la presión del aire de entrada. El diafragma, hecho de caucho con base de tela, tiene un área A y se desvía bajo la presión del aire de entrada contra un resorte de rigidez k. Encuentre la

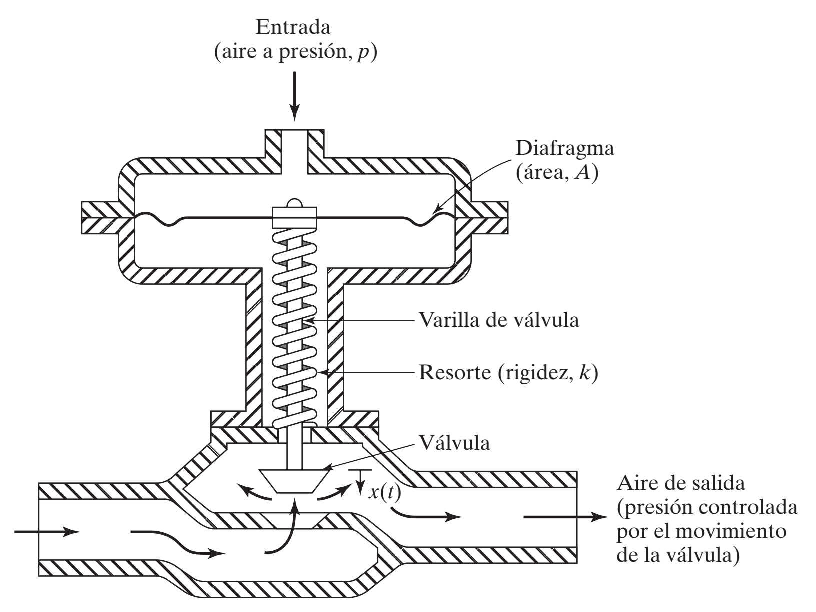


Figura 3.42 Actuador de resorte.

respuesta de la válvula bajo una presión del aire de entrada armónicamente fluctuante $p(t) = p_0$ sen ωt para los siguientes datos:

$p_0 = 10$ lb/pulg^2; $\omega = 8$ rad/s; $A = 100$ pulg^2; $k = 400$ lb/pulg; peso del resorte $= 15$ lb, y peso de la válvula y varilla de válvula $= 20$ lb.

3.20 En el sistema de leva y seguidor que se muestra en la figura 3.43, la rotación de la leva imparte un movimiento vertical al seguidor. La varilla de empuje, la cual actúa como un resorte, se comprime una

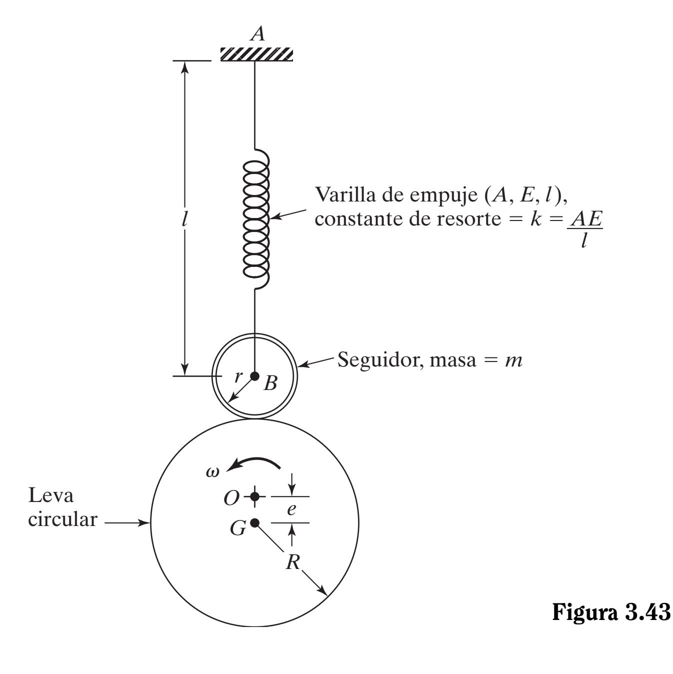


Figura 3.43

cantidad x_0 antes del ensamble. Determine lo siguiente: (a) la ecuación de movimiento del seguidor, incluida la fuerza de gravedad; (b) la fuerza ejercida en el seguidor por la leva y (c) las condiciones en las cuales el seguidor pierde contacto con la leva.

3.21* Diseñe una flecha de acero sólida soportada por cojinetes la cual lleva el rotor de una turbina a la mitad. El rotor pesa 500 lb y suministra una potencia de 200 hp a 3000 rpm. Para mantener el esfuerzo producido por el desbalance en el rotor a un valor mínimo, la velocidad crítica de la flecha tiene que ser de un quinto de la velocidad de operación del rotor. La longitud de la flecha tiene que ser igual al menos a 30 veces su diámetro.

3.22 Una flecha de acero hueca de 100 pulg de longitud, 4 pulg de diámetro externo y 3.5 pulg de diámetro interno, lleva el rotor de una turbina, que pesa 500 lb, a la mitad y está apoyada por sus extremos en cojinetes. La holgura entre el rotor y el estator es de 0.5 pulg. El rotor tiene un excentricidad equivalente a un peso de 0.5 lb en un radio de 2 pulg. Se instala un interruptor para detener el rotor siempre que éste toca el estator. Si el rotor opera en resonancia, ¿cuánto tiempo le tomará para activar el interruptor? Suponga que el desplazamiento y velocidad iniciales del rotor perpendiculares a la flecha son cero.

3.23 Una viga de acero en voladizo, que sostiene un peso de 0.1 lb en el extremo libre, se utiliza como medidor de frecuencia.[7] La viga tiene una longitud de 10 pulg, un ancho de 0.2 pulg y un espesor de 0.05 pulg. La fricción interna equivale a una relación de amortiguamiento de 0.01. Cuando el extremo fijo de la viga se somete a un desplazamiento armónico $y(t) = 0.05 \cos \omega t$, se observa que el desplazamiento máximo del extremo libre es de 2.5 pulg. Encuentre la frecuencia forzada.

3.24 Obtenga la ecuación de movimiento rotatorio y encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 3.44 en torno a la bisagra O para los siguientes datos: $k_1 = k_2 = 5\,000$ N/m, $a = 0.25$ m, $b = 0.5$ m, $l = 1$ m, $M = 50$ kg, $m = 10$ kg, $F_0 = 500$ N, $\omega = 1\,000$ rpm.

3.25 Obtenga la ecuación de movimiento y encuentre la solución de estado estable del sistema que se muestra en la figura 3.45 para movimiento rotatorio en torno a la bisagra O para los datos siguientes: $k = 5\,000$ N/m, $l = 1$ m, $m = 10$ kg, $M_0 = 100$ N-m, $\omega = 1\,000$ rpm.

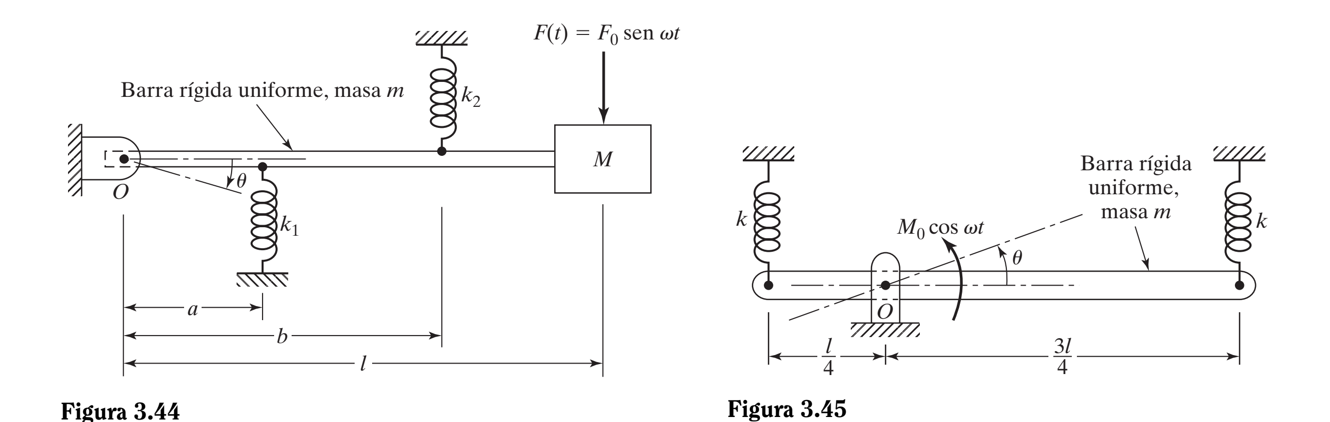


Figura 3.44

Figura 3.45

* El asterisco indica un problema de tipo diseño, o un problema sin respuesta única.
[7] El uso de vigas en voladizo como medidores de frecuencia se analiza en detalle en la sección 10.4 en el sitio web.

Sección 3.4 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a fuerza armónica

3.26 Considere un sistema de resorte-masa-amortiguador con $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg y $c = 40$ N-s/m. Determine las respuestas de estado estable y total del sistema sometido a la fuerza armónica $F(t) = 200 \cos 10t$ N y las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$ m y $\dot{x}_0 = 0$.

3.27 Considere un sistema de resorte-masa-amortiguador con $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg y $c = 40$ N-s/m. Determine las respuestas de estado estable y total del sistema sometido a la fuerza armónica $F(t) = 200 \cos 10t$ N y las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

3.28 Considere un sistema de resorte-masa-amortiguador con $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg y $c = 40$ N-s/m. Determine las respuestas de estado estable y total del sistema sometido a la fuerza armónica $F(t) = 200 \cos 20t$ N y las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$ m y $\dot{x}_0 = 0$.

3.29 Considere un sistema de resorte-masa-amortiguador con $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg y $c = 40$ N-s/m. Encuentre las respuestas de estado estable y total del sistema sometido a la fuerza armónica $F(t) = 200 \cos 20t$ N y las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

3.30 Un motor de automóvil de cuatro cilindros se tiene que montar sobre tres amortiguadores, como se indica en la figura 3.46. El ensamble de motor-bloque pesa 500 lb. Si la fuerza desbalanceada generada por el motor resulta de $200 \text{ sen } 100\,\pi t$, diseñe los tres amortiguadores (cada uno de rigidez k y constante de amortiguamiento viscoso c) de modo que la amplitud de vibración sea menor que 0.1 pulg.

3.31 La hélice de un barco, de 10^5 N de peso y momento de inercia de masa polar de 10000 kg-m^2, está conectada al motor mediante una flecha de acero escalonada hueca, como se muestra en la figura 3.47. Suponiendo que el agua proporciona una relación de amortiguamiento viscoso de 0.1, determine la res-

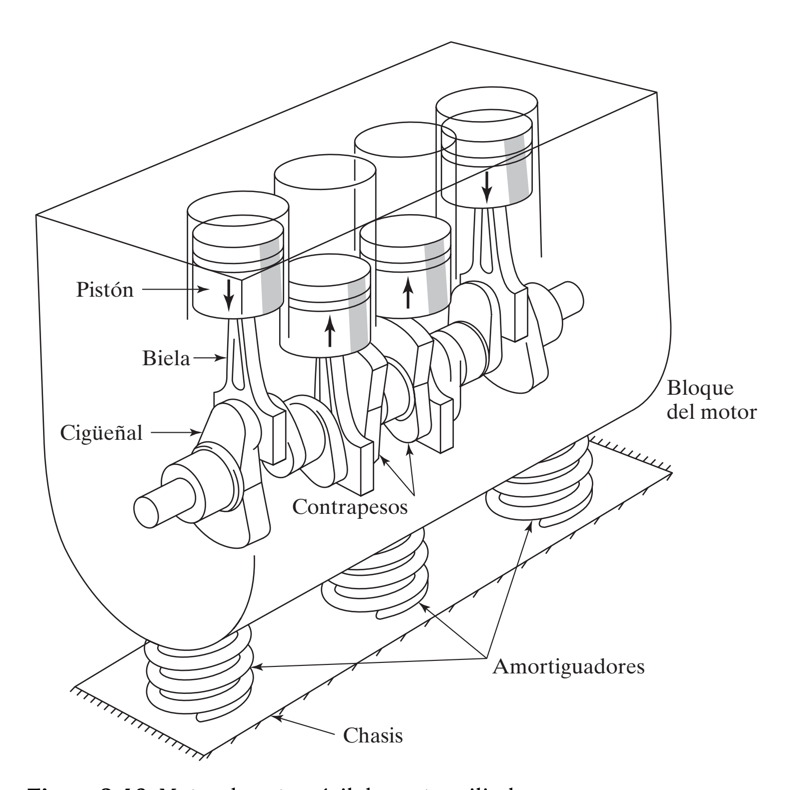


Figura 3.46 Motor de automóvil de cuatro cilindros.

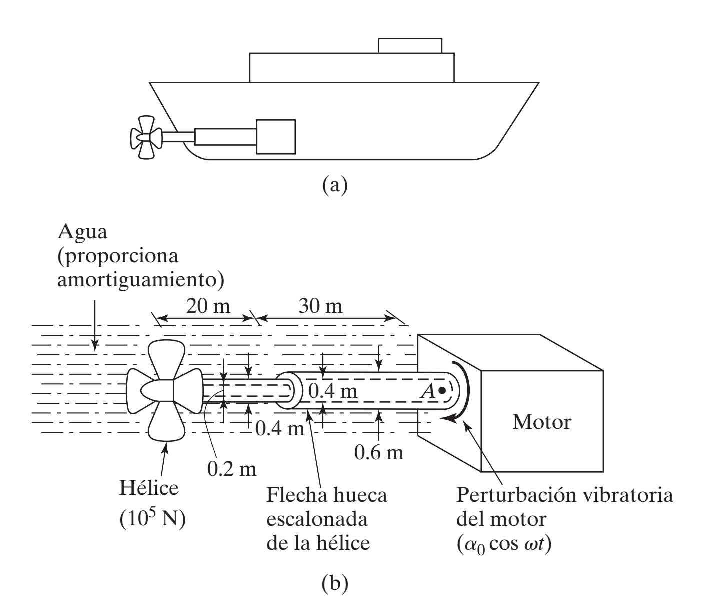


Figura 3.47 Hélice de un barco.

puesta de vibración torsional de la hélice cuando el motor induce un desplazamiento angular armónico de 0.05 sen 314.16*t* rad en la base (punto *A*) de la flecha de la hélice.

3.32 Encuentre la relación de frecuencia $r = \omega/\omega_n$, a la cual la amplitud de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad alcanza su valor máximo. Encuentre también el valor de la amplitud máxima.

3.33 La figura 3.48 muestra un amperímetro de bobina móvil de imán permanente. Cuando fluye corriente (*I*) a través de la bobina enrollada en el núcleo, éste gira en un ángulo proporcional a la magnitud de la corriente indicada por la aguja en la escala. El núcleo, junto con la bobina, tiene un momento de inercia

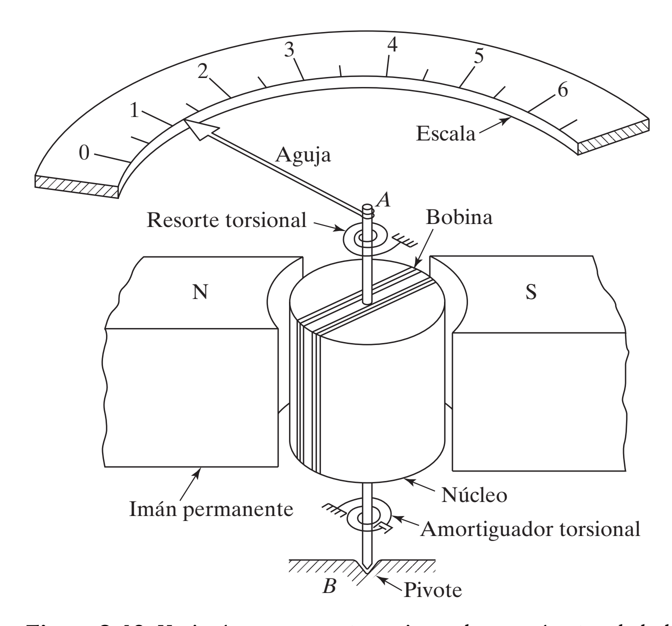


Figura 3.48 Un imán permanente acciona el amperímetro de bobina móvil.

de masa J_0, la constante de resorte torsional es k_t y el amortiguador torsional tiene una constante de amortiguamiento de c_t. La escala del amperímetro está calibrada de modo que cuando se hace que pase una corriente directa de 1 ampere a través de la bobina, la aguja indica una corriente de 1 ampere. El medidor se tiene que volver a calibrar para medir la magnitud de la corriente alterna. Determine el valor de estado estable de la corriente indicada por la aguja cuando se hace pasar una corriente alterna de 5 amperes y 50 Hz a través de la bobina. Suponga $J_0 = 0.001$ N-m^2, $k_t = 62.5$ N-m/rad y $c_t = 0.5$ N-m-s/rad.

3.34 Un sistema de resorte-masa-amortiguador se somete a una fuerza armónica. La amplitud es de 20 mm en resonancia y de 10 mm a una frecuencia 0.75 veces la frecuencia resonante. Encuentre la relación de amortiguamiento del sistema.

3.35 Para el sistema que se muestra en la figura 3.49, x y y indican, respectivamente, el desplazamiento absoluto de la masa m y el extremo Q del amortiguador hidráulico c_1. (a) Obtenga la ecuación de movimiento de la masa m, (b) el desplazamiento de estado estable de la masa m, y (c) encuentre la fuerza transmitida al soporte en P, cuando el extremo Q se somete al movimiento armónico $y(t) = Y \cos \omega t$.

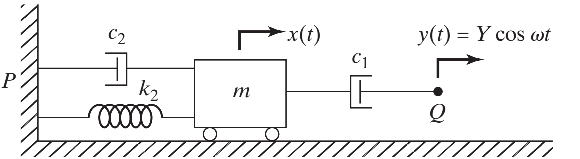


Figura 3.49

3.36 La ecuación de movimiento de un sistema de resorte-masa sometido a una fuerza armónica se expresa como

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 = f_0 \cos \omega t \tag{E.1}$$

donde $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, y $\zeta = c/(2m\omega_n)$.

i. Encuentre la respuesta de estado estable del sistema en la forma $x_s(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$

ii. Encuentre la respuesta total del sistema en la forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t + C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{E.2}$$

Suponga las condiciones iniciales del sistema como $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$.

3.37 Una cámara de video de 2.0 kg de masa está montada en la azotea de un banco para vigilancia. La cámara está fija en el extremo de una barra de aluminio tubular y el otro extremo está fijo en el edificio como se muestra en la figura 3.50. La fuerza inducida por el viento que actúa en la cámara, $f(t)$, es armónica con $f(t) = 25 \cos 75.3984t$ N. Determine las dimensiones de sección transversal del tubo de aluminio si la amplitud de vibración máxima de la cámara se tiene que limitar a 0.005 m.

3.38 Un rotor de turbina está montado en una flecha escalonada fija por los dos extremos como se muestra en la figura 3.51. La rigidez torsional de los dos segmentos de la flecha la dan $k_{t1} = 3\,000$ N-m/rad y $k_{t2} = 4\,000$ N-m rad. La turbina genera un par de torsión armónico que le da $M(t) = M_0 \cos \omega t$ respecto del eje de flecha con $M_0 = 200$ N-m y $\omega = 500$ rad/s. El momento de inercia de masa del rotor respecto del eje de flecha es $J_0 = 0.05$ kg-m^2. Suponiendo la constante de amortiguación torsional equivalente del sistema como $c_t = 2.5$ N-m-s/rad, determine la respuesta de estado estable del rotor, $\theta(t)$.

3.39 Se necesita el diseño de un sistema electromecánico para lograr una frecuencia natural de 1000 Hz y un factor Q de 1200. Determine el factor de amortiguamiento y el ancho de banda del sistema.

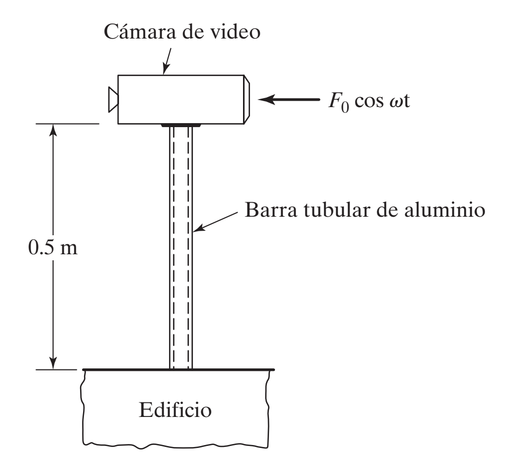


Figura 3.50

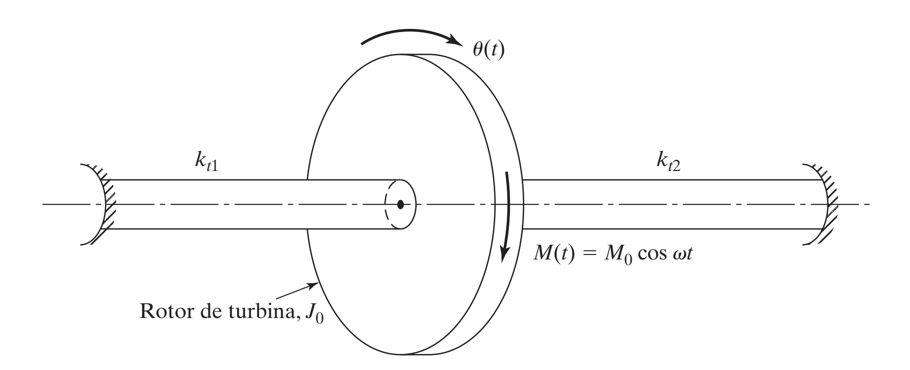


Figura 3.51

3.40 Demuestre que, para valores pequeños de amortiguamiento, la relación de amortiguamiento ζ se expresa como

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias que corresponden a los puntos de mediana potencia.

3.41 Un sistema torsional consta de un disco de momento de inercia de masa $J_0 = 10$ kg-m^2, un amortiguador torsional de constante de amortiguamiento $c_t = 300$ N-m-s/rad, y una flecha de acero de 4 cm de diámetro y 1 m de largo (fija a un extremo y unida al disco en el otro extremo). Se observa una oscilación angular estable de amplitud de 2° cuando se aplica al disco un par de torsión armónico de magnitud 1000 N-m. (a) Encuentre la frecuencia del par de torsión aplicado, y (b) encuentre el par de torsión máximo transmitido al soporte.

3.42 Para un sistema vibratorio, $m = 10$ kg, $k = 2\,500$ N/m, y $c = 45$ N-s/m. Una fuerza armónica de amplitud de 180 N y frecuencia de 3.5 Hz actúa sobre la masa. Si el desplazamiento inicial y la velocidad de la masa son 15 mm y 5m/s, encuentre la solución total que represente el movimiento de la masa.

3.43 Se observa que la amplitud pico de un sistema de un solo grado de libertad, bajo una excitación armónica, debe ser de 0.2 pulg. Si la frecuencia natural no amortiguada del sistema es 5 Hz, y la deflexión estática de la masa sujeta a una fuerza máxima es 0.1 pulg: (a) estime la relación de amortiguamiento del sistema, y (b) encuentre las frecuencias que correspondan a las amplitudes de mediana potencia.

3.44 El tren de aterrizaje de un avión se puede idealizar como el sistema de resorte-masa-amortiguador que se muestra en la figura 3.52. Si $y(t) = y_0 \cos \omega t$ describe la superficie de la pista, determine los valores de k y c que limitan la amplitud de vibración del avión (x) a 0.1 m. Suponga $m = 2\,000$ kg, $y_0 = 0.2$ m y $\omega = 157.08$ rad/s.

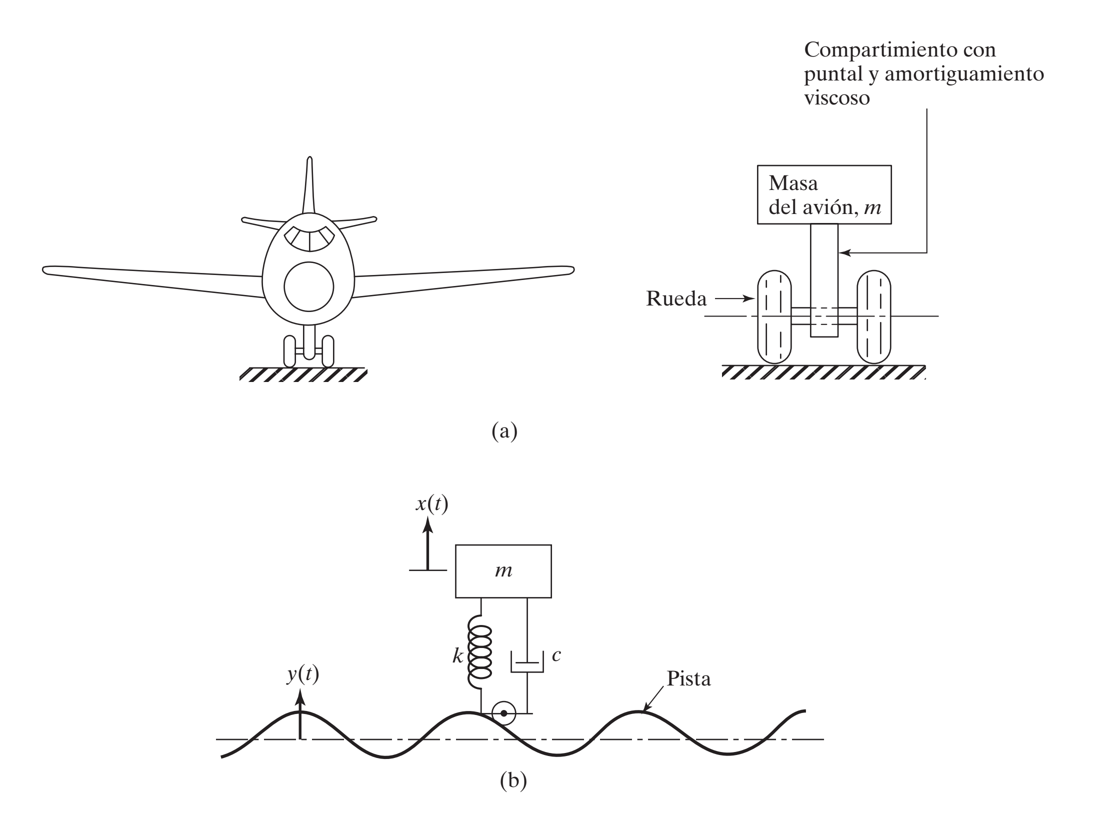


Figura 3.52 Modelado de un tren de aterrizaje.

3.45 Una afiladora de precisión (figura 3.53) está montada sobre un aislador que tiene una rigidez de 1 MN/m y una constante de amortiguamiento viscoso de 1 kN-s/m. El suelo sobre el cual está montada la máquina se somete a una perturbación armónica debido a la operación de un motor desbalanceado vecino a la afiladora. Encuentre la amplitud de desplazamiento máximo aceptable del piso si la amplitud de vibración resultante de la afiladora se tiene que limitar a 10^{-6} m. Suponga que la afiladora y la rueda son un cuerpo rígido de 5 000 N de peso.

3.46 Obtenga la ecuación de movimiento y determine la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 3.54 para movimiento rotatorio alrededor del gozne O con los siguientes datos: $k = 5\,000$ N/m, $l = 1$ m, $c = 1\,000$ N-s/m, $m = 10$ kg, $M_0 = 100$ N-m, $\omega = 1\,000$ rpm.

3.47 Un compresor de aire de 100 kg de masa está montado sobre un cimiento elástico. Se ha observado que cuando se aplica una fuerza armónica de 100 N de amplitud al compresor, el desplazamiento de estado estable máximo de 5 mm ocurre a una frecuencia de 300 rpm. Determine la rigidez equivalente y la constante de amortiguamiento del cimiento.

3.48 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 3.55 para los siguientes datos: $k_1 = 1\,000$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $c = 500$ N-s/m, $m = 10$ kg, $r = 5$ cm, $J_0 = 1$ kg-m^2, $F_0 = 50$ N, $\omega = 20$ rad/s.

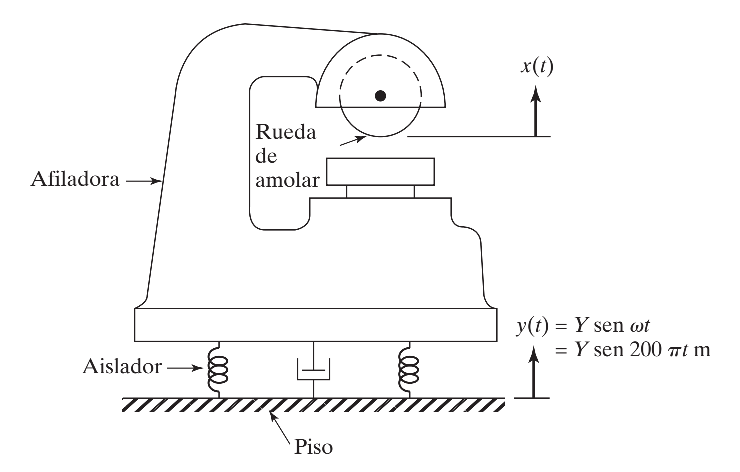


Figura 3.53

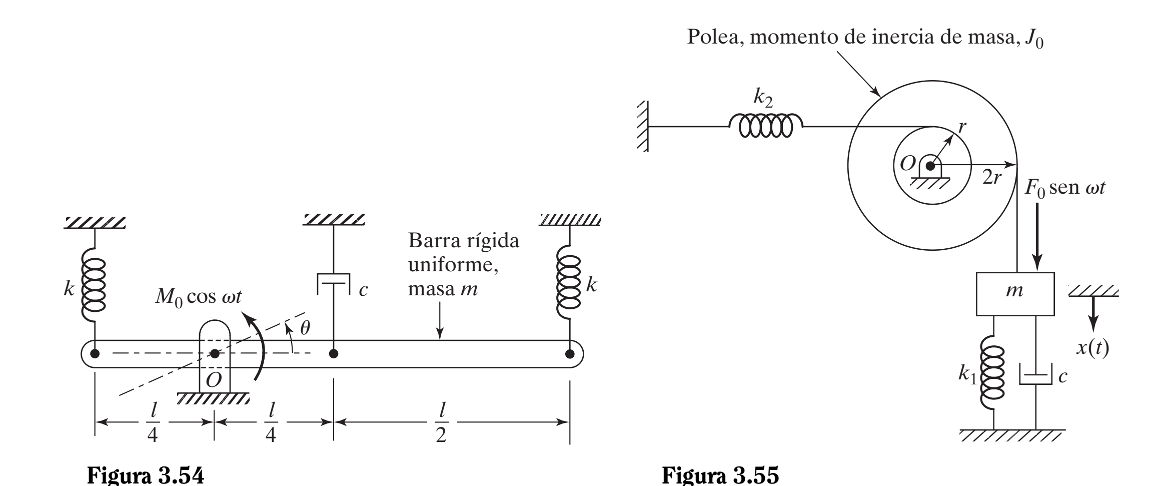


Figura 3.54

Figura 3.55

3.49 Una barra delgada uniforme de masa m puede ser soportada en una de dos maneras como se muestra en la figura 3.56. Determine el arreglo que reduce la respuesta de estado estable de la barra sometida a una fuerza armónica F_0 sen ωt aplicada a la mitad de la barra, como se muestra en la figura.

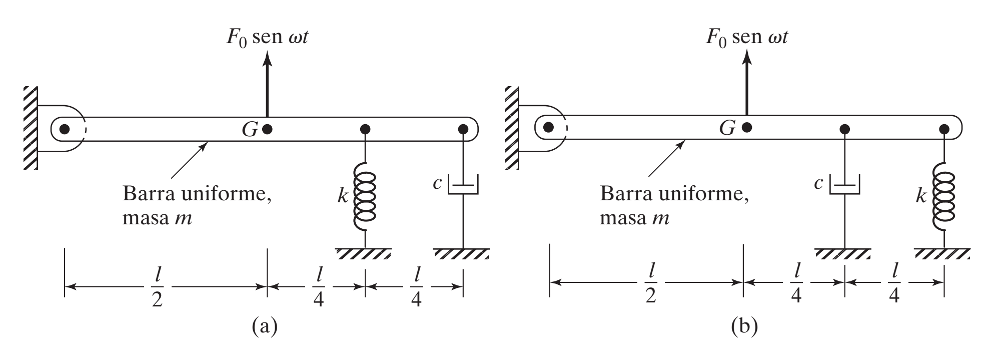


Figura 3.56

Sección 3.5 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

3.50 Obtenga la expresión para la respuesta de frecuencia compleja de un sistema torsional no amortiguado.

3.51 Un sistema de un solo grado de libertad amortiguado, con parámetros $m = 150$ kg, $k = 25$ kN/m y $c = 2\,000$ N-s/m, se somete a la fuerza armónica $f(t) = 100 \cos 20t$ N. Encuentre la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta de estado estable del sistema mediante un método gráfico.

Sección 3.6 Respuesta de un sistema amortiguado sometido al movimiento armónico de la base

3.52 La estructura de un edificio de un piso se somete a una aceleración armónica del suelo como se muestra en la figura 3.57. Encuentre el movimiento de estado estable del suelo (masa m).

3.53 Encuentre el desplazamiento horizontal del piso (masa m) de la estructura del edificio que se muestra en la figura 3.57 cuando la aceleración del suelo la da $\ddot{x}_g = 100$ sen ωt mm/s: suponga que $m = 2\,000$ kg, $k = 0.1$ MN/m, $\omega = 25$ rad/s y $x_g(t = 0) = \dot{x}_g(t = 0) = x(t = 0) = \dot{x}(t = 0) = 0$.

3.54 Si el suelo en la figura 3.57 se somete a un desplazamiento horizontal armónico con frecuencia $\omega = 200$ rad/s y amplitud $X_g = 15$ mm, encuentre la amplitud de vibración del piso (masa m). Suponga la masa del piso como $2\,000$ kg y la rigidez de la columna como 0.5 MN/m.

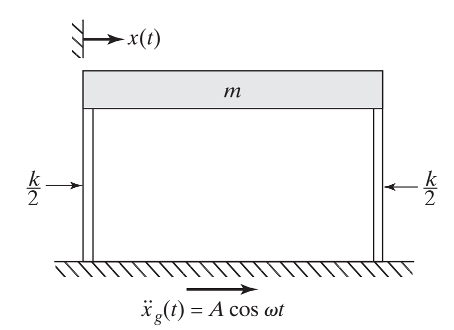


Figura 3.57

3.55 Un automóvil se modela como un sistema de un solo grado de libertad que vibra en la dirección vertical. Se conduce a lo largo de una carretera cuya elevación varía senoidalmente. La distancia de una elevación a una depresión es de 0.2 m y la distancia a lo largo de la carretera entre las elevaciones es de 35 m. Si la frecuencia del automóvil es de 2 Hz y la relación de amortiguamiento de los amortiguadores es de 0.15, determine la amplitud de vibración del automóvil a una velocidad de 60 km/hora. Si se varía la velocidad del automóvil, encuentre la velocidad más desfavorable para los pasajeros.

3.56 Derive la ecuación (3.74).

3.57 La estructura de un edificio de un piso se modela como un piso rígido de masa m y las columnas de rigidez k, como se muestra en la figura 3.58. Se propone que el amortiguador mostrado en la figura se utilice para absorber las vibraciones producidas por el movimiento horizontal del suelo $y(t) = Y \cos \omega t$. Derive una expresión para la constante de amortiguamiento del amortiguador que absorba la máxima potencia.

3.58 Una barra uniforme de masa m gira alrededor del punto O con sus extremos apoyados en dos resortes, como se muestra en la figura 3.59. El extremo P del resorte PQ se somete a un desplazamiento horizontal $x(t)$ $x_0 =$ sen ωt. Encuentre el desplazamiento angular de estado estable de la barra cuando $l = 1$ m, $k = 1\,000$ N/m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm, $\omega = 10$ rad/s.

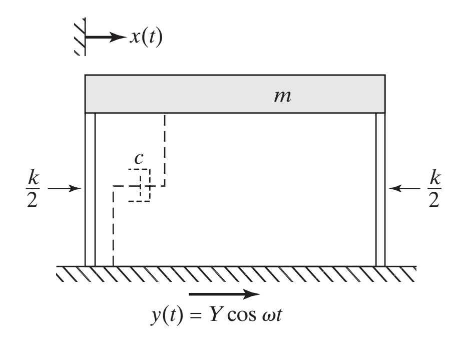


Figura 3.58

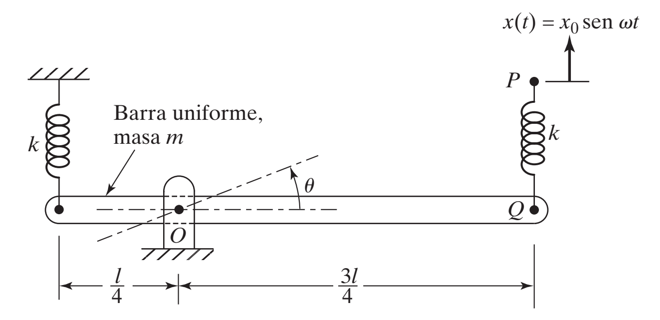


Figura 3.59

3.59 Una barra uniforme de masa m gira alrededor del punto O con sus extremos apoyados en dos resortes como se muestra en la figura 3.60. El extremo P del resorte PQ se somete a un desplazamiento senoidal $x(t) = x_0$ sen ωt. Encuentre el desplazamiento angular de estado estable de la barra cuando $l = 1$ m, $k = 1\,000$ N/m, $c = 500$ N-s/m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm y $\omega = 10$ rad/s.

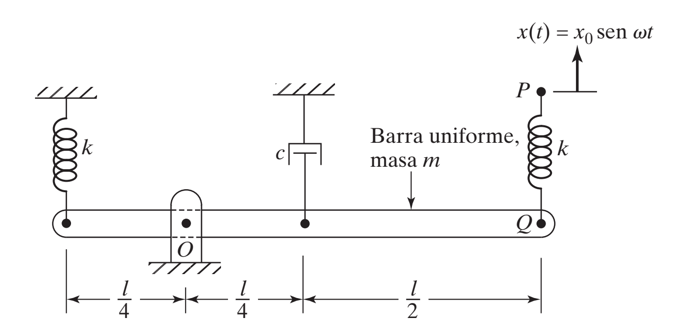


Figura 3.60

3.60 Encuentre la relación de frecuencia, $r = r_m$ a la cual la transmisibilidad del desplazamiento dada por la ecuación (3.68) alcanza un valor máximo.

3.61 Un automóvil que pesa 1 000 lb vacío y 3 000 totalmente cargado, vibra en dirección vertical mientras viaja a 55 mph por una carretera con baches de forma senoidal y amplitud de Y pies y periodo de 12 pies. Suponiendo que el automóvil se puede modelar como un sistema de un solo grado de libertad con rigidez de 30 000 lb/pie y relación de amortiguamiento $\zeta = 0.2$, determine la amplitud de vibración del automóvil cuando está (a) vacío y (b) totalmente cargado.

3.62 La base de un sistema de resorte-masa, con $m = 25$ kg y $k = 2\,500$ N/m se somete a una excitación armónica $y(t) = Y_0 \cos \omega t$. La amplitud de la masa es de 0.05 m cuando la base es excitada a la frecuencia natural del sistema con $Y_0 = 0.01$ m. Determine la constante de amortiguamiento del sistema.

Sección 3.7 Respuesta de un sistema amortiguado sometido a desbalance rotatorio

3.63 Un compresor de aire de un cilindro de 100 kg de masa está montado sobre soportes de montaje de caucho, como se muestra en la figura 3.61. La rigidez y constantes de amortiguamiento de los soportes de montaje son de 10^6 N/m y 2000 N-s/m, respectivamente. Si el desbalance del compresor equivale a una masa de 0.1 kg colocada en el extremo de la manivela (punto A) determine la respuesta del compresor a una velocidad de la manivela de 3000 rpm. Considere $r = 10$ cm y $l = 40$ cm.

3.64 Una de las aspas del rotor de cola de un helicóptero tiene una masa desbalanceada de $m = 0.5$ kg a una distancia de $e = 0.15$ m del eje de rotación, como se muestra en la figura 3.62. La sección de cola tiene una longitud de 4 m, una masa de 240 kg, una rigidez flexional (EI) de 2.5 MN-m^2, y una relación de amortiguamiento de 0.15. La masa de las aspas del rotor de cola, incluido su sistema de propulsión, es de 20 kg. Determine la respuesta forzada de la sección de cola cuando las aspas giran a 1500 rpm.

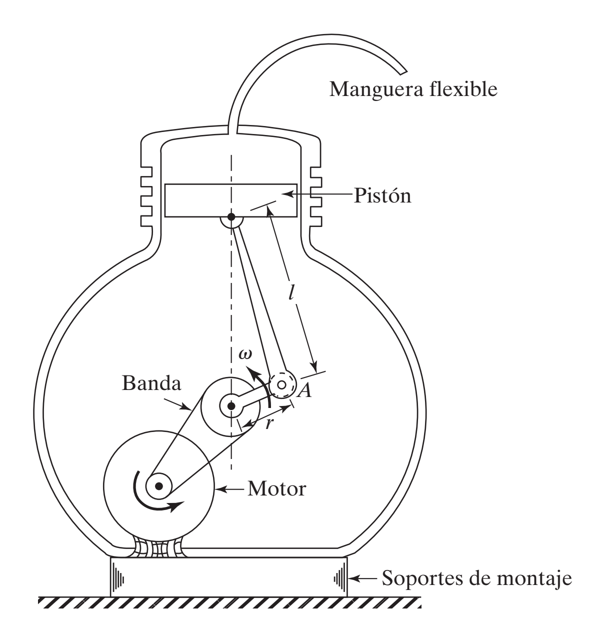


Figura 3.61

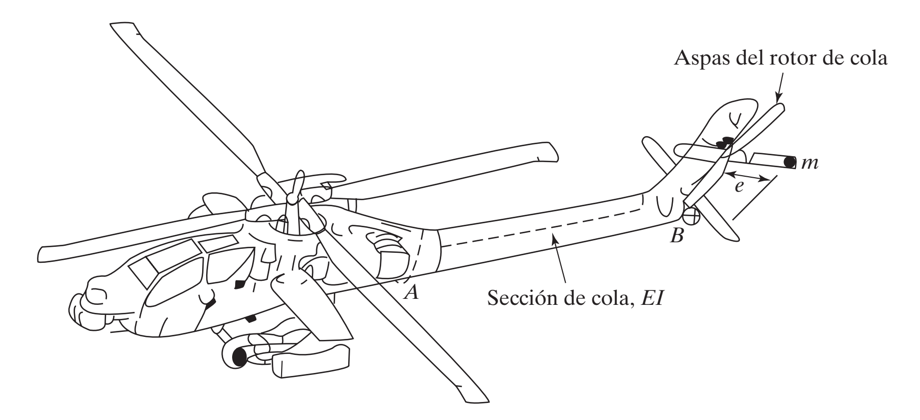


Figura 3.62

3.65 Cuando un ventilador de escape de 380 kg de masa está apoyado sobre resortes con amortiguamiento insignificante, la deflexión estática resultante es de 45 mm. Si el ventilador tiene un desbalance rotatorio de 0.15 kg-m, encuentre (a) la amplitud de vibración a 1 750 rpm, y (b) la fuerza transmitida al suelo a esta velocidad.

3.66 Una viga de acero con ambos extremos empotrados de 5 m de longitud, 0.5 m de ancho y 0.1 m de espesor, sostiene un motor eléctrico de 75 kg de masa y 1 200 rpm de velocidad a media distancia, como se muestra en la figura 3.63. Se desarrolla una fuerza rotatoria $F_0 = 5\,000$ N debido al desbalance en el rotor del motor. Encuentre la amplitud de las vibraciones de estado estable sin tener en cuenta la masa de la viga. ¿Cuál será la amplitud si se considera la masa de la viga?

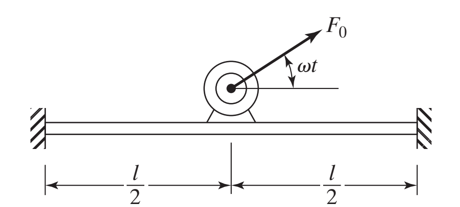


Figura 3.63

3.67 Si el motor eléctrico del problema 3.66 se monta en el extremo libre de una viga de acero en voladizo de 5 m de longitud (figura 3.64), y la amplitud de vibración se tiene que limitar a 0.5 cm, encuentre las dimensiones de sección transversal necesarias de la viga. Incluya el peso de la viga en los cálculos.

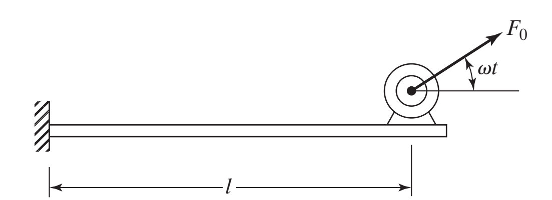


Figura 3.64

3.68 Una bomba centrífuga que pesa 600 N y opera a 1 000 rpm, está montada sobre seis resortes de 6 000 N/m de rigidez cada uno. Encuentre el desbalance máximo permisible, para limitar la deflexión de estado estable a 5 mm pico a pico.

3.69* Se va a montar un compresor de aire, que pesa 1 000 lb y opera a 1 500 rpm, sobre un aislador adecuado. Hay un resorte helicoidal con rigidez de 45 000 lb/pulg, otro resorte helicoidal con rigidez de 15 000 lb/pulg, y un amortiguador con relación de amortiguamiento de 0.15, disponibles para usarse. Seleccione el mejor sistema de aislamiento posible para el compresor.

3.70 Un motor eléctrico de velocidad variable, que tiene un desbalance, está montado sobre un aislador. A medida que la velocidad del motor se incrementa desde cero, las amplitudes de vibración del motor son de 0.55 pulg en resonancia y de 0.15 pulg al superar la resonancia. Encuentre la relación de amortiguamiento del aislador.

3.71 Un motor eléctrico que pesa 750 lb y funciona a 1 800 rpm está montado sobre cuatro resortes helicoidales de acero, cada uno con ocho espiras activas y un alambre de 0.25 pulg de diámetro y 3 pulg de diámetro de espira. El rotor pesa 100 lb con su centro de masa ubicado a una distancia de 0.01 pulg del eje de rotación. Encuentre la amplitud de vibración del motor y la fuerza transmitida a la base a través de los resortes.

3.72 Un pequeño ventilador extractor, que gira a 1 500 rpm, está montado en una flecha de acero de 0.2 pulg. El rotor del ventilador pesa 30 lb y tiene una excentricidad de 0.01 pulg con respecto al eje de rotación.

Encuentre (a) la fuerza máxima transmitida a los cojinetes, y (b) los caballos de fuerza necesarios para impulsar la flecha.

3.73 Obtenga la ecuación (3.84) para la fuerza transmitida al cimiento debido al desbalance rotatorio.

3.74 Una placa rígida, que pesa 100 lb, está conectada a la bisagra a lo largo del borde (P) y está montada sobre un amortiguador hidráulico con $c = 1$ lb-s/pulg, en el borde opuesto (Q), como se muestra en la figura 3.65. Un pequeño ventilador que pesa 50 lb y gira a 750 rpm está montado en la placa por medio de un resorte con $k = 200$ lb/pulg. Si el centro de gravedad del ventilador se encuentra a 0.1 pulg de su eje de rotación, encuentre el movimiento de estado estable del borde y la fuerza transmitida al punto S.

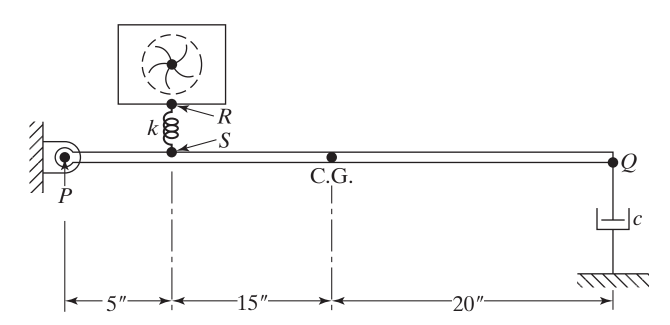


Figura 3.65

3.75 Un motor eléctrico está montado en el extremo de una viga en voladizo. Se observa que la viga se desvía 0.2 m cuando el motor funciona a una velocidad de 1 500 rpm. Ignorando la masa y el amortiguamiento de la viga, determine la velocidad del motor de modo que la amplificación dinámica sea menor que 10% con respecto al valor de equilibrio estático.

3.76 Un compresor de aire de 50 kg de masa está montado sobre un soporte elástico y opera a una velocidad de 1 000 rpm. Tiene una masa desbalanceada de 2 kg a una distancia radial (excentricidad) de 0.1 m del eje de rotación. Si el factor de amortiguamiento del soporte elástico es $\zeta = 0.1$, determine lo siguiente: (a) la constante de resorte del soporte elástico el cual transmite no más del 25% de la fuerza desbalanceada al cimiento, y (b) la magnitud de la fuerza transmitida al cimiento.

3.77 Un rotor de turbina de 200 kg de masa tiene una masa desbalanceada de 15 kg. Está apoyado en un cimiento el cual tiene una rigidez equivalente de 5 000 N/m y una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.05$. Si el rotor vibra con una deflexión de 0.1 m en resonancia, determine (a) la ubicación radial (excentricidad) de la masa desbalanceada, (b) la masa adicional que se debe agregar (uniformemente) al rotor para que la deflexión de éste se reduzca a 0.05 m, y (c) la deflexión pico de la turbina cuando la relación de frecuencia (r) varía.

Sección 3.8 Vibración forzada con amortiguamiento de Coulomb

3.78 Obtenga la ecuación (3.99).

3.79 Obtenga la ecuación de movimiento de la masa m que se muestra en la figura 3.66 cuando la presión en el cilindro fluctúa senoidalmente. Los dos resortes con rigideces k_1 se encuentran en inicio sometidos a una tensión T_0 y el coeficiente de fricción entre la masa y las superficies de contacto es μ.

3.80 La masa de un sistema de resorte-masa, con $m = 15$ kg y $k = 25$ kN/m, vibra sobre una superficie horizontal bajo una fuerza armónica de 200 N y frecuencia de 20 Hz. Encuentre la amplitud de vibración de estado estable. Suponga que el coeficiente de fricción entre la masa y la superficie horizontal es de 0.25.

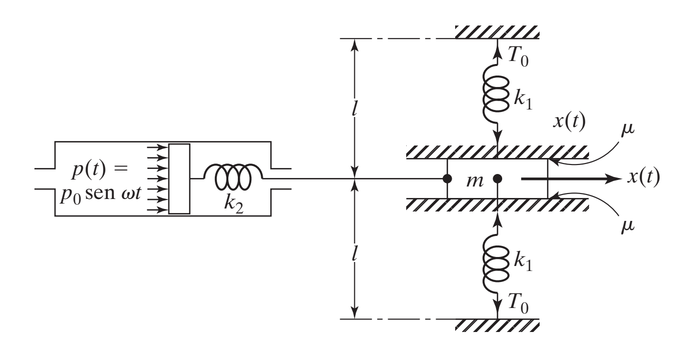


Figura 3.66

3.81 Un sistema de resorte-masa con $m = 25$ kg y $k = 10$ kN/m vibra sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción $\mu = 0.3$. Sometida a una fuerza armónica de 8 Hz de frecuencia, la vibración de estado estable de la masa es de 0.2 m. Determine la constante de amortiguamiento viscoso equivalente del sistema.

3.82 Un sistema de resorte-masa se somete a amortiguamiento de Coulomb. Cuando se aplica una fuerza armónica de 120 N y frecuencia de 2.5173268, el sistema oscila con una amplitud de 75 mm. Determine el coeficiente de fricción seca si $m = 2$ kg y $k = 2100$ N/m.

Sección 3.9 Vibración forzada con amortiguamiento de histéresis

3.83 Una carga de 5 000 N produjo un desplazamiento estático de 0.05 m en una estructura compuesta. Se ve que una fuerza armónica de 1 000 N provoca una amplitud resonante de 0.1 m. Encuentre (a) la constante de amortiguamiento de histéresis de la estructura; (b) la energía disipada por ciclo en resonancia; (c) la amplitud de estado estable a un cuarto de la frecuencia resonante, y (d) la amplitud de estado estable a tres veces la frecuencia resonante.

3.84 La energía disipada en amortiguamiento de histéresis por ciclo bajo excitación armónica se puede expresar en la forma general

$$\Delta W = \pi \beta k X^{\gamma} \tag{E.1}$$

donde γ es un exponente (se consideró $\gamma = 2$ en la ecuación (2.150)), y β es un coeficiente de dimensión (metros)$^{2-\gamma}$. Un sistema de resorte-masa con $k = 60$ kN/m vibra bajo amortiguamiento de histéresis. Cuando se excita armónicamente en resonancia, la amplitud de estado estable es de 40 mm con una entrada de energía de 3.8 N-m. Cuando la entrada de energía resonante se incrementa a 9.5 N-m, la amplitud es de 60 mm. Determine los valores de β y γ en la ecuación (E.1).

Sección 3.10 Movimiento forzado con otros tipos de amortiguamiento

3.85 Cuando un sistema de resorte-masa-amortiguador se somete a una fuerza armónica $F(t) = 5 \cos 3\pi t$ lb, el desplazamiento resultante es $x(t) = 0.5 \cos (3\pi t - \pi/3)$pulg. Encuentre el trabajo realizado (a) durante el primer segundo y (b) durante los primeros 4 segundos.

3.86 Determine el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente de un amortiguamiento que ofrezca una fuerza de amortiguamiento de $F_d = c(\dot{x})^n$, donde c y n son constantes y $\dot{x}$ es la velocidad relativa a través del amortiguador. Incluso, determine la amplitud de vibración.

3.87 Demuestre que para un sistema tanto con amortiguamiento viscoso como de Coulomb el valor aproximado de la amplitud de estado estable es resultado de

$$X^2[k^2(1 - r^2)^2 + c^2\omega^2] + X\frac{8\mu N c\omega}{\pi} + \left(\frac{16\mu^2N^2}{\pi^2} - F_0^2\right) = 0$$

3.88 La ecuación de movimiento de un sistema de resorte-masa lo da

$$m\ddot{x} \pm \mu N + c\dot{x}^3 + kx = F_0 \cos \omega t$$

Obtenga expresiones para (a) la constante de amortiguamiento viscoso equivalente; (b) la amplitud de estado estable, y (c) la relación de amplitud en resonancia.

Sección 3.11 Autoexcitación y análisis de estabilidad

3.89 Un fluido con densidad ρ, fluye por un tubo de acero en voladizo de longitud l y área de sección transversal A (figura 3.67). Determine la velocidad (v) del fluido a la cual ocurre la inestabilidad. Suponga que la masa total y la rigidez a la flexión del tubo son m y EI, respectivamente.

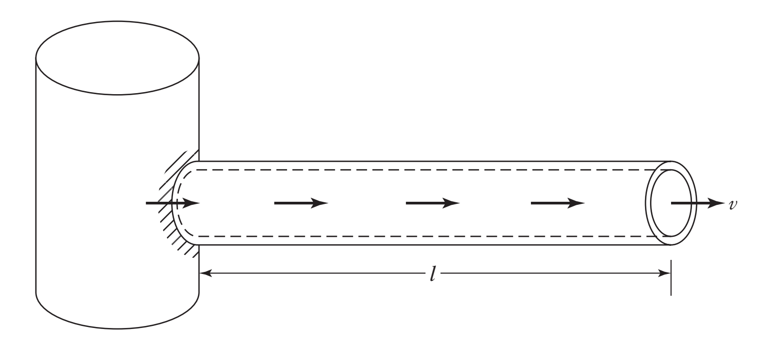


Figura 3.67

3.90 Las primeras dos frecuencias naturales de la antena telescópica de un automóvil que se muestran en la figura 3.68 son de 3.0 Hz y 7.0 Hz. Determine si la formación de torbellinos alrededor de la antena provoca inestabilidad dentro del rango de velocidad de 50 a 75 mph del automóvil.

3.91 El poste de un anuncio de un restaurante de comida rápida se compone de un cilindro de acero hueco de altura h, diámetro interno d y diámetro externo D, fijo en el suelo, y sostiene una masa concentrada M en su extremo superior. Se puede modelar como un sistema de resorte-masa-amortiguador de un solo grado de libertad con una relación de amortiguamiento viscoso equivalente de 0.1 para analizar sus caracte-

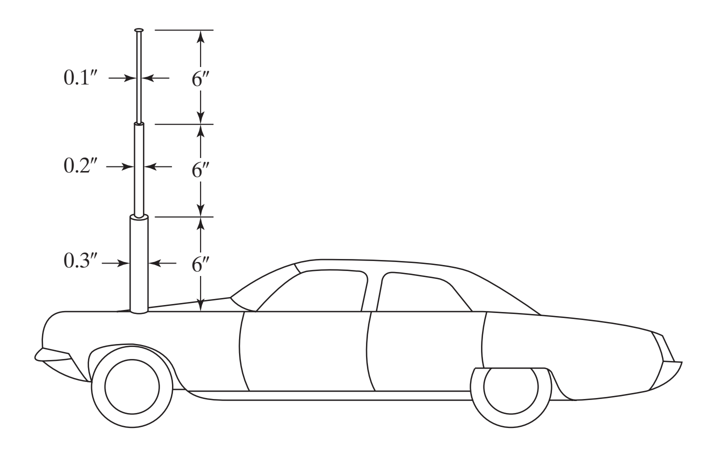


Figura 3.68

rísticas de vibración transversal bajo la excitación del viento. Determine lo siguiente: (a) la frecuencia natural de vibración transversal del poste; (b) la velocidad del viento a la cual el poste experimenta un desplazamiento de estado estable máximo, y (c) el desplazamiento de estado estable máximo inducido por el viento del poste. Datos: $h = 10$ m, $D = 25$ cm, $d = 20$ cm, $M = 200$ kg.

3.92 Considere la ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Derive la condición que conduce a oscilaciones divergentes en cada uno de los siguientes casos: (a) cuando la función forzada es proporcional al desplazamiento, $F(t) = F_0 x(t)$; (b) cuando la función forzada es proporcional a la velocidad, $F(t) = F_0 \dot{x}(t)$, y (c) cuando la función forzada es proporcional a la aceleración, $F(t) = F_0 \ddot{x}(t)$.

Sección 3.12 Método de la función de transferencia

3.93 Obtenga la función de transferencia de un sistema viscosamente amortiguado sujeto a movimiento armónico de la base con la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

donde $y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$

3.94 Obtenga la función de transferencia de un sistema viscosamente amortiguado sujeto a desbalance rotatorio, con la ecuación de movimiento:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

Sección 3.13 Soluciones obtenidas utilizando transformadas de Laplace

3.95 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sujeto a movimiento armónico de la base, considerado en la sección 3.6, utilizando una transformada de Laplace.

3.96 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sujeto a desbalance rotatorio armónico de la base, considerado en la sección 3.7, utilizando una transformada de Laplace.

3.97 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sujeto a una fuerza armónica, considerada en la sección 3.3, utilizando una transformada de Laplace.

3.98 Un resorte y un amortiguador viscoso, conectados a una barra rígida sin masa, se someten a una fuerza armónica $f(t)$ como se muestra en la figura 3.69. Determine la respuesta de estado estable del sistema por medio de una transformada de Laplace.

3.99 Obtenga las ecuaciones (E.4)-(E.7) en el ejemplo 3.16.

3.100 Se realiza un experimento para encontrar las características de respuesta dinámica de un sistema de ensamble de rueda de un automóvil. Para esto, la rueda se conecta a una flecha mediante un tirante y se somete a una fuerza armónica $f(t)$ como se muestra en la figura 3.70. La flecha ofrece una rigidez torsional de k_t en tanto que la rueda experimenta vibración torsional alrededor del eje de la flecha. Encuentre la respuesta del sistema, $\theta(t)$, utilizando una transformada de Laplace. Suponga que las condiciones iniciales son cero.

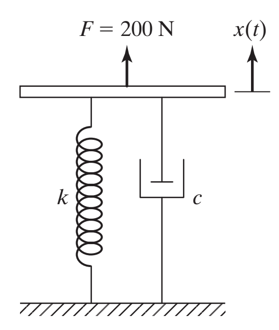


Figura 3.69

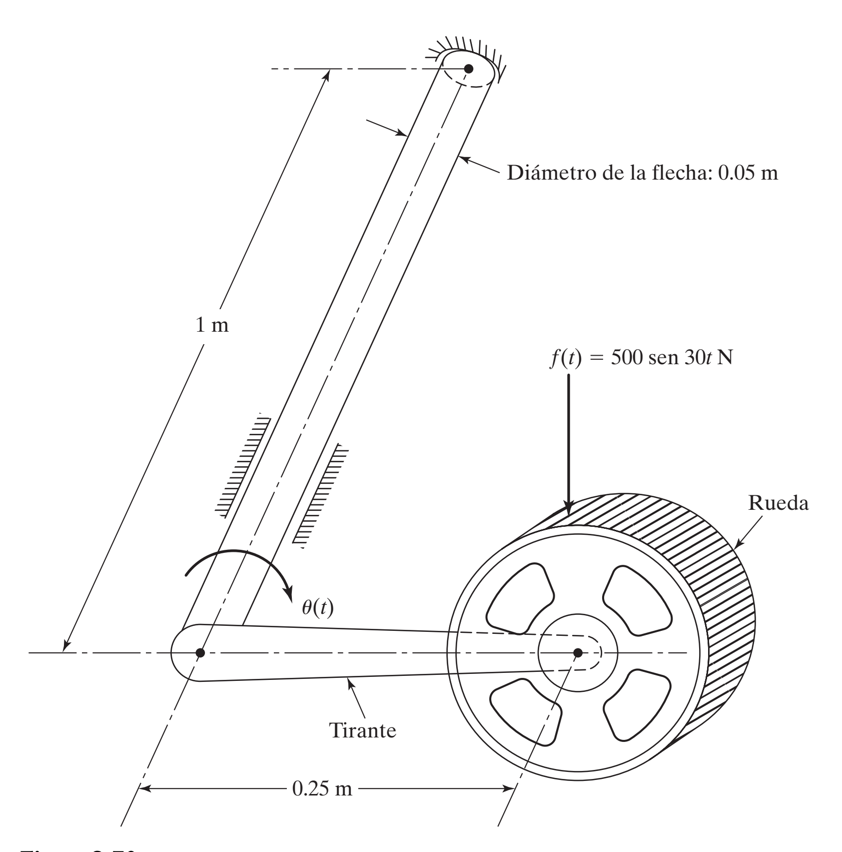


Figura 3.70

Sección 3.14 Funciones de transferencia de frecuencia

3.101 Genere la función de transferencia de frecuencia a partir de la función de transferencia general para un sistema viscosamente amortiguado sujeto a un movimiento armónico de la base considerado en el problema 3.93 e identifique la entrada, el sistema y las sinusoides de salida.

3.102 Genere la función de transferencia de frecuencia a partir de la función de transferencia general para un sistema viscosamente amortiguado sujeto a desbalance rotatorio considerado en el problema 3.94 e identifique la entrada, el sistema y las sinusoides de salida.

Sección 3.15 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

3.103 Trace la respuesta forzada de un sistema de resorte-masa no amortiguado en las siguientes condiciones: MATLAB: $m = 10$ kg, $k = 4\,000$ N/m, $F(t) = 200 \cos 10t$ N, $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

3.104 Trace la respuesta forzada de un sistema de resorte-masa sujeto a amortiguamiento de Coulomb utilizando MATLAB. Suponga los siguientes datos: $m = 10$ kg, $k = 4\,000$ N/m, $F(t) = 200$ sen $10t$ N, $m = 0.3$, $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

3.105 Trace la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado sujeto a excitación armónica de la base, $y(t) = Y$ sen ωt m, utilizando MATLAB para los siguientes datos: $m = 100$ kg, $k = 4 \times 10^4$ N/m, $\zeta = 0.25$, $Y = 0.05$ m, $\omega = 10$ rad/s, $x_0 = 1$ m, $\dot{x}_0 = 0$.

3.106 Trace la respuesta de estado estable de un sistema viscosamente amortiguado sujeto a la fuerza armónica $F(t) = F_0 = \cos \omega t$ utilizando MATLAB. Suponga los siguientes datos: $m = 10$ kg, $k = 1\,000$ N/m, $\zeta = 0.1$, $F_0 = 100$ N, $\omega = 20$ rad/s.

3.107 Considere un automóvil que viaja por una carretera con baches a una velocidad de v km/h. El sistema de suspensión tiene una constante de resorte de 40 kN/m y una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.1$. La superficie de la carretera varía senoidalmente con una amplitud de $Y = 0.05$ m y una longitud de onda de 6 m. Escriba un programa MATLAB para hallar la amplitud de desplazamiento del automóvil para las siguientes condiciones: (a) masa del automóvil = 600 kg (vacío), 1 000 kg (cargado) y (b) velocidad del automóvil (v) = 10 km/h, 50 km/h, 100 km/h.

3.108 Escriba un programa de computadora para encontrar la respuesta total de un sistema de resorte-masa-amortiguador viscoso sometido a excitación de la base. Use este programa para hallar la solución de un problema con $m = 2$ kg, $c = 10$ N-s/m, $k = 100$ N/m, $y(t) = 0.1$ sen $25t$ m, $x_0 = 10$ mm, y $\dot{x}_0 = 5$ m/s.

3.109 Trace las gráficas de $\frac{MX}{me}$ contra r y ϕ contra r para un sistema amortiguado sujeto a desbalance rotatorio (ecuaciones (3.81)) para las relaciones de amortiguamiento $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1 utilizando MATLAB.

3.110 Trace las gráficas de $\frac{X}{Y}$ contra r y ϕ contra r para un sistema amortiguado sometido a excitación de la base (ecuaciones (3.68) y 3.69)) para las relaciones de amortiguamiento $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1 utilizando MATLAB.

Proyectos de diseño

3.111 El sistema que se muestra en la figura 3.71 se compone de dos masas excéntricas que giran en direcciones opuestas a la misma velocidad ω. Se va a utilizar como agitador mecánico dentro del rango de frecuencia de 20 a 30 Hz. Determine los valores de ω, e, M, m, k y c para satisfacer los siguientes requerimientos: (a) la salida de potencia media del agitador deberá ser al menos de 1 hp dentro del rango de frecuencia especificado. (b) La amplitud de vibración de las masas deberá ser de entre 0.1 y 0.2 pulg. (c) La masa del agitador (M) deberá ser al menos 50 veces la de la masa excéntrica (m).

3.112 Diseñe una columna de acero circular hueca de peso mínimo para el tanque de agua que se muestra en la figura 3.72. El peso del tanque (W) es de 100 000 lb y la altura es de 50 pies. El esfuerzo inducido en la columna no deberá exceder la resistencia de fluencia del material, la cual es de 30 000 lb/pulg^2,

cuando se somete a aceleración del suelo armónica (debido a un sismo) de 0.5 g de amplitud y 15 Hz de frecuencia. Además, la frecuencia natural del tanque de agua no deberá ser mayor que 15 Hz. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.15 para la columna.

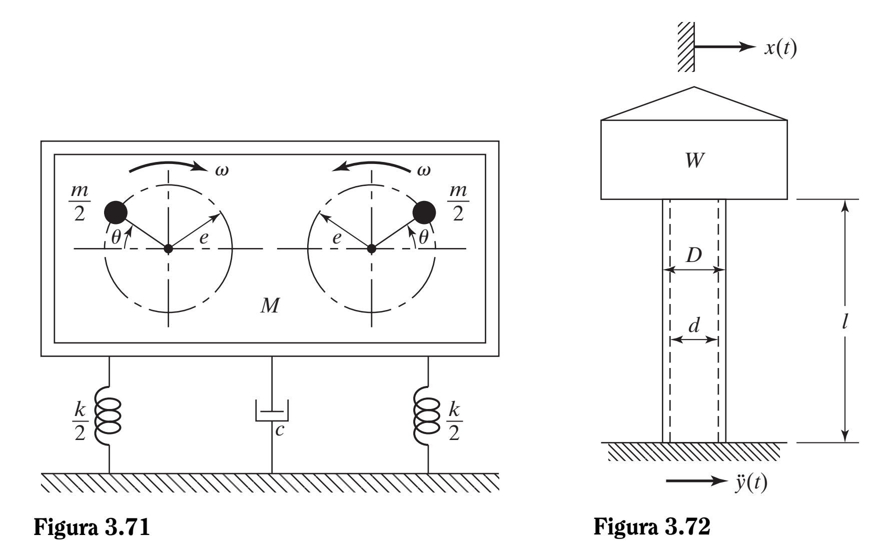


Figura 3.71

Figura 3.72

CAPÍTULO 4

Vibración en condiciones forzadas

Jean Baptiste Fourier
(1768-1830)

Matemático francés y profesor de la Ecole Polytechnique en París. Sus trabajos sobre flujo de calor, publicados en 1822 y acerca de series trigonómetricas son muy conocidos. La expansión de una función periódica en cuanto a las funciones armónicas fue nombrada en su honor como "serie de Fourier".

(Reproducido con permiso de *Applied Mechanics Reviews*).

Esquema del capítulo

Este capítulo se ocupa de la respuesta vibratoria de un sistema de un solo grado de libertad sometido a condiciones forzadas arbitrarias. La respuesta del sistema sometido a fuerzas periódicas generales se presenta expandiendo primero la fuerza periódica en una serie de fuerzas armónicas mediante la serie de Fourier y luego superponiendo las respuestas derivadas de las fuerzas armónicas individuales. La respuesta del sistema sometido a una fuerza no periódica se presenta siguiendo dos métodos, el de la integral de convolución y el de la transformada de Laplace. El método de la integral de convolución, o de Duhamel, utiliza la función de respuesta al impulso del sistema. El método también se utiliza para determinar la respuesta a excitación de base y se presentan varios ejemplos para ilustrar su uso. También se delinea el concepto de espectros de respuesta correspondiente a funciones forzadas específicas y su uso en la determinación de la respuesta máxima del sistema. Asimismo, se considera el espectro de respuesta correspondiente a la excitación de base, como la causada por un sismo. Se ilustran los espectros de respuesta típicos a un sismo y su uso en la búsqueda de las respuestas de estructuras de edificios. También se definen los conceptos de pseudovelocidad y de espectro pseudoasociado. El diseño de sistemas bajo un ambiente de choque se analiza junto con un ejemplo ilustrativo. Se presenta la transformada de Laplace y su uso para determinar la respuesta tanto de sistemas de primer orden como de segundo orden. Se consideran las respuestas bajo funciones de impulso, escalonadas y de rampa. Se consideran problemas de colisión no elástica y elástica como aplicaciones de cálculo de respuesta de impulso. Tienen su espacio de estudio el análisis de respuesta escalonada y la descripción de respuesta transitoria en función de tiempo pico, tiempo de subida, sobrepaso máximo, tiempo de asentamiento y tiempo de demora. La respuesta de sistemas en condiciones forzadas irregulares mediante métodos numéricos, incluido el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se presenta junto con ejemplos ilustrativos. Por último, el uso de programas MATLAB para determinar la respuesta de un sistema sometido a funciones forzadas arbitrarias se ilustra con ejemplos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Encontrar las respuestas de sistemas de un solo grado de libertad sometidos a fuerzas periódicas generales mediante la serie de Fourier.
- Utilizar el método de convolución o integral de Duhamel para resolver problemas de vibración de sistemas sometidos a fuerzas arbitrarias.
- Encontrar la respuesta de sistemas sometidos a sismos utilizando espectros de respuesta.
- Resolver sistemas no amortiguados y amortiguados sometidos a fuerzas arbitrarias, entre ellas fuerzas de impulso, escalonadas y de rampa, mediante la transformada de Laplace.
- Entender las características de respuesta transitoria, como el tiempo pico, el sobrepaso, el tiempo de asentamiento, el tiempo de subida y el tiempo de demora, así como procedimientos para su estimación.
- Aplicar métodos numéricos para resolver problemas de vibración de sistemas sometidos a fuerzas que se describen numéricamente.
- Resolver problemas de vibración forzada utilizando MATLAB.

4.1 Introducción

En el capítulo 3 consideramos la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad sometido a excitación armónica. Sin embargo, muchos sistemas prácticos se someten a varios tipos de condiciones forzadas que no son armónicas. La función forzada general puede ser periódica (no armónica)

o no periódica. Las fuerzas no periódicas incluyen fuerzas como una fuerza constante aplicada de repente (llamada *fuerza gradual*), una fuerza que crece linealmente (llamada fuerza rampa) y una fuerza que varía exponencialmente. Una función forzada no periódica puede actuar con una duración corta, larga o infinita. Una función forzada o excitación de corta duración comparada con el periodo natural del sistema se llama choque. Ejemplos de funciones forzadas generales son el movimiento impartido por una leva al seguidor, la vibración percibida por un instrumento cuando su empaque se deja caer desde una altura, la fuerza aplicada a la cimentación de una prensa de forja, el movimiento de un automóvil cuando pasa por un bache y la vibración del suelo de una estructura de edificio durante un sismo.

Si la función forzada es periódica pero no armónica, puede ser reemplazada por la suma de funciones armónicas por medio del procedimiento de análisis armónico estudiado en la sección 1.11. Utilizando el principio de superposición, la respuesta del sistema se puede determinar superponiendo las respuestas producidas por las funciones forzadas armónicas individuales.

Por lo común, la respuesta de un sistema sometido a cualquier tipo de fuerza no periódica se determina mediante los siguientes métodos:

1. Integral de convolución.
2. Transformadas de Laplace.
3. Métodos numéricos.

Los dos primeros son analíticos, en los cuales la respuesta o solución se expresa en una forma que ayuda al estudio del comportamiento del sistema bajo la fuerza aplicada con respecto a varios parámetros y al diseñar el sistema. Por su parte, el tercer método se puede utilizar para hallar la respuesta de un sistema sometido a cualquier fuerza arbitraria para el cual una solución analítica es difícil o imposible de encontrar. Sin embargo, la solución hallada es aplicable sólo para el conjunto particular de valores de parámetro utilizados en la búsqueda de la solución. Esto hace difícil estudiar el comportamiento del sistema cuando los parámetros cambian. Este capítulo presenta los tres métodos de solución.

4.2 Respuesta bajo una fuerza periódica general

Cuando la fuerza externa $F(t)$ es periódica $\tau = 2\pi/\omega$, se puede expandir en una serie de Fourier (vea la sección 1.11):

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j\omega t \tag{4.1}$$

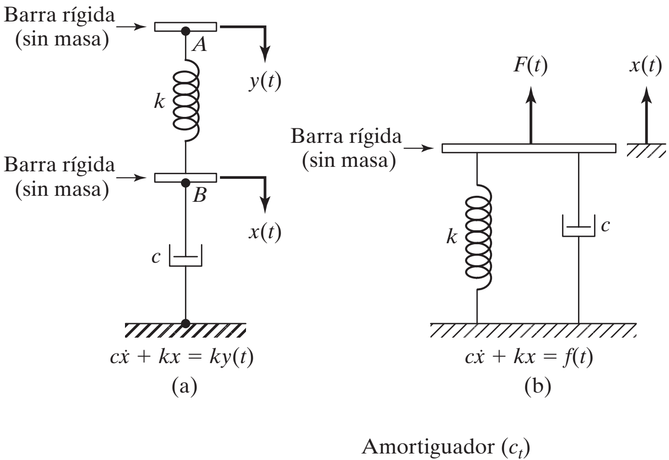
donde

$$a_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t\, dt, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

y

$$b_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t) \operatorname{sen} j\omega t\, dt, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

La respuesta de sistemas sometidos a fuerzas generales periódicas se considera en esta sección para sistemas de primero y segundo orden. Los sistemas de primer orden son aquellos para los cuales la



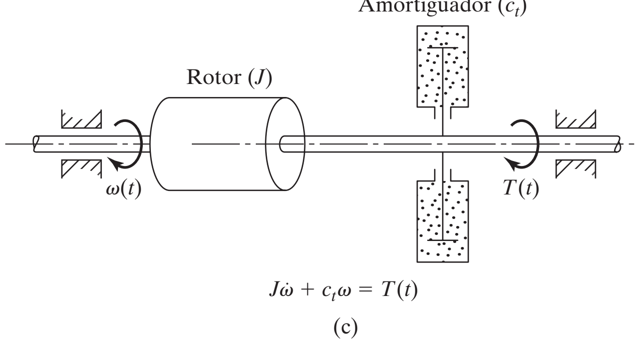


Figura 4.1 Ejemplos de sistemas de primer orden.

ecuación de movimiento es una ecuación diferencial de primer orden. Asimismo, los sistemas de segundo orden son aquellos para los cuales la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial de segundo orden. En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran ejemplos típicos de sistemas de primero y segundo orden, respectivamente.

4.2.1 Sistemas de primer orden

Considere un sistema de resorte-amortiguador sometido a una excitación periódica como se muestra en la figura 4.1(a). La ecuación de movimiento del sistema es

$$c\dot{x} + k(x - y) = 0 \tag{4.4}$$

donde $y(t)$ es un movimiento periódico (o excitación) impartido al sistema en el punto A (por ejemplo, por una leva). Si el desplazamiento periódico del punto A, $y(t)$, se expresa en la serie de Fourier como lo indica el lado derecho de la ecuación (4.1), la ecuación de movimiento del sistema se expresa como

$$\dot{x} + ax = ay = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \text{ sen } \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos \omega_j t \tag{4.5}$$

donde

$$a = \frac{k}{c}, \quad A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.6}$$

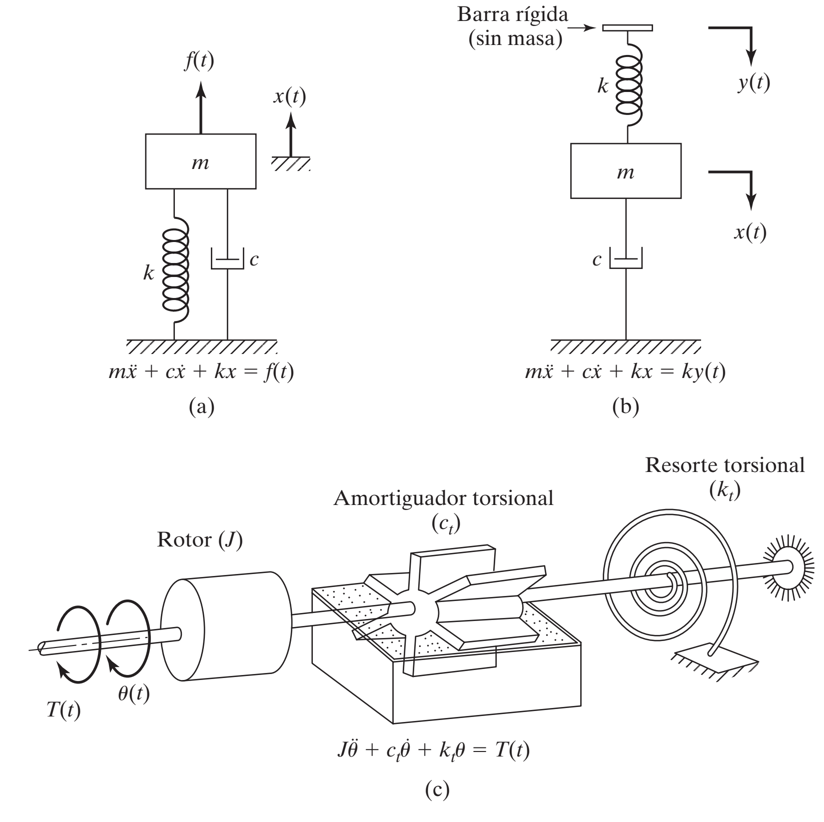


Figura 4.2 Ejemplos de sistemas de segundo orden.

La solución de la ecuación (4.5) se presenta en el ejemplo 4.1.

Ejemplo 4.1 Respuesta de un sistema de primer orden sometido a una fuerza periódica

Encuentre la respuesta del sistema de resorte-amortiguador que se muestra en la figura 4.1(a) sometido a una fuerza periódica con la ecuación de movimiento dada por la ecuación (4.5).

Solución: Se ve que el lado derecho de la ecuación de movimiento, la ecuación (4.5), es una constante más una suma lineal de funciones armónicas (seno y coseno). Utilizando el principio de superposición, la solución de estado estable de la ecuación (4.5) se determina sumando las soluciones de estado estable correspondientes a los términos forzados en el lado derecho de la ecuación (4.5).

La ecuación de movimiento correspondiente a la fuerza constante A_0 se expresa, con x_0 en lugar de x, como

$$\dot{x}_0 + ax_0 = A_0 \tag{E.1}$$

La solución de la ecuación (E.1) es (se puede verificar sustituyendo en la ecuación (E.1):

$$x_0(t) = \frac{A_0}{a} \tag{E.2}$$

La ecuación de movimiento bajo la fuerza A_j sen $\omega_j t$ se expresa como

$$\dot{x}_j + ax_j = A_j \operatorname{sen} \omega_j t \tag{E.3}$$

en la cual la solución de estado estable de la ecuación (E.3) se supone como

$$x_j(t) = X_j \operatorname{sen}(\omega_j t - \phi_j) \tag{E.4}$$

donde la magnitud X_j y el ángulo de fase ϕ_j indican las constantes desconocidas que se van a determinar. La solución en la ecuación (E.4) se expresa como la parte imaginaria de la siguiente solución en forma compleja:

$$x_j(t) = \operatorname{Im}\lfloor X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j)} \rfloor = X_j e^{i\omega_j t} e^{-i\phi_j} = U_j e^{i\omega_j t} \tag{E.5}$$

donde U_j indica el número complejo:

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j} \tag{E.6}$$

Observando que la derivada de $x_j(t)$ con respecto al tiempo es

$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} \tag{E.7}$$

La ecuación (E.3) se puede expresar con el término forzado en forma compleja (en el entendido de que sólo nos interesa la parte imaginaria de la solución):

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j e^{i\omega_j t} = A_j(\cos \omega_j t + i \operatorname{sen} \omega_j t) \tag{E.8}$$

Si insertamos las ecuaciones (E.5) y (E.7) en la ecuación (E.8), obtenemos

$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + a U_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t} \tag{E.9}$$

Como $e^{i\omega_j t} \neq 0$, la ecuación (E.9) se reduce a

$$i\omega_j U_j + a U_j = A_j \tag{E.10}$$

o

$$U_j = \frac{A_j}{a + i\omega_j} \tag{E.11}$$

Las ecuaciones (E.6) y (E.11) dan por resultado

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j} = \frac{A_j}{a + i\omega_j} \tag{E.12}$$

Expresando $\dfrac{1}{a + i\omega_j}$ como

$$\frac{1}{a + i\omega_j} = \frac{a - i\omega_j}{(a + i\omega_j)(a - i\omega_j)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} - i\frac{\omega_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}\right] \tag{E.13}$$

La ecuación (E.13) se reescribe como

$$\frac{1}{a + i\omega_j} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}[\cos \phi_j - i \operatorname{sen} \phi_j] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} e^{-i\phi_j} \tag{E.14}$$

donde

$$\phi_j = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_j}{a}\right) \tag{E.15}$$

Utilizando la ecuación (E.14) en la ecuación (E.12), vemos que

$$X_j = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}, \qquad \phi_j = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_j}{a}\right) \tag{E.16}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.4) da la solución de la ecuación (E.3) con X_j y ϕ_j dados por la ecuación (E.16). La ecuación de movimiento bajo la fuerza $B_j \cos \omega_j t$ se expresa como

$$\dot{x}_j + a x_j = B_j \cos \omega_j t \tag{E.17}$$

Suponiendo la solución de estado estable de la ecuación (E.17) en la forma

$$x_j(t) = Y_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \tag{E.18}$$

las constantes Y_j y ϕ_j se determinan procediendo como en el caso de la solución de la ecuación (E.3) como

$$Y_j = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}, \qquad \phi_j = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_j}{a}\right) \tag{E.19}$$

La solución de estado estable completa (o particular) de la ecuación (4.5) se expresa como

$$\begin{aligned} x_p(t) = {} & \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \operatorname{sen}\left\{\omega_j t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_j}{a}\right)\right\} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos\left\{\omega_j t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_j}{a}\right)\right\} \end{aligned} \tag{E.20}$$

donde la ecuación (4.6) da a, A_0, A_j, B_j y ω_j.

Nota: La suma de las soluciones de estado estable homogénea y particular da la solución total de la ecuación (4.5):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{E.21}$$

donde la ecuación (E.20) da la solución particular y la solución homogénea de la ecuación (4.5) se expresa como

$$x_h(t) = Ce^{-at} \tag{E.22}$$

donde C es una constante desconocida que se tiene que determinar utilizando la condición inicial del sistema. La solución total se expresa como

$$x(t) = Ce^{-at} + \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \operatorname{sen}(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \tag{E.23}$$

Cuando se utiliza la condición inicial $x(t = 0) = x_0$ en la ecuación (E.23), obtenemos

$$x_0 = C + \frac{A_0}{a} - \sum_{j=1}^{\infty} X_j \operatorname{sen} \phi_j + \sum_{j=1}^{\infty} Y_i \cos \phi_j \tag{E.24}$$

la cual da

$$C = x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \operatorname{sen} \phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos \phi_j \tag{E.25}$$

Por lo tanto, la solución total de la ecuación (4.5) es

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \operatorname{sen} \phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos \phi_j \right] e^{-at} + \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos(\omega_d t - \phi_j) \tag{E.26}$$

Las características de la respuesta del sistema se pueden estudiar si consideramos un tipo más simple de función forzada mediante el ejemplo siguiente.

■

Ejemplo 4.2 Respuesta de un sistema de primer orden

Determine la respuesta de un sistema resorte-amortiguador, semejante al que se muestra en la figura 4.1(a) con la ecuación de movimiento:

$$\dot{x} + 1.5x = 7.5 + 4.5 \cos t + 3 \operatorname{sen} 5t$$

Suponga la solución inicial como $x(t = 0) = 0$.

Solución: La ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$\dot{x} + 1.5x = 7.5 + 4.5 \cos t + 3 \operatorname{sen} 5t \tag{E.1}$$

Primero hallamos la solución de la ecuación diferencial considerando un término forzado a la vez dado en el lado derecho de la ecuación (E.1) y luego sumamos las soluciones para determinar la solución total de la ecuación (E.1). Para el término constante, la ecuación a resolver es

$$\dot{x} + 1.5x = 7.5 \tag{E.2}$$

La solución de la ecuación (E.2) es $x(t) = 7.5/1.5 = 5$. Para el término coseno, la ecuación a resolver está dada por

$$\dot{x} + 1.5x = 4.5 \cos t \tag{E.3}$$

Utilizando la solución de estado estable indicada en la ecuación (E.21) del ejemplo 4.1, expresamos la solución de la ecuación (E.3) como

$$x(t) = Y \cos(t - \phi) \tag{E.4}$$

donde

$$Y = \frac{4.5}{\sqrt{(1.5)^2 + (1)^2}} = \frac{4.5}{\sqrt{3.25}} = 2.4961 \tag{E.5}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1.5}\right) = 0.5880 \text{ rad} \tag{E.6}$$

Asimismo, para el término seno, la ecuación a resolver es

$$\dot{x} + 1.5x = 3 \text{ sen } 5t \tag{E.7}$$

Aplicando la solución de estado estable indicada en la ecuación (E.4) del ejemplo 4.1, expresamos la solución de la ecuación (E.7) como

$$x(t) = X \text{ sen}(5t - \phi) \tag{E.8}$$

donde

$$X = \frac{3}{\sqrt{(1.5)^2 + (5)^2}} = \frac{3}{\sqrt{27.25}} = 0.5747 \tag{E.9}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{1.5}\right) = 1.2793 \text{ rad} \tag{E.10}$$

Por lo tanto, la suma de las soluciones de las ecuaciones (E.2), (E.3) y (E.7) da la solución particular total de la ecuación (E.1):

$$x(t) = 5 + 2.4961 \cos(t - 0.5880) + 0.5747 \text{ sen}(5t - 1.2793) \tag{E.11}$$

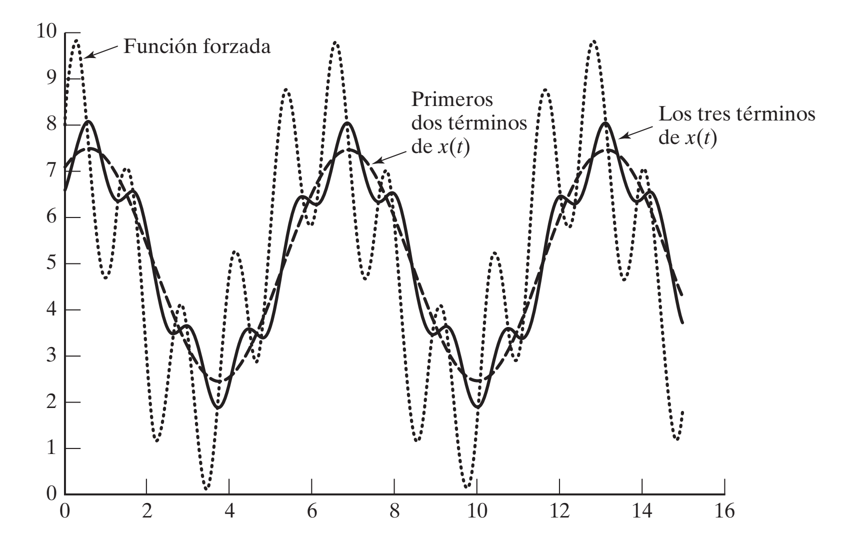


Figura 4.3

La función forzada dada por la expresión del lado derecho en la ecuación (E.1) y la respuesta de estado estable del sistema dado por la ecuación (E.11) se muestran gráficamente en la figura 4.3. Los dos primeros términos de la respuesta (dados por los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (E.11) también se muestran en la figura 4.3. Se ve que el sistema no filtra el término constante. Sin embargo, sí filtra la frecuencia baja (término coseno) hasta cierto grado y la alta frecuencia (término seno) a un grado mayor.

■

4.2.2 Sistemas de segundo orden

Sométase un sistema de resorte-masa-amortiguador, figura 4.2(a), a una fuerza periódica. Éste es un sistema de segundo orden porque la ecuación rectora es una ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{4.7}$$

Si la función forzada $f(t)$ es periódica, se puede expresar en la forma de serie de Fourier de modo que la ecuación de movimiento se convierta en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j\omega t \tag{4.8}$$

La determinación de la solución de la ecuación (4.8) se ilustra en el ejemplo 4.3.

Ejemplo 4.3 Respuesta de un sistema de segundo orden sometido a una fuerza periódica

Determine la respuesta de un sistema de resorte-masa-amortiguador sujeto a una fuerza periódica con la ecuación de movimiento dada por la ecuación (4.8). Suponga las condiciones iniciales como cero.

Solución: El lado derecho de la ecuación (4.8) es una constante más una suma de funciones armónicas. Utilizando el principio de superposición, la solución de estado estable de la ecuación (4.4) es la suma de las soluciones de estado estable de las siguientes ecuaciones:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \tag{E.1}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t \tag{E.2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \operatorname{sen} j\omega t \tag{E.3}$$

Observando que la solución de la ecuación (E.1) está dada por

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} \tag{E.4}$$

y, utilizando los resultados de la sección 3.4, las soluciones de las ecuaciones (E.2) y (E.3) se expresan, respectivamente, como

$$x_p(t) = \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \tag{E.5}$$

$$x_p(t) = \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \operatorname{sen}(j\omega t - \phi_j) \tag{E.6}$$

donde

$$\phi_j = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1 - j^2r^2}\right) \tag{E.7}$$

y

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \tag{E.8}$$

Por lo tanto, la solución de estado estable completa de la ecuación (4.8) es resultado de

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_j/k)}{\sqrt{(1 - j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \operatorname{sen}(j\omega t - \phi_j) \tag{E.9}$$

Se ve por la solución de la ecuación (E.9), que la amplitud y desplazamiento de fase correspondientes al término j-ésimo dependen de j. Si $j\omega = \omega_n$, para cualquier j, la amplitud del armónico correspondiente será comparativamente grande. Esto será particularmente cierto con valores pequeños de j y ζ. Además, a medida que j crece, la amplitud se reduce y los términos correspondientes tienden a cero. Por lo tanto, los primeros términos breves suelen ser suficientes para obtener la respuesta con una razonable exactitud.

La solución dada por la ecuación (E.9) indica la respuesta de estado estable del sistema. La parte transitoria de la solución que surge de las condiciones iniciales también se puede incluir para hallar la solución completa. Para esto tenemos que evaluar las constantes arbitrarias fijando el valor de la solución completa y sus derivadas a los valores especificados de desplazamiento inicial $x(0)$ y la velocidad inicial $\dot{x}(0)$. El resultado es una expresión complicada para la parte transitoria de la solución total.

■

Ejemplo 4.4 Vibración periódica de una válvula hidráulica

En el estudio de las vibraciones de válvulas utilizadas en sistemas de control hidráulico, la válvula y su vástago elástico se modelan como un sistema amortiguado de resorte-masa, como se muestra en la figura 4.4(a). Además de la fuerza del resorte y de la fuerza de amortiguamiento, existe una presión de fluido sobre la válvula que cambia con la cantidad de apertura o cierre de la válvula. Encuentre la respuesta de estado estable de la válvula cuando la presión en la cámara varía como se indica en la figura 4.4(b). Suponga que $k = 2\,500$ N/m, $c = 10$ N-s/m y $m = 0.25$ kg.

Solución: La válvula se puede considerar como una masa conectada a un resorte y un amortiguador por un lado y sometida a una función forzada $F(t)$ por el otro. La función forzada se expresa como

$$F(t) = Ap(t) \tag{E.1}$$

donde A es el área de sección transversal de la cámara, dada por

$$A = \frac{\pi(50)^2}{4} = 625\pi \text{ mm}^2 = 0.000625\pi \text{ m}^2 \tag{E.2}$$

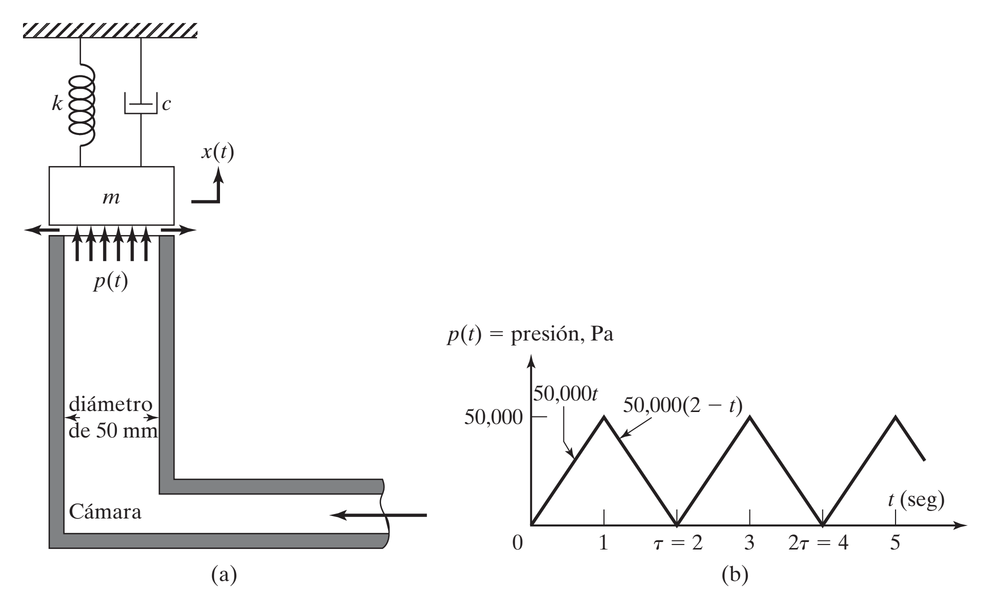


Figura 4.4 Vibración periódica de una válvula hidráulica.

y $p(t)$ es la presión que actúa sobre la válvula en cualquier instante t. Como $p(t)$ es periódica con periodo $\tau = 2$ segundos y A es una constante, $F(t)$ también es una función periódica de periodo $\tau = 2$ segundos. La frecuencia de la función forzada es $\omega = (2\pi/\tau) = \pi$ rad/s. $F(t)$ se expresa en la forma de una serie de Fourier como

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots \tag{E.3}$$

donde las ecuaciones (4.2) y (4.3) dan a_j y b_j. Como la función $F(t)$ está dada por

$$F(t) = \begin{cases} 50{,}000At & \text{durante } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ 50{,}000A(2 - t) & \text{durante } \dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \tau \end{cases} \tag{E.4}$$

los coeficientes de Fourier a_j y b_j se calculan con ayuda de las ecuaciones (4.2) y (4.3):

$$a_0 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At\,dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t)\,dt\right] = 50{,}000A \tag{E.5}$$

$$a_1 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \cos \pi t\,dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \cos \pi t\,dt\right]$$

$$= -\frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \tag{E.6}$$

$$b_1 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \operatorname{sen} \pi t\,dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \operatorname{sen} \pi t\,dt\right] = 0 \tag{E.7}$$

$$a_2 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \cos 2\pi t\,dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \cos 2\pi t\,dt\right] = 0 \tag{E.8}$$

$$b_2 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \text{ sen } 2\pi t\, dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \text{ sen } 2\pi t\, dt\right] = 0 \tag{E.9}$$

$$a_3 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \cos 3\pi t\, dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \cos 3\pi t\, dt\right]$$

$$= -\frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \tag{E.10}$$

$$b_3 = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50{,}000At \text{ sen } 3\pi t\, dt + \int_1^2 50{,}000A(2 - t) \text{ sen } 3\pi t\, dt\right] = 0 \tag{E.11}$$

Del mismo modo, obtenemos $a_4 = a_6 = \cdots = b_4 = b_5 = b_6 = ... = 0$. Considerando sólo los primeros tres armónicos, la función forzada se puede escribir de forma aproximada como:

$$F(t) \simeq 25{,}000A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \cos 3\omega t \tag{E.12}$$

La respuesta de estado estable de la válvula a la función forzada de la ecuación (E.12) se expresa como

$$x_p(t) = \frac{25{,}000A}{k} - \frac{(2 \times 10^5 A/(k\pi^2))}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\omega t - \phi_1)$$

$$- \frac{(2 \times 10^5 A/(9k\pi^2))}{\sqrt{(1 - 9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(3\omega t - \phi_3) \tag{E.13}$$

La frecuencia natural de la válvula está dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{0.25}} = 100 \text{ rad/s} \tag{E.14}$$

y la frecuencia forzada la da

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s} \tag{E.15}$$

Por lo tanto, la relación de frecuencia se obtiene:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{100} = 0.031416 \tag{E.16}$$

y la relación de amortiguamiento:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10.0}{2(0.25)(100)} = 0.2 \tag{E.17}$$

Los ángulos de fase ϕ_1 y ϕ_3 se calculan como sigue:

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 0.2 \times 0.031416}{1 - 0.031416^2}\right) = 0.0125664 \text{ rad} \tag{E.18}$$

y

$$\phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{6\zeta r}{1 - 9r^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{6 \times 0.2 \times 0.031416}{1 - 9(0.031416)^2}\right) = 0.0380483 \text{ rad} \tag{E.19}$$

De acuerdo con las ecuaciones (E.2) y (E.14) a (E.19), la solución se escribe como

$$x_p(t) = 0.019635 - 0.015930 \cos(\pi t - 0.0125664) \\ - 0.0017828 \cos(3\pi t - 0.0380483) \text{ m} \tag{E.20}$$

■

Ejemplo 4.5 Respuesta total bajo excitación armónica de la base

Encuentre la respuesta total de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad sometido a excitación armónica de la base con los siguientes datos: $m = 10$ kg, $c = 20$ N-s/m, $k = 400$ N/m, $y(t) = 0.05$ sen $5t$ m, $x_0 = 0.02$ m, $\dot{x}_0 = 10$ m/s.

Solución: La ecuación de movimiento del sistema la da (vea la ecuación (3.65):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY \text{ sen } \omega t + c\omega Y \cos \omega t \tag{E.1}$$

Observando que la ecuación (E.1) es semejante a la (4.8) con $a_0 = 0$, $a_1 = c\omega Y$, $b_1 = kY$, y $a_i = b_i = 0$; $i = 2, 3, \ldots$, la respuesta de estado estable del sistema se expresa, utilizando la ecuación (E.9) del ejemplo 4.3, como

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}\left[\frac{a_1}{k}\cos(\omega t - \phi_1) + \frac{b_1}{k}\text{sen}(\omega t - \phi_1)\right] \tag{E.2}$$

Para los datos dados, encontramos

$$Y = 0.05 \text{ m}, \quad \omega = 5 \text{ rad/s}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5}{20} = 0.25, \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20}{2\sqrt{(4000)(10)}} = 0.05$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n = 19.975 \text{ rad/s}$$

$$a_1 = c\omega Y = (20)(5)(0.05) = 5, \quad b_1 = kY = (4000)(0.05) = 200$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2(0.05)(0.25)}{1 - (0.25)^2}\right) = 0.02666 \text{ rad}$$

$$\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} = \sqrt{(1 - 0.25^2)^2 + (2(0.05)(0.25))^2} = 0.937833.$$

Enseguida se da la solución de la ecuación homogénea (vea la ecuación 2.70)):

$$x_h(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) = X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) \tag{E.3}$$

donde X_0 y ϕ_0 son constantes desconocidas. La solución total se puede expresar como la superposición de $x_h(t)$ y $x_p(t)$ como

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) + \frac{1}{0.937833}\left[\frac{5}{4000}\cos(5t - \phi_1) + \frac{200}{4000}\operatorname{sen}(5t - \phi_1)\right] \\ &= X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) + 0.001333 \cos(5t - 0.02666) \\ &\quad + 0.053314 \operatorname{sen}(5t - 0.02666) \end{aligned} \tag{E.4}$$

donde las incógnitas X_0 y ϕ_0 se pueden hallar a partir de las condiciones iniciales. La velocidad de la masa se expresa con la ecuación (E.4) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) &= -X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) - 19.975 X_0 e^{-t} \operatorname{sen}(19.975t - \phi_0) \\ &\quad - 0.006665 \operatorname{sen}(5t - 0.02666) + 0.266572 \cos(5t - 0.02666) \end{aligned} \tag{E.5}$$

Utilizando las ecuaciones (E.4) y (E.5), encontramos

$$x_0 = x(t = 0) = 0.02 = X_0 \cos \phi_0 + 0.001333 \cos(0.02666) - 0.053314 \operatorname{sen}(0.02666)$$

o

$$X_0 \cos \phi_0 = 0.020088 \tag{E.6}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = \dot{x}(t = 0) = 10 &= -X_0 \cos \phi_0 + 19.975 X_0 \operatorname{sen} \phi_0 \\ &\quad + 0.006665 \operatorname{sen}(0.02666) + 0.266572 \cos(0.02666) \end{aligned}$$

o

$$-X_0 \cos \phi_0 + 19.975 \operatorname{sen} \phi_0 = 9.733345 \tag{E.7}$$

La solución de las ecuaciones (E.6) y (E.7) da por resultado $X_0 = 0.488695$ y $\phi_0 = 1.529683$ rad. Por lo tanto, la respuesta total de masa sometida a excitación de la base, en metros, está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.488695 e^{-t} \cos(19.975t - 1.529683) \\ &\quad + 0.001333 \cos(5t - 0.02666) + 0.053314 \operatorname{sen}(5t - 0.02666) \end{aligned} \tag{E.8}$$

Nota: La ecuación (E.8) se traza en el ejemplo 4.32.

■

4.3 Respuesta bajo una fuerza periódica de forma irregular

En algunos casos, la fuerza que actúa en un sistema puede ser bastante irregular y se puede determinar sólo experimentalmente. Ejemplos de tales fuerzas incluyen las fuerzas inducidas por el viento y los sismos. En esos casos, las fuerzas estarán disponibles en forma gráfica y no se puede encontrar ninguna expresión analítica para describir $F(t)$. En ocasiones, el valor de $F(t)$ puede estar disponible sólo en algunos puntos discretos $t_1, t_2, ..., t_N$. En todos los casos es posible encontrar los coeficientes de Fourier por medio de un procedimiento de integración numérica, como se describe en la sección 1.11. Si $F_1, F_2, ..., F_N$ indica los valores de $F(t)$ en $t_1, t_2, ..., t_N$, respectivamente, donde N implica un número par de puntos equidistantes en un periodo $\tau(\tau = N\Delta t)$, como se muestra en la figura 4.5, la aplicación de la regla trapezoidal [4.1] da por resultado

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \tag{4.9}$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \cos\frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \operatorname{sen}\frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{4.11}$$

Una vez conocidos los coeficientes de Fourier a_0, a_j y b_j, la respuesta de estado estable del sistema se determina utilizando la ecuación (4.9) con

$$r = \left(\frac{2\pi}{\tau\omega_n}\right) \tag{4.12}$$

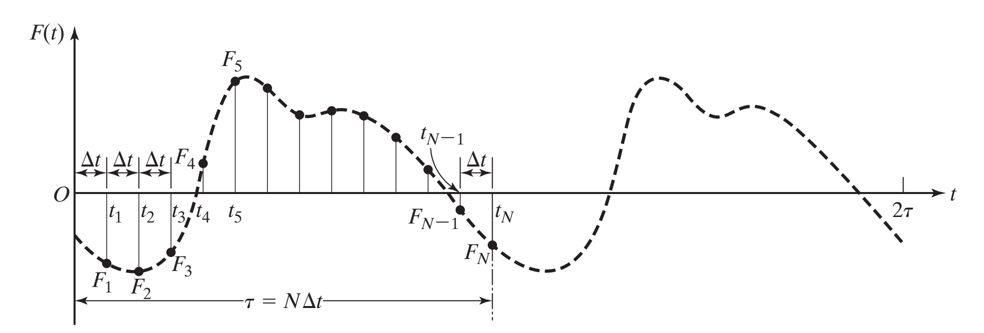


Figura 4.5 Una función forzada irregular.

Ejemplo 4.6 Vibración de estado estable de una válvula hidráulica

Encuentre la respuesta de estado estable de la válvula del ejemplo 4.4 si las fluctuaciones de presión en la cámara son periódicas. A continuación se dan los valores de presión medidos a intervalos de 0.01 segundos en un ciclo.

Tiempo, t_1 (segundos)	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
$p_i = p(t_i)$ (kN/m^2	0	20	34	42	49	53	70	60	36	22	16	7	0

Solución: Como las fluctuaciones de presión sobre la válvula son periódicas, el análisis de Fourier de los datos de presión dados en un ciclo da

$$\begin{aligned} p(t) &= 34083.3 - 26996.0 \cos 52.36t + 8307.7 \operatorname{sen} 52.36t \\ &\quad + 1416.7 \cos 104.72t + 3608.3 \operatorname{sen} 104.72t \\ &\quad - 5833.3 \cos 157.08t - 2333.3 \operatorname{sen} 157.08t + \ldots \text{ N/m}^2 \end{aligned} \tag{E.1}$$

(Vea el ejemplo 1.20). Otras cantidades necesarias para el cálculo son

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0.12} = 52.36 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = 100 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.5236$$

$$\zeta = 0.2$$

$$A = 0.000625\pi \text{ m}^2$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 0.2 \times 0.5236}{1 - 0.5236^2}\right) = 16.1°$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4\zeta r}{1 - 4r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4 \times 0.2 \times 0.5236}{1 - 4 \times 0.5236^2}\right) = -77.01°$$

$$\phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{6\zeta r}{1 - 9r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6 \times 0.2 \times 0.5236}{1 - 9 \times 0.5236^2}\right) = -23.18°$$

La respuesta de estado estable de la válvula se expresa, utilizando la ecuación (E.9) del ejemplo 4.3, como

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{34083.3A}{k} - \frac{(26996.0A/k)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(52.36t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{(8309.7A/k)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(52.36t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{(1416.7A/k)}{\sqrt{(1 - 4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \cos(104.72t - \phi_2) \\ &\quad + \frac{(3608.3A/k)}{\sqrt{(1 - 4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(104.72t - \phi_2) \\ &\quad - \frac{(5833.3A/k)}{\sqrt{(1 - 9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(157.08t - \phi_3) \\ &\quad - \frac{(2333.3A/k)}{\sqrt{(1 - 9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \operatorname{sen}(157.08t - \phi_3) \end{aligned}$$

■

4.4 Respuesta bajo una fuerza no periódica

Hemos visto que las fuerzas periódicas de cualquier forma de onda general se pueden representar mediante series de Fourier como una superposición de componentes armónicos de varias frecuencias. La respuesta de un sistema lineal se encuentra superponiendo la respuesta armónica a cada una de las fuerzas de excitación. Cuando la fuerza de excitación $F(t)$ es no periódica, como la producida por la onda expansiva de una explosión, se requiere un método diferente de calcular la respuesta. Se pueden utilizar varios métodos para hallar la respuesta del sistema a una excitación arbitraria. Algunos de estos métodos son los siguientes:

1. Representar la excitación por medio de una integral de Fourier.
2. Utilizar el método de integral de convolución.
3. Utilizar el método de transformadas de Laplace
4. Integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento (solución numérica de ecuaciones diferenciales).

En las siguientes secciones expondremos los métodos 2, 3 y 4. (Los métodos numéricos también se consideran en el capítulo 11 en el sitio web de este libro).

4.5 Integral de convolución

Por lo común, la magnitud de una fuerza de excitación no periódica varía con el tiempo; actúa durante un periodo especificado y luego cesa. La forma más simple es la fuerza impulsiva, la cual es de una gran magnitud F y actúa durante un tiempo muy corto Δt. Por la dinámica sabemos que el impulso se puede medir si se encuentra el cambio de momento (o cantidad de movimiento) del sistema que provoca [4.2]. Si $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ indican las velocidades de la masa m antes y después de la aplicación del impulso, tenemos

$$\text{Impulso} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \tag{4.12}$$

Designando la magnitud del impulso $F\Delta t$ como $\boldsymbol{F}$, podemos escribir, en general,

$$\boldsymbol{F} = \int_t^{t+\Delta t} F\,dt \tag{4.13}$$

Un impulso unitario que actúa en $t = 0(\boldsymbol{f})$ se define como

$$\boldsymbol{f} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} F\,dt = F\,dt = 1 \tag{4.14}$$

Se ve que para que $F\,dt$ tenga un valor finito, F tiende a infinito (puesto que dt tiende a cero).

El impulso unitario, $\boldsymbol{f} = 1$, que actúa en $t = 0$, también se indica por medio de la función delta Dirac como

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}\,\delta(t) = \delta(t) \tag{4.15}$$

y el impulso de magnitud $\boldsymbol{F}$, que actúa en $t = 0$, se indica como[1]

$$F = \boldsymbol{F}\,\delta(t) \tag{4.16}$$

4.5.1 Respuesta a un impulso

Primero consideramos la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad a una excitación de impulso; este caso es importante al estudiar la respuesta ante excitaciones más generales. Considere un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado sometido a un impulso unitario en $t = 0$, como se muestra en las figuras 4.6(a) y (b). Para un sistema no amortiguado, la solución de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{4.17}$$

la da la ecuación (2.72) como

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\,\text{sen}\,\omega_d t\right\} \tag{4.18}$$

donde

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{4.19}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \tag{4.20}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.21}$$

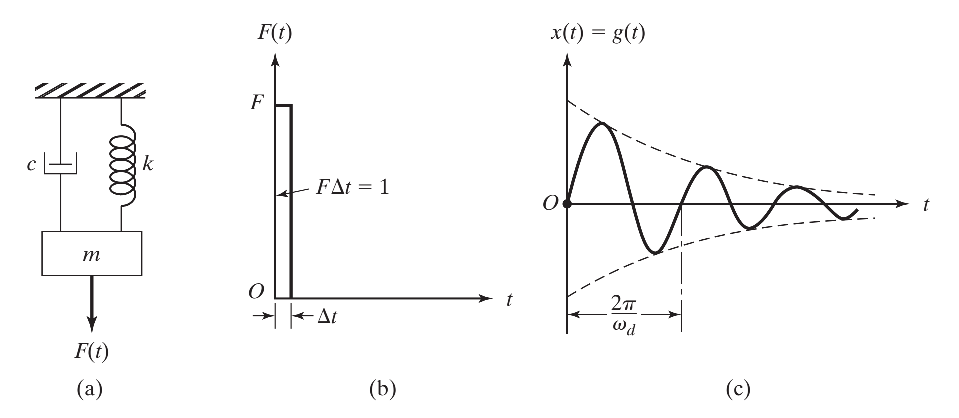


Figura 4.6 Un sistema de un solo grado de libertad sometido a un impulso.

[1] El impulso unitario, $\boldsymbol{f}$, que actúa en $t = 0$, también se indica por medio de la función delta Dirac, $\delta(t)$. Las propiedades de la función delta Dirac en el tiempo $t = \tau$, indicada como $\delta(t - \tau)$, son

$$\delta(t - \tau) = 0 \quad \text{para } t \neq \tau;$$

$$\int_0^\infty \delta(t - \tau)\,dt = 1, \qquad \int_0^\infty \delta(t - \tau)F(t)\,dt = F(\tau)$$

donde $0 < \tau < \infty$. Por lo tanto, un impulso de magnitud $\boldsymbol{F}$, que actúa en $t = \tau$ se puede indicar como $F(t) = \boldsymbol{F}\delta(t - \tau)$.

Si la masa está en reposo antes de que se aplique el impulso unitario ($x = \dot{x} = 0$ para $t < 0$ o en $t = 0^-$), obtenemos, de la relación de impulso-cantidad de movimiento,

$$\text{Impulso} = \boldsymbol{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0 \tag{4.22}$$

Por lo tanto, las condiciones iniciales están dadas por

$$x(t = 0) = x_0 = 0 \tag{4.23}$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \tag{4.24}$$

De acuerdo con las ecuaciones (4.23) y (4.24), la ecuación (4.18) se reduce a

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{4.25}$$

La ecuación (4.25) da la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad a un impulso unitario, la cual también se conoce como *función de respuesta de impulso*, simbolizada por $g(t)$. La función $g(t)$, ecuación (4.25), se muestra en la figura 4.6(c).

Si la magnitud del impulso es $\boldsymbol{F}$ en lugar de la unidad, la velocidad inicial $\dot{x}_0$ es $\boldsymbol{F}/m$ y la respuesta del sistema se convierte en

$$x(t) = \frac{\boldsymbol{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t = \boldsymbol{F}g(t) \tag{4.26}$$

Si el impulso $\boldsymbol{F}$ se aplica en un tiempo arbitrario $t = \tau$, como se muestra en la figura 4.7(a), modificará la velocidad cuando $t = \tau$ por una cantidad $\boldsymbol{F}/m$. Suponiendo que $x = 0$ hasta que se aplica el impulso, la ecuación (4.26) da el desplazamiento x en cualquier tiempo subsiguiente t, provocado

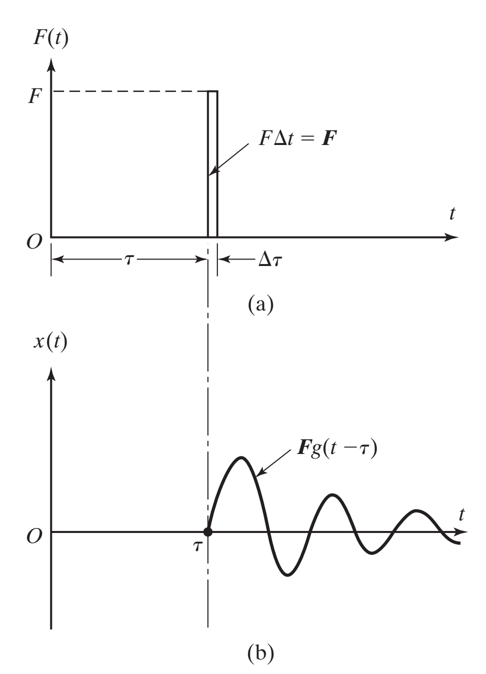


Figura 4.7 Respuesta de impulso.

por un cambio de la velocidad en el tiempo τ, con t reemplazado por el tiempo transcurrido después de la aplicación del impulso; es decir, $t - \tau$. Por lo tanto, obtenemos

$$x(t) = \boldsymbol{F}g(t - \tau) \tag{4.27}$$

Esto se muestra en la figura 4.7(b).

Ejemplo 4.7 Respuesta de una estructura sometida a impacto

En la prueba de vibración de una estructura se utiliza un martillo de impacto con una celda de carga para medir la fuerza del impacto, como se muestra en la figura 4.8(a). Suponiendo que $m = 5$ kg, $k = 2000$ N/m, $c = 10$ N-s/m y $\boldsymbol{F} = 20$ N-s, encuentre la respuesta del sistema.

Solución: Con los datos conocidos podemos calcular

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{5}} = 20 \text{ rad/s}, \qquad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{2000(5)}} = 0.05$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n = 19.975 \text{ rad/s}$$

Suponiendo que se da el impacto en el instante $t = 0$, obtenemos (con la ecuación (4.26)) la respuesta del sistema como

$$x_1(t) = \boldsymbol{F}\,\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\,\text{sen}\,\omega_d t$$

$$= \frac{20}{(5)(19.975)}\,e^{-0.05(20)t}\,\text{sen}\,19.975t = 0.20025e^{-t}\,\text{sen}\,19.975t \text{ m} \tag{E.1}$$

Nota: La gráfica de la ecuación (E.1) se muestra en el ejemplo 4.33.

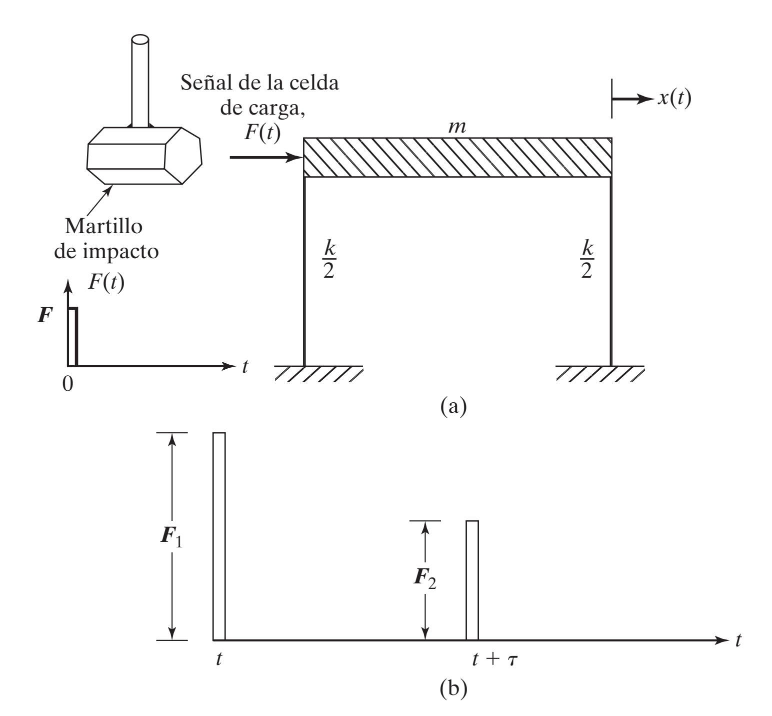


Figura 4.8 Prueba estructural empleando un martillo de impacto.

■

Ejemplo 4.8 Respuesta de una estructura sometida a un doble impacto

En muchos casos, impartir sólo un impacto a la estructura con un martillo de impacto es difícil. En ocasiones ocurre en un segundo impacto después del primero, como se muestra en la figura 4.8(b), y la fuerza aplicada, $F(t)$, se expresa como

$$F(t) = \boldsymbol{F}_1\, \delta(t) + \boldsymbol{F}_2\, \delta(t - \tau)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta Dirac y τ indica el tiempo entre dos impactos de magnitudes $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$. Para una estructura con $m = 5$ kg, $k = 2000$ N/m, $c = 10$ N-s/m y $F(t) = 20\delta(t) + 10\delta(t - 0.2)$ N, encuentre la respuesta de la estructura.

Solución: Con los datos conocidos, hallamos que $\omega_n = 20$ rad/s (vea la solución del ejemplo 4.7), $\zeta = 0.05$ y $\omega_d = 19.975$ rad/s. La ecuación (E.1) del ejemplo 4.7 da la respuesta producida por el impulso $\boldsymbol{F}_1\, \delta(t)$, mientras que la respuesta producida por el impacto $\boldsymbol{F}_2\, \delta(t - 0.2)$ se determina con las ecuaciones (4.27) y (4.26) como

$$x_2(t) = \boldsymbol{F}_2 \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d\,(t - \tau) \tag{E.1}$$

Para $\tau = 0.2$, la ecuación (E.1) se escribe como

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{10}{(5)\,(19.975)}\, e^{-0.05(20)(t-0.2)} \operatorname{sen} 19.975(t - 0.2) \\ &= 0.100125\mathrm{e}^{-(t-0.2)} \operatorname{sen} 19.975(t - 0.2); \qquad t > 0.2 \end{aligned} \tag{E.2}$$

Utilizando la superposición de las dos respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la respuesta a consecuencia de dos impactos, en metros, se expresa como

$$x(t) = \begin{Bmatrix} 0.20025e^{-t} \operatorname{sen} 19.975t;\ 0 \le t \le 0.2 \\ 0.20025e^{-t} \operatorname{sen} 19.975t + 0.100125e^{-(t-0.2)} \operatorname{sen} 19.975(t - 0.2);\ t > 0.2 \end{Bmatrix} \tag{E.3}$$

Nota: La gráfica de la ecuación (E.3) se muestra en el ejemplo 4.33.

■

4.5.2 Respuesta a una condición forzada general

Ahora consideramos la respuesta del sistema sometido a una fuerza externa arbitraria $F(t)$, mostrada en la figura 4.9. Se puede suponer que esta fuerza se compone de una serie de impulsos de magnitud variable. Suponiendo que en el tiempo τ, la fuerza $F(\tau)$ actúa en el sistema durante un corto periodo de tiempo $\Delta\tau$, el impulso que actúa en el tiempo $t = \tau$ es $F(\tau)\,\Delta\tau$. En cualquier tiempo t, el tiempo transcurrido a partir del impulso es $t - \tau$, de modo que la ecuación (4.27) da la respuesta del sistema en el tiempo t debido a este impulso solo con $\boldsymbol{F} = F(\tau)\,\Delta\tau$:

$$\Delta x(t) = F(\tau)\,\Delta\tau\, g(t - \tau) \tag{4.28}$$

La respuesta total en el tiempo t se encuentra sumando todas las respuestas producidas por los impulsos elementales que actúan en todos los tiempos τ:

$$x(t) \simeq \sum F(\tau) g(t - \tau)\, \Delta\tau \tag{4.29}$$

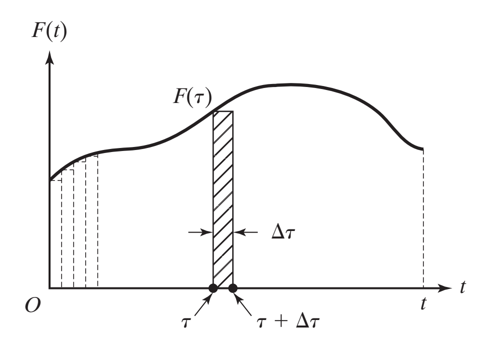


Figura 4.9 Función forzada arbitraria (no periódica).

Si $\Delta\tau \rightarrow 0$ y reemplazamos la suma por la integración, obtenemos

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau)\, d\tau \tag{4.30}$$

Sustituyendo la ecuación (4.25) en la ecuación (4.30), obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_d (t - \tau)\, d\tau \tag{4.31}$$

la cual representa la respuesta de un sistema subamortiguado de un solo grado de libertad a la excitación arbitraria $F(t)$. Observe que la ecuación (4.31) no considera el efecto de las condiciones iniciales del sistema, porque se supone que la masa está en reposo antes de la aplicación del impulso, como lo implican las ecuaciones (4.25) y (4.28). La integral en la ecuación (4.30) o ecuación (4.31) se conoce como *integral de convolución* o *de Duhamel*. En muchos casos la función $F(t)$ tiene una forma que permite una integración explícita de la ecuación (4.31). Si tal integración no es posible, podemos evaluarla numéricamente sin mucha dificultad, como se ilustra en la sección 4.9 en el capítulo 11. En la referencia [4.6] se da una discusión elemental de la integral de Duhamel en el análisis de vibración.

4.5.3 Respuesta a excitación de la base

Si un sistema de resorte-masa-amortiguador se somete a una excitación de la base arbitraria descrita por su desplazamiento, velocidad o aceleración, la ecuación de movimiento se expresa en función del desplazamiento relativo de la masa $z = x - y$ como sigue (vea la sección 3.6.2):

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{4.32}$$

Ésta es semejante a la ecuación

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \tag{4.33}$$

con la variable z reemplazando a x y el término $-m\ddot{y}$ reemplazando la función forzada F. Por consiguiente todos los resultados derivados para el sistema excitado por una fuerza son aplicables al sistema excitado por la base también para z cuando $-m\ddot{y}$ reemplaza al término F. Para un sistema

no amortiguado sometido a excitación de la base, el desplazamiento relativo se determina con la ecuación (4.31):

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\,d\tau \tag{4.34}$$

Ejemplo 4.9 Fuerza gradual sobre una máquina compactadora

En la figura 4.10(a) se muestra una máquina compactadora, modelada como un sistema de un solo grado de libertad. La fuerza que actúa en la masa m (m incluye las masas del pistón, la plataforma y el material que se está compactando) debido a una aplicación repentina de la presión se puede idealizar como una fuerza gradual, como se muestra en la figura 4.10(b). Determine la respuesta del sistema.

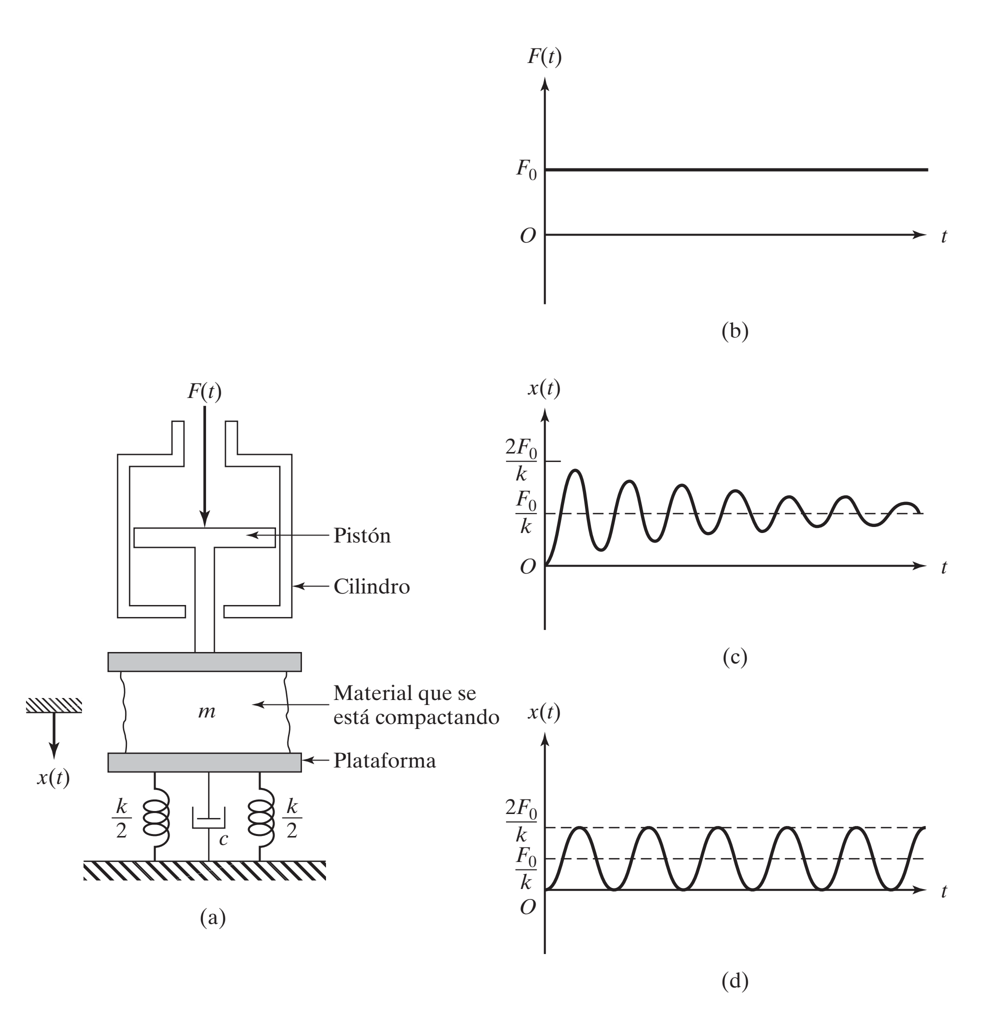


Figura 4.10 Fuerza gradual aplicada a una máquina compactadora.

Solución: Dado que la máquina compactadora se modela como un sistema de masa-resorte-amortiguador, el problema es encontrar la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sometido a una fuerza gradual. Observando que $F(t) = F_0$, podemos escribir la ecuación [4.31] como

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{F_0}{m\omega_d}\left[e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\left\{\frac{\zeta\omega_n \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) + \omega_d\cos\omega_d(t-\tau)}{(\zeta\omega_n)^2+(\omega_d)^2}\right\}\right]_{\tau=0}^{t}$$
$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)\right] \tag{E.1}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{E.2}$$

Esta respuesta se muestra en la figura 4.10(c). Si el sistema es no amortiguado ($\zeta = 0$, $\omega_d = \omega_n$), la ecuación (E.1) se reduce a

$$x(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos\omega_n t] \tag{E.3}$$

La ecuación (E.3) se muestra gráficamente en la figura 4.10(d). Se ve que si la carga se aplica de forma instantánea a un sistema no amortiguado, se obtendrá un desplazamiento máximo de dos veces el desplazamiento estático, es decir, $x_{\text{máx}} = 2F_0/k$.

Ejemplo 4.10 Fuerza gradual aplicada con demora

Encuentre la respuesta de la máquina compactadora que se muestra en la figura 4.10(a) cuando se somete a la fuerza mostrada en la figura 4.11.

Solución: Dado que la función forzada se inicia en $t = t_0$ en lugar de en $t = 0$, la respuesta se obtiene con la ecuación (E.1) del ejemplo 4.9 reemplazando t por $t - t_0$. Esto da

$$x(t) = \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sqrt{1-\zeta^2} - e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}\cos\{\omega_d(t-t_0) - \phi\}\right] \tag{E.1}$$

Si el sistema es no amortiguado, la ecuación (E.1) se reduce a

$$x(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos\omega_n(t - t_0)] \tag{E.2}$$

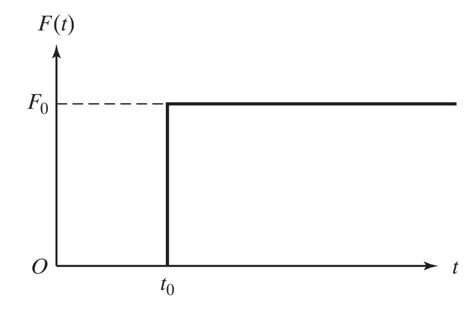


Figura 4.11 Fuerza gradual aplicada con una demora.

■

Ejemplo 4.11 Carga pulsante rectangular

Si la máquina compactadora de la figura 4.10(a) se somete a una fuerza constante sólo durante el tiempo $0 \leq t \leq t_0$ (figura 4.12a), determine la respuesta de la máquina.

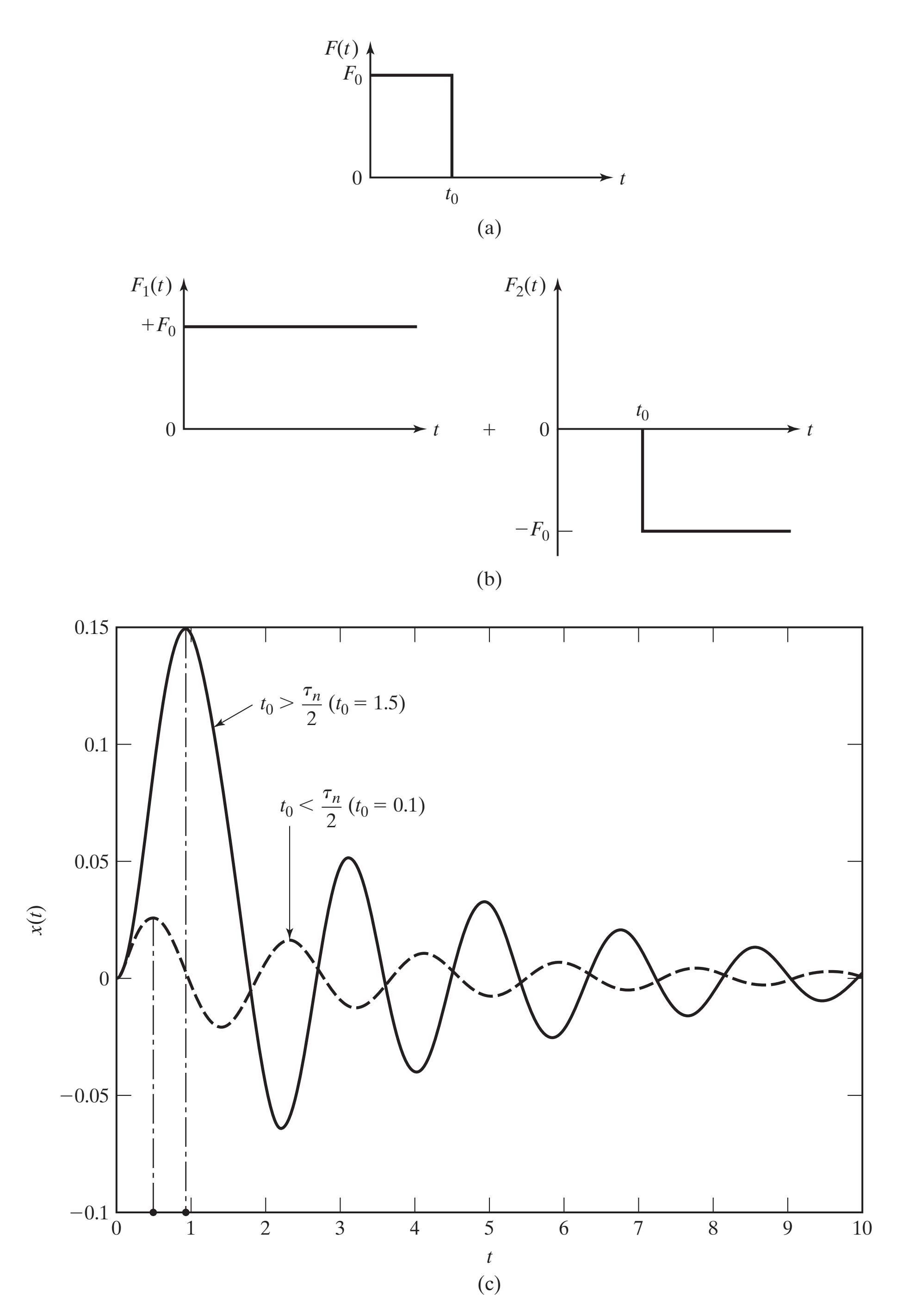


Figura 4.12 Respuesta ocasionada por una carga pulsante.

Solución: La función forzada dada, $F(t)$, se puede considerar como la suma de una función escalonada $F_1(t)$ de magnitud $+ F_0$ que se inicia en $t = 0$ y una segunda función escalonada $F_2(t)$ de magnitud $-F_0$ que se inicia en el tiempo $t = t_0$ como se muestra en la figura 4.12(b).

Por lo tanto, la respuesta del sistema se obtiene restando la ecuación (E.1) del ejemplo 4.10 de la ecuación (E.1) del ejemplo 4.9. Esto da

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{k\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-\cos(\omega_d t - \phi) + e^{\zeta\omega_n t_0}\cos\{\omega_d(t - t_0) - \phi\}\right] \tag{E.1}$$

con

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{E.2}$$

Para ver gráficamente la respuesta de vibración, consideramos el sistema como no amortiguado, de modo que la ecuación (E.1) se reduce a

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[\cos\omega_n(t - t_0) - \cos\omega_n t\right] \tag{E.3}$$

La respuesta se muestra en la figura 4.12(c) para dos anchos de pulso diferentes de t_0 para los siguientes datos (problema 4.90): $m = 100$ kg, $c = 50$ N-s/m, $k = 1200$ N/m y $F_0 = 100$ N. Las respuestas serán diferentes en los dos casos $t_0 < \tau_n/2$ y $t_0 > \tau_n/2$, donde τ_n es el periodo natural no amortiguado del sistema. Si $t_0 > \tau_n/2$, el pico será mayor y ocurrirá durante la era de vibración forzada (es decir, durante 0 a t_0) mientras que el pico será menor y ocurrirá en la era de vibración residual (es decir, después de t_0) si $t_0 > \tau_n/2$. En la figura 4.12(c), $\tau_n = 1.8138$ s y el pico correspondiente a $t_0 = 1.5$ s es aproximadamente seis veces mayor que el de $t_0 = 0.1$ s.

Ejemplo 4.12 Máquina compactadora sometida a una carga lineal

Determine la respuesta de máquina compactadora que se muestra en la figura 4.13(a) cuando se aplica una fuerza lineal variable (mostrada en la figura 4.13(b) al movimiento de la leva.

Solución: La fuerza lineal variable que se muestra en la figura 4.13(b) se conoce como la función rampa. Esta función forzada se puede representar como $F(\tau) = \delta F \cdot \tau$, donde δF indica la tasa de incremento de la fuerza F por unidad de tiempo. Sustituyendo ésta en la ecuación (4.31), obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\delta F}{m\omega_d}\int_0^t \tau e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t - \tau)\,d\tau \\ &= \frac{\delta F}{m\omega_d}\int_0^t (t - \tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t - \tau)\,(-d\tau) \\ &\quad - \frac{\delta F \cdot t}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t - \tau)\,(-d\tau) \end{aligned}$$

Estas integrales se evalúan y la respuesta se expresa como sigue:

$$x(t) = \frac{\delta F}{k}\left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\cos\omega_d t - \left\{\frac{\omega_d^2 - \zeta^2\omega_n^2}{\omega_n^2\omega_d}\right\}\mathrm{sen}\,\omega_d t\right)\right] \tag{E.1}$$

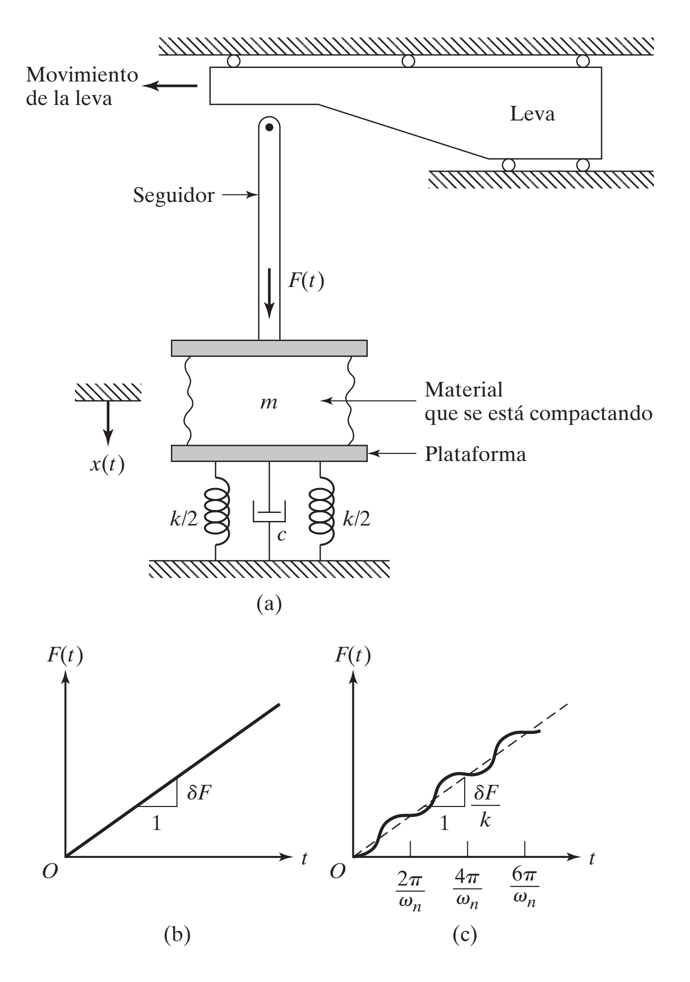


Figura 4.13 Máquina compactadora sometida a una fuerza lineal.

(Vea el problema 4.28). Para una adaptación del sistema, la ecuación (E1) se reduce a

$$x(t) = \frac{\delta F}{\omega_n k}[\omega_n t - \operatorname{sen} \omega_n t] \tag{E.2}$$

La figura 4.13(c) muestra la respuesta dada por la ecuación (E.2).

■

Ejemplo 4.13 Carga explosiva en la estructura de un edificio

Una estructura de edificio se modela como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad (figura 4.14(a)). Encuentre la respuesta de la estructura si se somete a una carga explosiva representada por el pulso triangular mostrado en la figura 4.14(b).

Solución: La función forzada está dada por

$$F(\tau) = F_0\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \qquad \text{para } 0 \le \tau \le t_0 \tag{E.1}$$

$$F(\tau) = 0 \qquad \text{para } \tau > t_0 \tag{E.2}$$

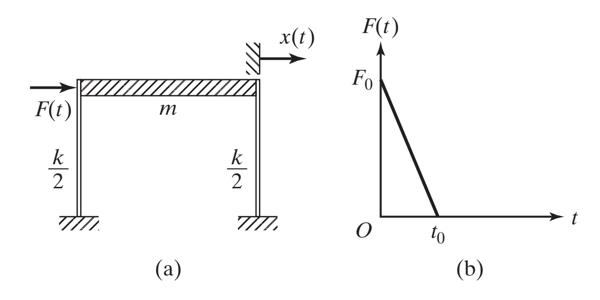


Figura 4.14 Estructura de un edificio sometida a una carga explosiva.

La ecuación (4.31) da, para un sistema no amortiguado,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\ \text{sen}\,\omega_n(t - \tau)\,d\tau \tag{E.3}$$

Respuesta durante $0 \leq t \leq t_0$: Utilizando la ecuación (E.1) para $F(\tau)$ en la ecuación (E.3) da

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)[\text{sen}\,\omega_n t\cos\omega_n\tau - \cos\omega_n t\ \text{sen}\,\omega_n\tau]\,d(\omega_n\tau) \\ &= \frac{F_0}{k}\,\text{sen}\,\omega_n t\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)\cos\omega_n\tau\cdot d(\omega_n\tau) \\ &\quad - \frac{F_0}{k}\cos\omega_n t\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)\text{sen}\,\omega_n\tau\cdot d(\omega_n\tau) \end{aligned} \tag{E.4}$$

Observando que la integración por partes da

$$\int \tau\cos\omega_n\tau\cdot d(\omega_n\tau) = \tau\ \text{sen}\,\omega_n\tau + \frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n\tau \tag{E.5}$$

y

$$\int \tau\ \text{sen}\,\omega_n\tau\cdot d(\omega_n\tau) = -\tau\cos\omega_n\tau + \frac{1}{\omega_n}\text{sen}\,\omega_n\tau \tag{E.6}$$

La ecuación (E.4) se escribe como

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{F_0}{k}\Bigg\{&\text{sen}\,\omega_n t\left[\text{sen}\,\omega_n t - \frac{t}{t_0}\text{sen}\,\omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0}\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0}\right] \\ &- \cos\omega_n t\left[-\cos\omega_n t + 1 + \frac{t}{t_0}\cos\omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0}\text{sen}\,\omega_n t\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{E.7}$$

Simplificando esta expresión, obtenemos

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{t}{t_0} - \cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0}\text{sen}\,\omega_n t\right] \tag{E.8}$$

Respuesta durante $t > t_0$: En este caso también utilizamos la ecuación (E.1) para $F(\tau)$, pero el límite superior de integración en la ecuación (E.3) será t_0, dado que $F(\tau) = 0$ durante $\tau > t_0$. Por lo tanto, la respuesta se encuentra a partir de la ecuación (E.7) estableciendo $t = t_0$ dentro de los paréntesis rectangulares. De esto resulta

$$x(t) = \frac{F_0}{k\omega_n t_0}\left[(1 - \cos\omega_n t_0)\,\text{sen}\,\omega_n t - (\omega_n t_0 - \text{sen}\,\omega_n t_0)\cos\omega_n t\right] \tag{E.9}$$

■

4.6 Espectro de respuesta

La gráfica que muestra la variación de la respuesta máxima (desplazamiento, velocidad, aceleración o cualquier otra cantidad máxima) con la frecuencia natural (o periodo natural) de un sistema de un solo grado de libertad a una función forzada especificada se conoce como *espectro de respuesta*. Dado que la respuesta máxima se traza contra la frecuencia natural (o periodo natural), el espectro de respuesta da la respuesta máxima de todos los posibles sistemas de un solo grado de libertad. El espectro de frecuencia se utiliza ampliamente en el diseño de ingeniería sísmica [4.2, 4.5]. Un repaso de literatura reciente sobre espectros de respuesta de choque y sísmica se da en la referencia [4.7].

Una vez disponible el espectro de respuesta correspondiente a una función forzada especificada, simplemente tenemos que conocer la frecuencia natural del sistema para determinar su respuesta máxima. El ejemplo 4.14 ilustra la construcción de un espectro de respuesta.

Ejemplo 4.14 Espectro de respuesta de un pulso senoidal

Encuentre el espectro de respuesta no amortiguada para la fuerza pulsante senoidal mostrada en la figura 4.15(a) utilizando las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

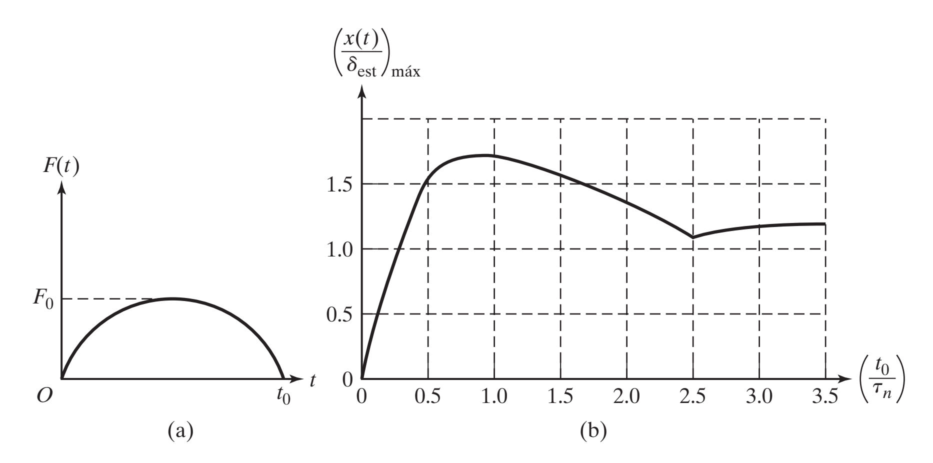


Figura 4.15 Espectro de respuesta debido a un pulso senoidal.

Solución:

Método: Encuentre la respuesta y exprese su valor máximo en función de su periodo natural. La ecuación de movimiento de un sistema no amortiguado se expresa como

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = \begin{cases} F_0 \operatorname{sen} \omega t, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \tag{E.1}$$

donde

$$\omega = \frac{\pi}{t_0} \tag{E.2}$$

La solución de la ecuación (E.1) se obtiene superponiendo la solución homogénea $x_c(t)$ y la solución particular $x_p(t)$ como

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{E.3}$$

Es decir,

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \operatorname{sen} \omega t \tag{E.4}$$

donde A y B son constantes y ω_n es la frecuencia natural del sistema:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.5}$$

Aprovechando las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ en la ecuación (E.4), podemos determinar las constantes A y B como

$$A = 0, \qquad B = -\frac{F_0 \omega}{\omega_n (k - m\omega^2)} \tag{E.6}$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left\{ \operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \right\}, \qquad 0 \le t \le t_0 \tag{E.7}$$

la cual se reescribe como

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_n}{2t_0} \right)^2} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi t}{t_0} - \frac{\tau_n}{2t_0} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\tau_n} \right\}, \qquad 0 \le t \le t_0 \tag{E.8}$$

donde

$$\delta_{est} = \frac{F_0}{k} \tag{E.9}$$

La solución dada por la ecuación (E.8) es válida sólo durante el periodo de aplicación de la fuerza, $0 \le t \le t_0$. Dado que no hay ninguna fuerza aplicada durante $t > t_0$, la solución se expresa como una solución de vibración libre:

$$x(t) = A' \cos \omega_n t + B' \operatorname{sen} \omega_n t, \qquad t > t_0 \tag{E.10}$$

donde las constantes A' y B' se encuentran utilizando los valores de $x(t = t_0)$ y $\dot{x}(t = t_0)$, dados por la ecuación (E.8), como condiciones iniciales durante la duración $t > t_0$. Esto da

$$x(t = t_0) = \alpha\left[-\frac{\tau_n}{2t_0}\operatorname{sen}\frac{2\pi t_0}{\tau_n}\right] = A'\cos\omega_n t_0 + B'\operatorname{sen}\omega_n t_0 \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t = t_0) &= \alpha\left\{\frac{\pi}{t_0} - \frac{\pi}{t_0}\cos\frac{2\pi t_0}{\tau_n}\right\}\\ &= -\omega_n A'\operatorname{sen}\omega_n t + \omega_n B'\cos\omega_n t\end{aligned} \tag{E.12}$$

donde

$$\alpha = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\dfrac{\tau_n}{2t_0}\right)^2} \tag{E.13}$$

Las ecuaciones (E.11) y (E.12) se pueden resolver para encontrar A' y B' como

$$A' = \frac{\alpha\pi}{\omega_n t_0}\operatorname{sen}\omega_n t_0, \qquad B' = -\frac{\alpha\pi}{\omega_n t_0}[1 + \cos\omega_n t_0] \tag{E.14}$$

Las ecuaciones (E.14) se pueden sustituir en la ecuación (E.10) para obtener

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{(\tau_n/t_0)}{2\left\{1 - (\tau_n/2t_0)^2\right\}}\left[\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{t_0}{\tau_n} - \frac{t}{\tau_n}\right) - \operatorname{sen}2\pi\frac{t}{\tau_n}\right], \qquad t \geq t_0 \tag{E.15}$$

Las ecuaciones (E.8) y (E.15) dan la respuesta del sistema en forma no dimensional; es decir, x/δ_{est} se expresa en función de t/τ_n. Por lo tanto, para cualquier valor especificado de t_0/τ_n, se puede determinar el valor máximo de x/δ_{est}. Cuando este valor máximo de x/δ_{est} se traza contra t_0/τ_n, da el espectro de respuesta mostrado en la figura 4.15(b). Se observa que el valor máximo de $(x\delta_{est})_{máx} \simeq 1.75$ ocurre en un valor de $t_0/\tau_n \simeq 0.75$.

■

En el ejemplo 4.14, la fuerza de entrada es simple y por consiguiente se obtuvo una solución de forma cerrada para el espectro de respuesta. Sin embargo, si la fuerza de entrada es arbitraria, podemos determinar el espectro de respuesta sólo numéricamente. En ese caso, se utiliza la ecuación (4.31) para expresar la respuesta pico de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad producida por una fuerza de entrada arbitraria $F(t)$ como

$$x(t)\Big|_{máx} = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\operatorname{sen}\omega_n(t - \tau)\,d\tau\Big|_{máx} \tag{4.35}$$

4.6.1 Espectro de respuesta para excitación de la base

En el diseño de maquinaria o estructuras sometidas a un sacudimiento del suelo, como el provocado por un sismo, es útil el espectro de respuesta correspondiente a la excitación de la base. Si la base de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad se somete a una aceleración $\ddot{y}(t)$, la ecuación (4.32) da la ecuación de movimiento en función del desplazamiento relativo $z = x - y$, y la ecuación (4.34) da la respuesta $z(t)$. En el caso de un sacudimiento del suelo, se suele utilizar el espectro de respuesta de velocidad. Los espectros de desplazamiento y aceleración se expresan

entonces en función del espectro de velocidad. Para un oscilador armónico (un sistema no amortiguado sobre la vibración libre), nos percatamos que

$$\ddot{x}|_{\text{máx}} = -\omega_n^2 x|_{\text{máx}} \tag{4.36}$$

y

$$\dot{x}|_{\text{máx}} = \omega_m x|_{\text{máx}} \tag{4.37}$$

Por lo tanto, los espectros de aceleración y desplazamiento S_a y S_d se obtienen en función del espectro de velocidad (S_v):

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_n}, \qquad S_a = \omega_n S_v \tag{4.38}$$

Para considerar amortiguamiento en el sistema, si suponemos que el desplazamiento máximo relativo ocurre después de que ha pasado el pulso de sacudimiento o choque, el movimiento subsiguiente debe ser armónico. En ese caso podemos utilizar la ecuación (4.38). La velocidad ficticia asociada con este movimiento armónico aparente se llama *pseudovelocidad* y su espectro de respuesta, S_v, se llama *pseudoespectro*. Los espectros de velocidad se utilizan extensamente en análisis de sismos.

Para encontrar el espectro de velocidad relativa, diferenciamos la ecuación (4.34) y obtenemos[2]

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}[-\zeta\omega_n \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) + \omega_d \cos\omega_d(t-\tau)]\,d\tau \tag{4.39}$$

La ecuación (4.39) se reescribe como

$$\dot{z}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{P^2+Q^2}\,\operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \tag{4.40}$$

donde

$$P = \int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{\zeta\omega_n t}\cos\omega_d\tau\,d\tau \tag{4.41}$$

$$Q = \int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d\tau\,d\tau \tag{4.42}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left\{\frac{-(P\sqrt{1-\zeta^2}+Q\zeta)}{(P\zeta - Q\sqrt{1-\zeta^2})}\right\} \tag{4.43}$$

[2]La siguiente relación se utiliza para derivar la ecuación (4.39) a partir de la ecuación (4.34):

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,\tau)d\tau + f(t,\tau)|_{\tau=t}$$

El espectro de respuesta de velocidad, S_v, se obtiene de la ecuación (4.40):

$$S_v = |\dot{z}(t)|_{\text{máx}} = \left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \right|_{\text{máx}} \tag{4.44}$$

Por lo tanto, los espectros de pseudorrespuesta están dados por

$$S_d = |z|_{\text{máx}} = \frac{S_v}{\omega_n}; \qquad S_v = |\dot{z}|_{\text{máx}}; \qquad S_a = |\ddot{z}|_{\text{máx}} = \omega_n S_v \tag{4.45}$$

Ejemplo 4.15 Tanque de agua sometido a aceleración de la base

El tanque de agua mostrado en la figura 4.16(a) se somete a una aceleración del suelo linealmente variable como se muestra en la figura 4.16(b) debido a un sismo. La masa del tanque es m, la rigidez de la columna es k y el amortiguamiento es insignificante. Halle el espectro de respuesta correspondiente al desplazamiento relativo $z = x - y$, del tanque de agua.

Solución

Método: Modele el tanque de agua como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad. Determine el desplazamiento máximo relativo del tanque y expréselo como una función de ω_n.

La aceleración de la base se puede expresar como

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{\text{máx}}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \quad \text{durante} \quad 0 \le t \le 2t_0 \tag{E.1}$$

$$\ddot{y}(t) = 0 \quad \text{durante} \quad t > 2t_0 \tag{E.2}$$

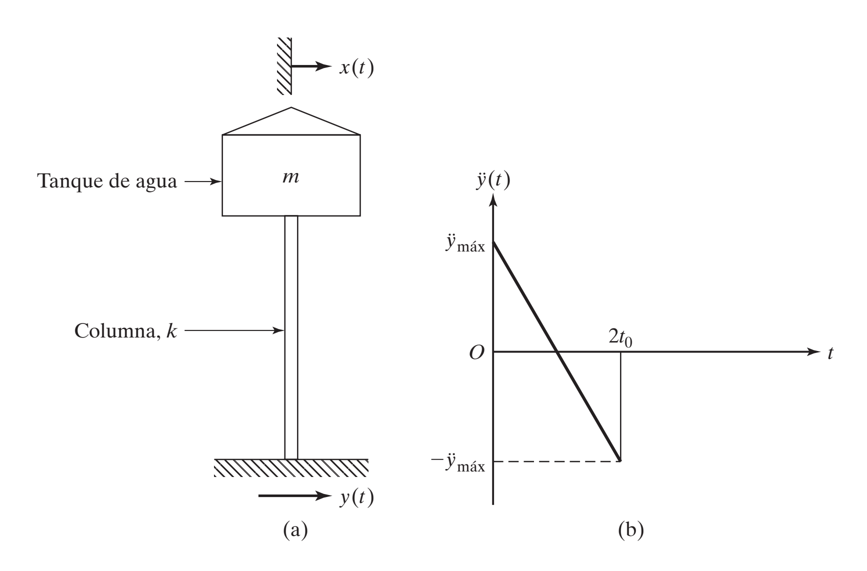


Figura 4.16 Tanque de agua sometido a movimiento de la base.

Respuesta durante $0 \leq t \leq 2t_0$: Sustituyendo la ecuación (E.1) en la ecuación (4.34), la respuesta se expresa, para un sistema no amortiguado, como

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_n}\ddot{y}_{\text{máx}}\left[\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)\right.$$
$$\left.(\text{sen}\,\omega_n t \cos\omega_n\tau - \cos\omega_n t\,\text{sen}\,\omega_n\tau)\,d\tau\right] \tag{E.3}$$

Esta ecuación es la misma que la ecuación (E.4) del ejemplo 4.13 excepto que $(-\ddot{y}_{\text{máx}})$ aparece en lugar de F_0/m. Por consiguiente, $z(t)$ se escribe, utilizando la ecuación (E.8) del ejemplo 4.13, como

$$z(t) = -\frac{\ddot{y}_{\text{máx}}}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{t}{t_0} - \cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0}\text{sen}\,\omega_n t\right] \tag{E.4}$$

Para encontrar la respuesta máxima $z_{\text{máx}}$, establecemos

$$\dot{z}(t) = -\frac{\ddot{y}_{\text{máx}}}{t_0\omega_n^2}\left[-1 + \omega_n t_0\,\text{sen}\,\omega_n t + \cos\omega_n t\right] = 0 \tag{E.5}$$

Esta ecuación da el tiempo t_m, al cual ocurre $z_{\text{máx}}$:

$$t_m = \frac{2}{\omega_n}\tan^{-1}(\omega_n t_0) \tag{E.6}$$

Sustituyendo la ecuación (E.6) en la ecuación (E.4) se puede encontrar la respuesta máxima del tanque:

$$z_{\text{máx}} = -\frac{\ddot{y}_{\text{máx}}}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{t_m}{t_0} - \cos\omega_n t_m + \frac{1}{\omega_n t_0}\text{sen}\,\omega_n t_m\right] \tag{E.7}$$

Respuesta durante $t > 2t_0$: Dado que no hay excitación durante este tiempo, podemos utilizar la solución del problema de vibración libre (ecuación 2.18)

$$z(t) = z_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n}\right)\text{sen}\,\omega_n t \tag{E.8}$$

siempre que consideremos el desplazamiento inicial y la velocidad inicial como

$$z_0 = z(t = 2t_0) \qquad \text{y} \qquad \dot{z}_0 = \dot{z}(t = 2t_0) \tag{E.9}$$

utilizando la ecuación (E.7). El valor máximo de $z(t)$ dado por la ecuación (E.8) se identifica como

$$z_{\text{máx}} = \left[z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} \tag{E.10}$$

donde z_0 y $\dot{z}_0$ se calculan como se indica en la ecuación (E.9).

■

4.6.2 Espectros de respuesta a sismos

La descripción más directa de un movimiento sísmico en el dominio del tiempo es la proporcionada por acelerogramas que son registrados por instrumentos llamados *acelerógrafos de movimiento fuerte*. Estos instrumentos registran tres componentes ortogonales de aceleración del suelo en un lugar determinado. En la figura 4.17 se muestra un acelerograma típico. Por lo común los acelerogramas se registran en papel o película fotográfica y se digitalizan para aplicaciones de ingeniería. La aceleración máxima del suelo, la duración y el contenido de frecuencia del sismo se pueden

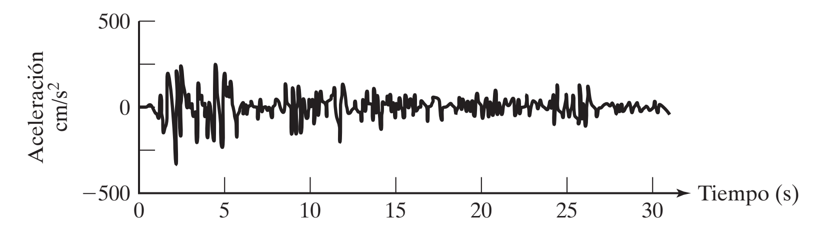


Figura 4.17 Un acelerograma típico.

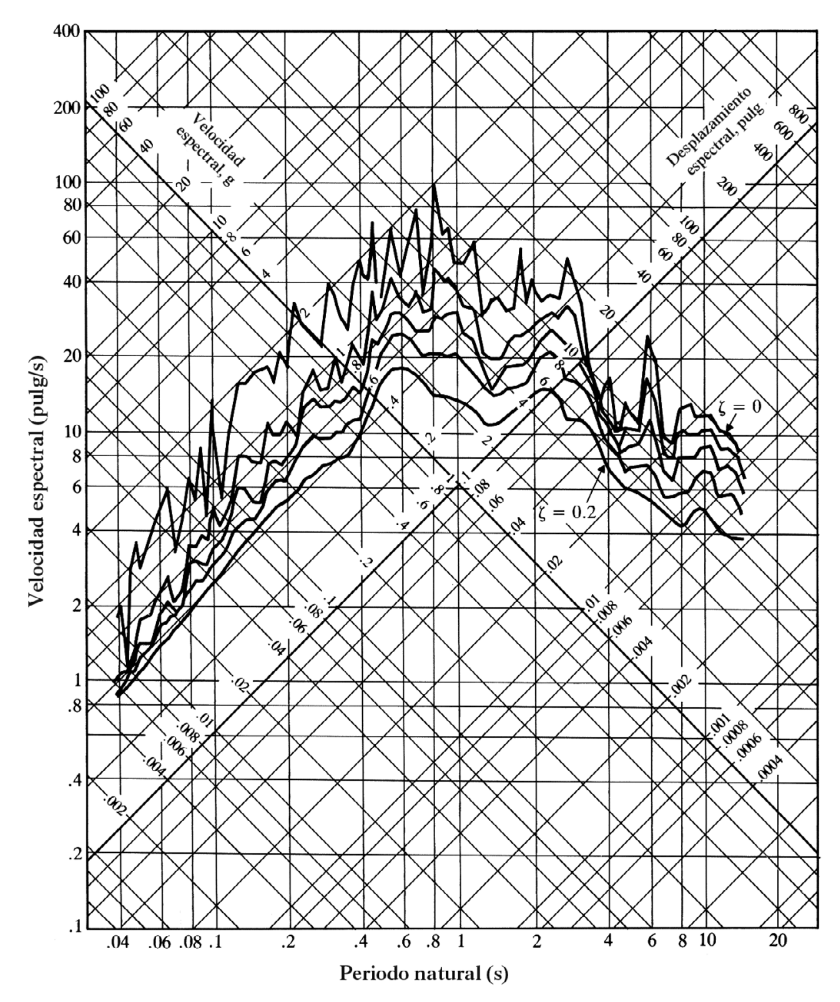


Figura 4.18 Espectro de respuesta de un sismo típico [4.12]. (Sismo de Valle Imperial, del 18 de mayo de 1940; $\zeta = 0$, 0.2, 0.05, 0.10 y 0.20.) (Reimpreso con permiso de *The Shock Vibration Digest*).

obtener desde un acelerograma. Se puede integrar un acelerograma para obtener las variaciones de tiempo de la velocidad del suelo y del desplazamiento del suelo.

Un espectro de respuesta se utiliza para proporcionar la representación más descriptiva de la influencia de un sismo dado sobre una estructura o máquina. Es posible trazar la gráfica de la respuesta máxima de un sistema de un solo grado de libertad en función de la aceleración, la pseudovelocidad relativa y el desplazamiento relativo utilizando escalas logarítmicas. En la figura 4.18 se muestra un espectro de respuesta típico, trazado en papel logarítmico de cuatro ciclos. En esta figura, el eje vertical indica la velocidad espectral, el eje horizontal representa el periodo natural, el eje inclinado a 45° indica el desplazamiento espectral, y el eje inclinado a 135° muestra la aceleración espectral.

En la figura 4.18 se ve que el espectro de respuesta de un acelerograma particular (sismo) presenta considerables irregularidades en el dominio de frecuencia. Sin embargo, los espectros correspondientes a un conjunto de acelerogramas producidos por sacudimientos del suelo de sitios con características geológicas y sismológicas similares son funciones uniformes de tiempo y proporcionan tendencias estadísticas que las caracterizan colectivamente. Esta idea condujo al desarrollo del concepto de un espectro de diseño, uno de los cuales se muestra en la figura 4.19, para su uso en el diseño de estructuras y máquinas resistentes a sismos. Los siguientes ejemplos ilustran el uso y diseño de los espectros de respuesta a sismos.

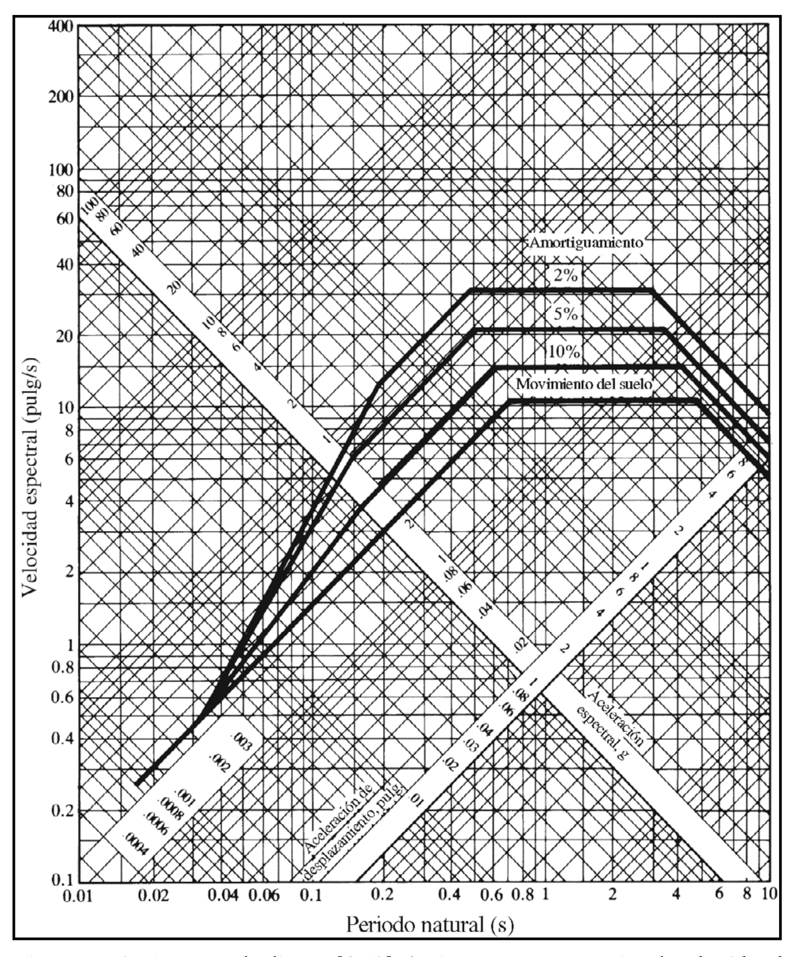


Figura 4.19 Espectro de diseño [4.12]. (Reimpreso con permiso de *The Shock and Vibration Digest*).

Ejemplo 4.16 Respuesta de la estructura de un edificio a un sismo

La estructura de un edificio pesa 15,000 lb y tiene dos columnas con rigidez total k, como se indica en la figura 4.20. Tiene una relación de amortiguamiento de 0.05 y un periodo natural de 1.0 s. Para el sismo caracterizado en la figura 4.18, determine lo siguiente:

a. Desplazamiento máximo relativo de la masa, $x_{\text{máx}}$
b. Fuerza cortante máxima en las columnas
c. Esfuerzo de flexión máximo en las columnas

Solución

Método: Encuentre el desplazamiento espectral, la velocidad espectral y la aceleración espectral correspondientes al periodo natural dado.

Para $\tau_n = 1.0$ s y $\zeta = 0.05$, la figura 4.18 da $S_v = 25$ pulg/s, $S_d = 4.2$ pulg, y $S_a = 0.42\text{g} = 162.288$ pulg/s^2.

a. Desplazamiento relativo máximo de la masa, $x_{\text{máx}} = S_d = 4.2$ pulg.
b. Fuerza cortante máxima en ambas columnas:

$$|kx_{\text{máx}}| = m\ddot{x}_{\text{máx}} = \frac{W}{g} S_a = \left(\frac{15{,}000}{386.4}\right)(162.288) = 6300 \text{ lb}$$

Por lo tanto, la fuerza cortante máxima en cada columna está dada por

$$F_{\text{máx}} = 6{,}300/2 = 3{,}150 \text{ lb}$$

c. Momento de flexión máximo en cada columna $= M_{\text{máx}} = F_{\text{máx}} l$. Por lo tanto, la fórmula de viga da el esfuerzo de flexión máximo

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}} c}{I}$$

donde I es el momento de inercia de área y c es la distancia de la fibra externa desde el eje neutro de la sección de columna.

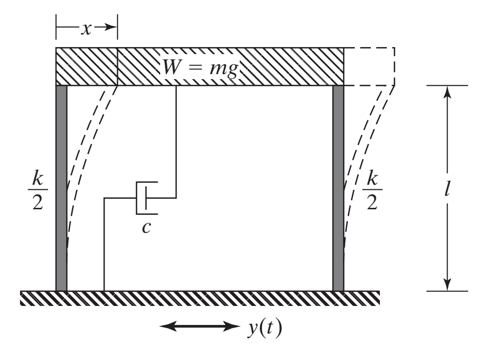


Figura 4.20 Estructura de un edificio sometida a movimiento de la base.

■

Ejemplo 4.17 Descarrilamiento de una carretilla de una grúa durante un sismo

La carretilla de una grúa viajera elevada eléctrica se desplaza horizontalmente sobre la viga como se indica en la figura 4.21. Considerando la carretilla como una masa puntual, la grúa se puede modelar como un sistema de un solo grado de libertad con periodo de 2 s y relación de amortiguamiento de 2%. Determine si la carretilla se descarrila a consecuencia de una excitación sísmica vertical cuyo espectro de diseño se da en la figura 4.19.

Solución

Método: Determine si la aceleración espectral de la carretilla (masa) excede un valor de $1g$.

Para $\tau_n = 2$ s y $\zeta = 0.02$, la figura 4.19 da la aceleración espectral como $S_a = 0.25g$ y por consiguiente la carretilla no se descarrilará.

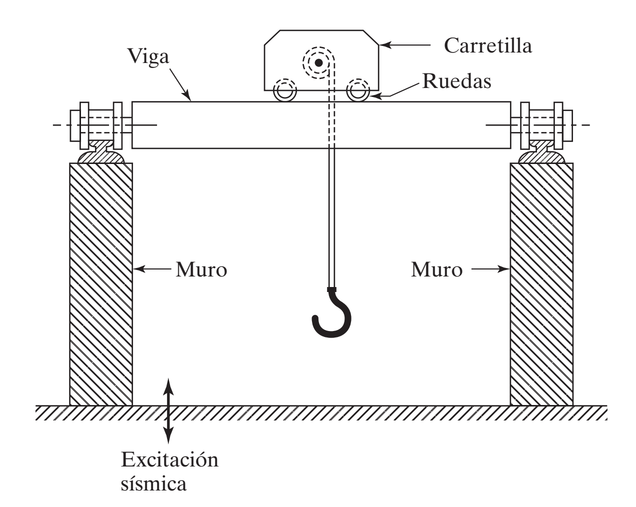


Figura 4.21 Grúa sometida a una excitación sísmica.

■

4.6.3 Diseño bajo un ambiente de choque

Cuando se aplica una fuerza de corta duración, por lo común durante un periodo menor que el periodo natural, se llama *carga de choque*. Un choque incrementa significativamente el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, o el esfuerzo en un sistema mecánico. Aun cuando la fatiga es una importante causa de falla bajo fuerzas armónicas, suele no ser muy importante bajo cargas de choque. Un choque se puede describir como un choque pulsante, un choque de velocidad o un espectro de respuesta de choque. Los choques pulsantes se producen por la aplicación repentina de fuerzas o desplazamientos en la forma de una onda cuadrada, semisenoidal, triangular o de una forma similar (vea la figura 4.22). Un choque de velocidad es provocado por cambios repentinos de velocidad como los provocados cuando se dejan caer paquetes desde una altura. El espectro de respuesta de choque describe la forma en la cual una máquina o estructura responde a un choque específico en lugar de describir el choque en sí. Se utilizan diferentes tipos de pulsos de choque para calificar la mayoría de los productos comerciales, industriales y militares. Muchas especificaciones militares estadounidenses como MIL-E-5400 y MIL-STD-810 definen diferentes tipos de pulsos de choque y métodos detallados de prueba con estos pulsos. El siguiente ejemplo ilustra el método de limitar esfuerzos dinámicos en sistemas mecánicos sometidos a un ambiente de choque.

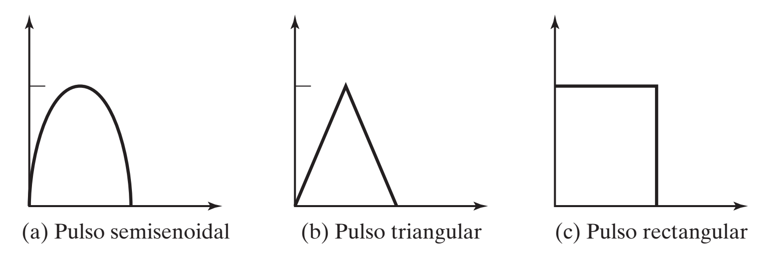


Figura 4.22 Pulsos de choque típicos.

Ejemplo 4.18 Diseño de una repisa para cargas de choque

Una tarjeta de circuito impreso (TCI) se monta sobre una repisa de aluminio en voladizo, como se muestra en la figura 4.23(a). La tarjeta de circuito impreso se coloca en un recipiente que se va a dejar caer desde un helicóptero que vuela a baja altura sobre la repisa. El choque resultante se puede representar de forma aproximada como un pulso semisenoidal, como se muestra en la figura 4.23(b). Diseñe la repisa para que soporte un nivel de aceleración de 100 g bajo el pulso semisenoidal que se muestra en la figura 4.23(b). Considere un peso específico de 0.1 lb/pulg^3, un módulo de Young de 10^7 lb/pulg^2 y un esfuerzo permisible de 26,000 lb/pulg^2 para aluminio.

Solución: El peso propio de la viga (w) es resultado de

$$w = (10)\left(\frac{1}{2} \times d\right)(0.1) = 0.5d$$

y se considera que el peso total, W, es una carga concentrada en el extremo libre de la viga, dado por

$$W = \text{Peso de la viga} + \text{Peso del circuito impreso} = 0.5d + 0.4$$

El momento de inercia de área (I) de la sección transversal de la viga es

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times d^3 = 0.04167d^3$$

La deflexión estática de la viga sometida a la carga W en su extremo, δ_{est}, se calcula como

$$\delta_{est} = \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{(0.5d + 0.4)(10^3)}{3 \times 10^7(0.04167d^3)} = \frac{(0.5d + 0.4)}{d^3} 7.9994 \times 10^{-4}$$

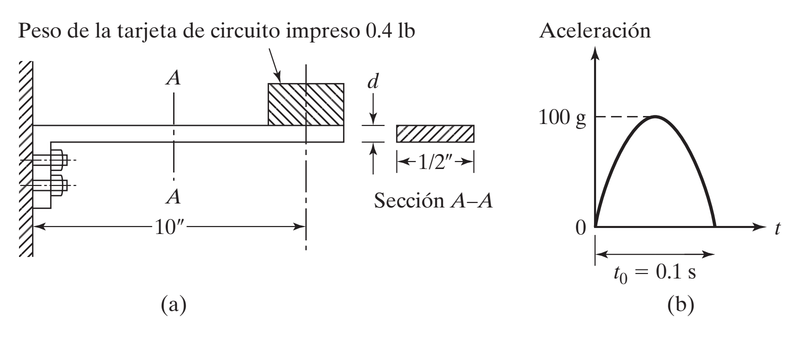


Figura 4.23 Voladizo sometido a un pulso de aceleración.

Dado que el factor de amplificación de choque (la ordenada en la figura 4.15(b)) no se puede determinar a menos que se conozca el valor de t_0/τ_n, adoptamos el procedimiento de prueba y error para determinar el valor de τ_n y por consiguiente el de t_0/τ_n. Si d se considera como de $\frac{1}{2}$ pulg,

$$\delta_{\text{est}} = \left(\frac{0.5 \times 0.5 + 0.4}{0.5^3}\right) 7.9997 \times 10^{-4} = 41.5969 \times 10^{-4} \text{ pulg.}$$

La ecuación (2.30) da

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{est}}{g}} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{41.5969 \times 10^{-4}}{386.4}\right)} = 0.020615 \text{ s}$$

Por consiguiente

$$\frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0.1}{0.020615} = 4.8508$$

El factor de amplificación de choque (A_a) se determina desde la figura 4.15(b) como 1.1. La carga dinámica (P_d) que actúa sobre el voladizo es

$$P_d = A_a M a_s = (1.1)\left(\frac{0.65}{g}\right)(100\,g) = 71.5 \text{ lb}$$

donde a_s es la aceleración correspondiente al choque, M es la masa en el extremo de la viga, y Ma_s es la fuerza de inercia que actúa en la viga. Observando que $I = 0.04167d^3 = 0.005209$ pulg^4, el esfuerzo de flexión máximo en la raíz de la repisa en voladizo se calcula como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_b c}{I} = \frac{(71.5 \times 10)\,\frac{0.5}{2}}{0.005209} = 34315.6076 \text{ lb/pulg}^2$$

Como este esfuerzo excede el valor permisible, consideramos el siguiente valor de prueba de d como 0.6 pulg. Éste da

$$\delta_{\text{est}} = \left(\frac{0.5 \times 0.6 + 0.4}{0.6^3}\right) 7.9994 \times 10^{-4} = 25.9240 \times 10^{-4} \text{ pulg.}$$

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{est}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{25.9240 \times 10^{-4}}{386.4}} = 0.01627 \text{ s}$$

$$\frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0.1}{0.01627} = 6.1445$$

De acuerdo con la figura 4.15(b), el factor de amplificación de choque se encuentra como $A_a \approx 1.1$, y por consiguiente la carga dinámica que actúa en la viga se determina como

$$P_d = (1.1) \quad \frac{0.7}{\text{g}} \quad (100g) = 77.0 \text{ lb}$$

Puesto que $d = 0.6$ pulg da como resultado $I = 0.04167d^3 = 0.009001$ pulg^4, el esfuerzo de flexión máximo en la raíz de la repisa será

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_b c}{I} = \frac{(77.0 \times 10)\left(\frac{0.6}{2}\right)}{0.009001} = 25663.8151 \text{ lb/pulg}^2$$

En vista de que este esfuerzo está dentro del límite permisible, se puede considerar el espesor de la repisa como $d = 0.6$ pulg.

■

4.7 Transformada de Laplace

Como ya antes se explicó, se puede utilizar el método de la transformada de Laplace para hallar la respuesta de un sistema sometido a cualquier tipo de excitación, incluido el tipo armónico y periódico. Una importante ventaja del método es que toma en cuenta de manera automática las condiciones iniciales. En el apéndice D en el sitio web de este libro encontrará una introducción de la transformada de Laplace junto con una tabla de pares de transformadas de Laplace. La aplicación del método de la transformada de Laplace para encontrar la respuesta de un sistema implica básicamente los siguientes pasos:

1. Escriba la ecuación de movimiento del sistema.
2. Transforme cada término de la ecuación, utilizando las condiciones iniciales conocidas.
3. Resuelva la respuesta transformada del sistema.
4. Obtenga la solución deseada (respuesta) mediante una transformación inversa de Laplace.

4.7.1 Respuestas transitoria y de estado estable

La respuesta transitoria indica la parte de la solución provocada por las condiciones iniciales y que decae con el tiempo. La respuesta de estado estable representa la parte de la solución provocada por la fuerza aplicada o excitación y tiende a la condición en la que prevalece el equilibrio.

Valor inicial de la respuesta: Si se conoce la respuesta o solución de un sistema en el dominio del tiempo, el valor inicial de la respuesta, $x(t = 0)$, se determina con $t = 0$. Si la respuesta del sistema se da en el dominio de Laplace, el valor inicial se puede encontrar como sigue:

$$x(t = 0) \lim_{s \to \infty} [sX(s)] \tag{4.46}$$

La ecuación (4.46) se conoce como *teorema del valor inicial*.

Valor estable de la respuesta: Si se conoce la respuesta de un sistema en el dominio del tiempo, el valor de estado estable de la respuesta, x_{ee}, se determina tomando el límite a medida que el tiempo tiende a infinito. Si la respuesta del sistema se da en el dominio de Laplace, el valor de estado estable se puede encontrar tomando el límite, a medida que s tiende a cero, de s por la respuesta en el dominio de Laplace:

$$x_{ee} = \lim_{s \to 0} [sX(s)] \tag{4.47}$$

La ecuación (4.47) se conoce como *teorema del valor final*.

A continuación se considera la aplicación de la transformada de Laplace para calcular la respuesta de sistemas de primero y segundo orden bajo funciones forzadas diferentes.

4.7.2 Respuesta de sistemas de primer orden

Considere un sistema de resorte-amortiguador sometido a una función forzada $\overline{F}(t)$ con la ecuación de movimiento (figura 4.1(b)):

$$c\dot{x} + kx = \overline{F}(t) \tag{4.48}$$

La ecuación (4.48) se reescribe como

$$\dot{x} + ax = F(t) \tag{4.49}$$

donde

$$a = \frac{k}{c}, \qquad F(t) = \boldsymbol{F}\overline{F}(t), \qquad \boldsymbol{F} = \frac{1}{c} \tag{4.50}$$

La solución de la ecuación (4.49) bajo diferentes funciones forzadas $\overline{F}(t)$ se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.19 Respuesta de impulso unitario de un sistema de primer orden

Encuentre la solución de la ecuación (4.49) cuando la función forzada es un impulso unitario en $t = 0$ y determine los valores inicial y de estado estable de la respuesta.

Solución: La ecuación de movimiento, la ecuación (4.49), en este caso es

$$\dot{x} + ax = \boldsymbol{F}\,\delta(t) \tag{E.1}$$

donde $\boldsymbol{F} = 1/c$. Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación (E.1) obtenemos

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = \boldsymbol{F} \tag{E.2}$$

Suponiendo que las condiciones iniciales son cero, $x(0) = 0$, la ecuación (E.2) se expresa como

$$X(s) = \frac{\boldsymbol{F}}{s + a} = \boldsymbol{F}\left(\frac{1}{s + a}\right) \tag{E.3}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.3) da la respuesta de estado estable del sistema como

$$x(t) = \boldsymbol{F}e^{-at} \tag{E.4}$$

El valor inicial de la respuesta se puede encontrar a partir de la respuesta de tiempo, ecuación (E.4), al establecer $t = 0$. Esto da

$$x(t = 0+) = \boldsymbol{F} \tag{E.5}$$

Según la solución en el dominio de Laplace, el teorema del valor inicial da el valor inicial de la respuesta:

$$x(t = 0+) = \lim_{s\to\infty}[sX(s)] = \lim_{s\to\infty}\boldsymbol{F}\left(\frac{s}{s + a}\right) = \lim_{s\to\infty}\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{1 + (a/s)}\right) = \boldsymbol{F} \tag{E.6}$$

Asimismo, de la respuesta en el dominio del tiempo, ecuación (E.4), el valor de estado estable se puede encontrar tomando el límite a medida que $t \to \infty$. Por lo tanto, la ecuación (E.4) da por resultado

$$x_{ee} = \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{F} e^{-at} = 0 \tag{E.7}$$

El valor de estado estable de la respuesta se determina a partir de la ecuación (E.3) aplicando el teorema del valor final como

$$x_{ee} = \lim_{s \to 0} [sX(s)] = \lim_{s \to 0} \left(\frac{\boldsymbol{F} s}{s + a} \right) = 0 \tag{E.8}$$

■

Ejemplo 4.20 Respuesta de un sistema de primer orden debido a una función rampa

Encuentre la solución de la ecuación (4.49) cuando la fuerza aplicada es una función rampa.

Solución: La ecuación de movimiento, ecuación (4.49), en este caso se escribe como

$$\dot{x} + ax = \boldsymbol{F} bt = dt \tag{E.1}$$

donde $d = \boldsymbol{F} b$, $\boldsymbol{F} = 1/c$, y b indica la pendiente de la rampa (figura 4.24). Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (E.1) obtenemos

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = \frac{d}{x^2} \tag{E.2}$$

Suponiendo que las condiciones iniciales son cero, $x(0) = 0$, la ecuación (E.2) se expresa como

$$X(s) = d \left(\frac{1}{s^2(s + a)} \right) = \frac{d}{a^2} \frac{a^2}{s^2(s + a)} \tag{E.3}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.3) da la respuesta de estado estable del sistema como

$$x(t) = \frac{d}{a^2} [at - (1 - e^{-at})] \tag{E.4}$$

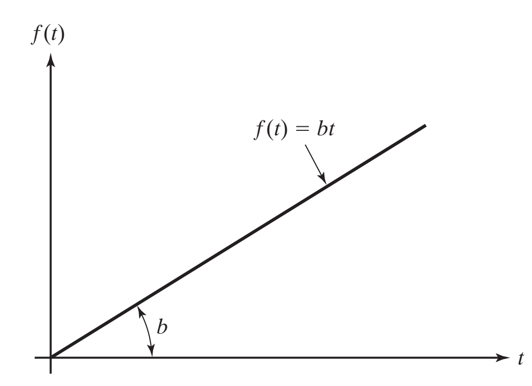


Figura 4.24 Función rampa.

■

4.7.3 Respuesta de sistemas de segundo orden

Considere un sistema de resorte-masa-amortiguador sometido a una función forzada $\overline{F}(t)$ con la ecuación de movimiento (figura 4.2(a)):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \overline{F}(t) \tag{4.51}$$

La solución de la ecuación (4.51) bajo funciones forzadas diferentes $\overline{F}(t)$ se ilustra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.21 Respuesta de impulso unitario de un sistema de segundo orden

Determine la respuesta de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad a un impulso unitario.

Solución: La ecuación de movimiento está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \tag{E.1}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (E.1) obtenemos

$$[m(s^2 - sx_0 - \dot{x}_0) + c(s - x_0) + k]X(s) = 1$$

o

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = m\dot{x}_0 + (ms + c)x_0 + 1 \tag{E.2}$$

Suponiendo una condición inicial cero, $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, la ecuación (E.2) se expresa como

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = 1$$

o

$$X(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{E.3}$$

Podemos expresar el lado derecho de la ecuación (E.3) en fracciones parciales como

$$X(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} \tag{E.4}$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación polinomial:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{E.5}$$

las cuales están dadas por

$$s_1 = -\zeta\omega_n + i\omega_d, \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - i\omega_d \tag{E.6}$$

donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{E.7}$$

es la frecuencia amortiguada del sistema. La sustitución de la ecuación (E.6) en la ecuación (E.4) da por resultado

$$C_1(s - s_2) + C_2(s - s_1) = \frac{1}{m}$$

o

$$(C_1 + C_2)s - \{C_1(-\zeta\omega_n - i\omega_d) + C_2(-\zeta\omega_n + i\omega_d)\} = (0)\, s + \frac{1}{m} \tag{E.8}$$

Igualando los coeficientes en ambos lados de la ecuación (E.8), obtenemos

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{o} \quad C_1 = -C_2$$

$$C_1(-\zeta\omega_n - i\omega_d) + C_2(-\zeta\omega_n + i\omega_d) = -\frac{1}{m} \tag{E.9}$$

o

$$C_2(\zeta\omega_n + i\omega_d - \zeta\omega_n + i\omega_d) = -\frac{1}{m} \tag{E.10}$$

Las ecuaciones (E.9) y (E.10) dan

$$C_2 = -\frac{1}{2im\omega_d} = -C_1 \tag{E.11}$$

Utilizando la ecuación (E.11) en la ecuación (E.4), $X(s)$ se expresa como

$$X(s) = \frac{1}{2im\omega_d}\left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2}\right) \tag{E.12}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.12) obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2im\omega_d}(e^{s_i t} - e^{s_2 t}) = \frac{1}{2im\omega_d}\left[e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)} - e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)}\right] \\ &= \frac{1}{2im\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t}(e^{i\omega_d t} - e^{-i\omega_d t}) \\ &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t; \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Notas:

1. La respuesta $x(t) = 0$ durante $t < 0$ (porque el impulso unitario se aplica en $t = 0$).
2. La ecuación (E.13) es la misma que la función de respuesta de impulso unitario derivada con el método tradicional, la ecuación (4.25).

Los dos ejemplos siguientes ilustran la aplicación de cálculos de respuesta de impulso en el contexto de impactos no elásticos y elásticos.

■

Ejemplo 4.22 Respuesta a un impacto no elástico

Una masa m, que se mueve con una velocidad v_1, choca con la masa M de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad como se muestra en la figura 4.25(a) y se adhiere a la masa M después del impacto, como se muestra en la figura 4.25(b). Encuentre la respuesta del desplazamiento resultante del sistema.

Método: Use la relación:

Cambio de cantidad de movimiento = impulso

Es decir,

$$mv_2 - mv_1 = \int_0^1 f(\tau)\, d\tau \tag{E.1}$$

donde m es la masa que choca, v_2 es la velocidad final (después del impacto); v_1 es la velocidad inicial (antes del impacto); $f(t)$ es la fuerza aplicada durante la corta duración de 0 a t, y la integral indica el impulso (el mismo que el área bajo la curva de fuerza-tiempo).

Solución: Como la masa m se adhiere a la masa M después del impacto, éste se puede considerar perfectamente plástico o no elástico. El sistema combinado (con las dos masas juntas como se muestra en la figura 4.25(b)) se puede considerar que está sometido a un impulso con cambios en las velocidades de las masas. La fuerza de impacto, $f(t)$, es interna al sistema y se puede suponer que es cero. Por lo tanto, la ecuación (E.1) se reescribe como

$$(m + M)V_s - \{mv_1 + M(0)\} = 0 \tag{E.2}$$

donde V_s es la velocidad del sistema combinado ($m + M$) después del impacto. La ecuación (E.2) da la velocidad del sistema inmediatamente después del impacto como

$$V_s = \frac{mv_1}{m + M} \tag{E.3}$$

La ecuación de movimiento para el sistema combinado está dada por

$$(m + M)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{E.4}$$

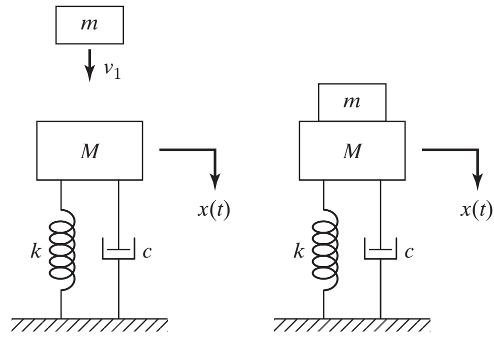


Figura 4.25 Impacto no elástico.

Dado que el impacto cambia la velocidad, pero no el desplazamiento, del sistema justo inmediatamente después del impacto, la condición inicial se puede considerar como $x(t = 0) = 0$ y $\dot{x}(t = 0) = V_s = \frac{mv_1}{m + M}$. La respuesta de vibración libre del sistema (solución de la ecuación (E.4)) se puede obtener a partir de la ecuación (4.18) como

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\frac{\dot{x}_0}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t = \frac{mv_1}{(m + M)\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d t \tag{E.5}$$

■

Ejemplo 4.23 Respuesta a un impacto perfectamente elástico

Una masa m, que se mueve con una velocidad v_1, choca con la masa M de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad como se muestra en la figura 4.26(a). El impacto es perfectamente elástico de modo que después del impacto la masa m rebota con una velocidad v_2. Encuentre la respuesta del desplazamiento resultante de la masa M.

Método: Cuando dos masas m y M se mueven inicialmente con las velocidades v_1 y V_1 chocan entre sí y alcanzan las velocidades v_2 y V_2 inmediatamente después del impacto, respectivamente (figura 4.26(b)); el principio de conservación de la cantidad de movimiento da por resultado

$$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$$

o

$$m(v_1 - v_2) = -M(V_1 - V_2) \tag{E.1}$$

Debido a que el impacto es perfectamente elástico, es aplicable el principio de conservación de energía cinética, de modo que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

o

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = -\frac{1}{2}M(V_1^2 - V_2^2)$$

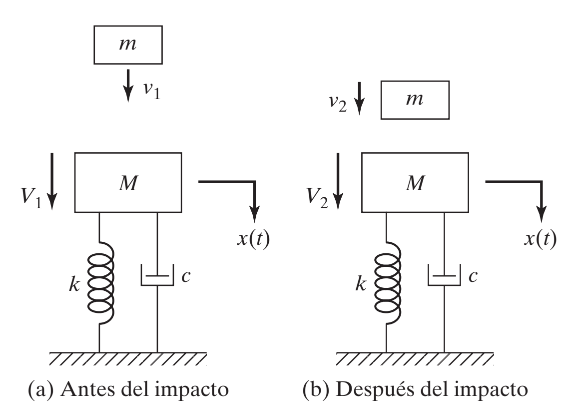


Figura 4.26 Impacto elástico.

la cual se reescribe en la forma

$$\frac{1}{2}m(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) = -\frac{1}{2}M(V_1 + V_2)(V_1 - V_2) \tag{E.2}$$

Utilizando la ecuación (E.1) en la ecuación (E.2), vemos que

$$v_1 + v_2 = V_1 + V_2$$

o

$$(v_1 - V_1) = -(v_2 - V_2) \tag{E.3}$$

La ecuación (E.3) indica que la magnitud de la velocidad relativa de las masas permanece constante y sólo cambia el signo durante un impacto perfectamente elástico.

Solución: Puesto que las velocidades de las masas m y M son v_1 y $V_1 = 0$ antes del impacto, sus velocidades inmediatamente después del impacto se determinan desde las ecuaciones (E.1) y (E.3):

$$m(v_1 - v_2) = -M(0 - V_2) = MV_2$$

o

$$V_2 = \frac{mv_1}{M} - \frac{m}{M}v_2 \tag{E.4}$$

y

$$(v_1 - 0) = v_1 = -(v_2 - V_2) = V_2 - v_2 \tag{E.5}$$

La solución de las ecuaciones (E.4) y (E.5) da por resultado

$$v_2 = \frac{m - M}{m + M}v_1, \qquad V_2 = \frac{2m}{m + M}v_1 \tag{E.6}$$

El cambio en la cantidad de movimiento de la masa m está dado por

$$m(v_2 - v_1) = m\left(\frac{m - M}{m + M} - 1\right)v_1 = -\left(\frac{2mM}{m + M}\right)v_1 \tag{E.7}$$

Por lo tanto, el impulso aplicado a la masa m durante el impacto lo da

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = -\left(\frac{2mM}{m + M}\right)v_1 \tag{E.8}$$

De acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton, el impulso aplicado a la masa M durante el impacto será el mismo que, pero de signo opuesto, el impulso aplicado a la masa m. Debido al impulso aplicado, la ecuación de movimiento de la masa M se expresa como

$$M\dot{x} + c\dot{x} + kx = \int_0^t F(\tau)\,d\tau = F = \frac{2mM}{m + M}v_1\delta(t) \tag{E.9}$$

Utilizando las condiciones iniciales de M como $x(t = 0) = x_0 = 0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 0$, la solución de la ecuación (E.8) se expresa, utilizando la ecuación (4.26), como

$$x(t) = \frac{Fe^{-\zeta\omega_n t}}{M\omega_d} \text{ sen } \omega_d t = \left(\frac{2mM}{m + M}\right)\frac{v_1}{M\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{ sen } \omega_d t \tag{E.10}$$

■

4.7.4 Respuesta a una fuerza gradual

Ejemplo 4.24 Respuesta escalonada de un sistema subamortiguado

Encuentre la respuesta de un sistema subamortiguado de un solo grado de libertad a una función escalonada unitaria.

Solución: La ecuación de movimiento está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = 1 \tag{E.1}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (E.1) y suponiendo condiciones iniciales cero ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$), obtenemos

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = \mathscr{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{E.2}$$

la cual se reescribe como

$$X(s) = \frac{1}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{E.3}$$

Podemos expresar el lado derecho de la ecuación (E.3) en fracciones parciales como

$$X(s) = \frac{1}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \frac{C_3}{s - s_3} \tag{E.4}$$

donde s_1, s_2 y s_3 son las raíces de la ecuación polinomial

$$s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0 \tag{E.5}$$

las cuales están dadas por

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = -\zeta\omega_n + i\omega_d, \qquad s_3 = -\zeta\omega_n - i\omega_d \tag{E.6}$$

Las constantes C_1, C_2 y C_3 en la ecuación (E.4) se determinan como sigue. Sustituir los valores de s_1, s_2 y s_3 dados por la ecuación (E.6) en la ecuación (E.4) y reordenar los términos nos lleva a

$$\frac{1}{m} = C_1(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + C_2[s^2 + s(\zeta\omega_n + i\omega_d)] + C_3[s^2 + s(\zeta\omega_n - i\omega_d)] \tag{E.7}$$

La ecuación (E.7) se reescribe como

$$s^2(C_1 + C_2 + C_3) + s[(2\zeta\omega_n)\,C_1 + (\zeta\omega_n + i\omega_d)C_2 + (\zeta\omega_n - i\omega_d)C_3] + \omega_n^2 C_1$$
$$= (0)s^2 + (0)s + \frac{1}{m} \tag{E.8}$$

Igualando los coeficientes de los términos correspondientes en ambos lados de la ecuación (E.8), obtenemos

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \tag{E.9}$$

$$C_1(2\zeta\omega_n) + C_2(-\zeta\omega_n + i\omega_d) + C_3(\zeta\omega_n - i\omega_d) = 0 \tag{E.10}$$

$$C_1\omega_n^2 = \frac{1}{m} \tag{E.11}$$

La solución de las ecuaciones (E.9)-(E.11) nos da

$$C_1 = \frac{1}{m\omega_n^2} \tag{E.12}$$

$$C_2 = \frac{1}{2im\omega_d(-\zeta\omega_n + i\omega_d)} \tag{E.13}$$

$$C_3 = \frac{1}{2im\omega_d(\zeta\omega_n + i\omega_d)} \tag{E.14}$$

Utilizando las ecuaciones (E.12)-(E.14) en la ecuación (E.3), $X(s)$ se puede expresar como

$$X(s) = \frac{1}{m\omega_n^2}\frac{1}{s}$$
$$+ \frac{1}{2im\omega_d}\left[\frac{1}{-\zeta\omega_n + i\omega_d}\,\frac{1}{s - (-\zeta\omega_n + i\omega_d)} - \frac{1}{-\zeta\omega_n - i\omega_d}\,\frac{1}{s - (-\zeta\omega_n - i\omega_d}\right] \tag{E.15}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.15) y utilizando los resultados dados en el apéndice D, en el sitio web de este libro, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2im\omega_d}\left(\frac{e^{i\omega_d t}}{-\zeta\omega_n + i\omega_d} - \frac{e^{-i\omega_d t}}{-\zeta\omega_n - i\omega_d}\right)$$
$$= \frac{1}{m\omega_n^2}\left\{1 + \frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{2i\omega_d}[(-\zeta\omega_n - i\omega_d)e^{i\omega_d t} - (-\zeta\omega_n + i\omega_d)e^{-i\omega_d t}]\right\}$$
$$= \frac{1}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d}[\zeta\omega_n \operatorname{sen}\omega_d t + \omega_d \cos\omega_d t]\right\}$$
$$= \frac{1}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\cos(\omega_d t - \phi)\right] \tag{E.16}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \tag{E.17}$$

Se ve que la ecuación (E.16) es la misma que la respuesta escalonada unitaria (con $F_0 = 0$) derivada por medio del método tradicional, ecuación (E.1) del ejemplo 4.9. La respuesta dada por la ecuación (E.16) se muestra en la figura 4.27.

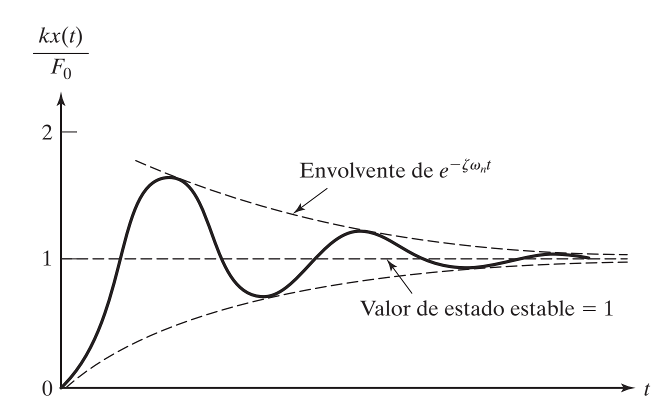


Figura 4.27 Respuesta de un sistema subamortiguado sometido a una fuerza gradual.

Ejemplo 4.25 Valores final e inicial de respuesta escalonada de un sistema subamortiguado

Encuentre los valores inicial y de estado estable de la respuesta escalonada unitaria de un sistema subamortiguado a partir de las respuestas indicadas por las ecuaciones (E.16) y (E.3) del ejemplo 4.24.

Solución: La respuesta del sistema en el dominio del tiempo, ecuación (E.16) del ejemplo 4.24, se escribe como

$$x(t) = \frac{1}{k}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d}[\zeta\omega_n \operatorname{sen}\omega_d t + \omega_d \cos\omega_d t]\right\} \tag{E.1}$$

Con $t = 0$ en la ecuación (E.1), hallamos el valor inicial como 0. Tomando el límite a medida que $t \to \infty$, el término $e^{-\zeta\omega_n t} \to 0$ y por consiguiente el valor de estado estable de $x(t)$ está dado por $1/k$. La respuesta del sistema en el dominio de Laplace se obtiene con la ecuación (E.3) del ejemplo 4.24. Utilizando el teorema del valor inicial, encontramos el valor inicial como

$$x\,(t = 0+) = \lim_{s\to\infty}[sX(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right] = 0$$

$$x_{ee} = \lim_{s\to 0}[sX(s)] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right] = \frac{1}{m\omega_n^2} = \frac{1}{k}$$

■

Ejemplo 4.26 Respuesta de una máquina compactadora

Encuentre la respuesta de la máquina compactadora del ejemplo 4.9 suponiendo que el sistema es subamortiguado (es decir, $\zeta < 1$).

Método: Use un modelo de resorte-masa-amortiguador de la máquina compactadora y la técnica de la transformada de Laplace.

Solución: La función forzada está dada por

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{durante} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{durante} \quad t > t_0 \end{cases} \tag{E.1}$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial rectora, ecuación (4.51), y utilizando el apéndice D, que se encuentra en el sitio web de este libro, obtenemos la siguiente ecuación:

$$X(S) = \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 \tag{E.2}$$

donde

$$F(s) = \mathscr{L}F(t) = \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{s} \tag{E.3}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.2) se escribe como

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 \\ &\quad + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \dot{x}_0 \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{1}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{e^{-t_0 s}}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} \\ &\quad + \frac{x_0}{\omega_n^2} \frac{s}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2}\right) \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} \end{aligned} \tag{E.4}$$

La transformada inversa de la ecuación (E.4) se expresa utilizando los resultados dados en el apéndice D (vea el sitio web de este libro) como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi_1\}\right] \\ &\quad - \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n (t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t - t_0) + \phi_1\}\right] \\ &\quad - \frac{x_0}{\omega_n^2}\left[\frac{\omega_n^2\, e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi_1\}\right] \\ &\quad + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2}\right)\left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t)\right] \end{aligned} \tag{E.5}$$

donde

$$\phi_1 = \cos^{-1}(\zeta) \tag{E.6}$$

Por lo tanto, la respuesta de la máquina compactadora se expresa como

$$\begin{aligned}
&\frac{F_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi_1)\right.\\
&\left. {}^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}\,\text{sen}\,\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t-t_0) + \phi_1\}\right]\\
&\frac{x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi_1)\\
&\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Aun cuando se espera que la primera parte de la ecuación (E.7) sea la misma que la ecuación (E.1) del ejemplo 4.11, es difícil ver la equivalencia en la presente forma de la ecuación (E.7). Sin embargo, para el sistema no amortiguado, la ecuación (E.7) se reduce a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[-\text{sen}\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left\{\omega_n(t-t_0) + \frac{\pi}{2}\right\}\right]\\
&\quad - x_0\,\text{sen}\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\,\text{sen}\,\omega_n t\\
&= \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t] + x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\,\text{sen}\,\omega_n t
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Se ve que la primera parte, o parte de estado estable de la ecuación (E.8), es idéntica a la ecuación (E.3) del ejemplo 4.11.

■

Ejemplo 4.27 Sistema sobreamortiguado sometido a una fuerza gradual

Determine la respuesta de un sistema sobreamortiguado de un solo grado de libertad sometido a una fuerza gradual con la ecuación de movimiento

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 6x = 5u_s(t) \tag{E.1}$$

Suponga la condición inicial como $x_0 = 1$ y $\dot{x}_0 = 2$.

Solución: Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (E.1), obtenemos

$$[2\{s^2X(s) - sx_0 - \dot{x}_0\} + 8\{sX(s) - x_0\} + 6X(s)] = \frac{5}{s}$$

o

$$s(2s^2 + 8s + 6)X(s) = 5 + 2s(sx_0 + \dot{x}_0) + 8sx_0 \tag{E.2}$$

Utilizando los valores iniciales, $x_0 = 1$ y $\dot{x}_0 = 2$, la ecuación (E.2) se expresa como

$$s(2s^2 + 8s + 6)X(s) = 2s^2 + 12s + 5$$

o

$$X(s) = \frac{2s^2 + 12s + 5}{2s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{s^2 + 6s + 2.5}{s(s + 1)(s + 3)} \tag{E.3}$$

Observando que las raíces del polinomio en el denominador del lado derecho de la ecuación (E.3) son $s_1 = 0$, $s_2 = -1$ y $s_3 = -3$, $X(s)$ se expresa, utilizando fracciones parciales, como

$$X(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \frac{C_3}{s - s_3} \tag{E.4}$$

donde las constantes se pueden hallar, utilizando la ecuación (D.1), como

$$C_k = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_k}; \qquad k = 1, 2, 3 \tag{E.5}$$

donde $A(s)$ es el numerador y $B(s)$ es el denominador de la expresión media en la ecuación (E.3) y una prima indica la derivada con respecto a s. La expresión media en la ecuación (E.3) da por resultado

$$\frac{A(s)}{B'(s)} = \frac{s^2 + 6s + 2.5}{3s^2 + 8s + 3} \tag{E.6}$$

Las ecuaciones (E.5) y (E.6) dan

$$C_1 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_1=0} = \frac{2.5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$C_2 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_2=-1} = \frac{-2.5}{-2} = \frac{5}{4}$$

$$C_3 = \left.\frac{A(s)}{B'(s)}\right|_{s=s_3=-3} = \frac{-6.5}{6} = -\frac{13}{12} \tag{E.7}$$

Considerando las ecuaciones (E.7), la ecuación (E.4) se escribe como

$$X(s) = \frac{5}{6}\frac{1}{s} + \frac{5}{4}\frac{1}{s + 1} - \frac{13}{12}\frac{1}{s + 3} \tag{E.8}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.8), obtenemos la respuesta del sistema como

$$x(t) = \frac{5}{6} + \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{-3t} \tag{E.9}$$

La respuesta dada por la ecuación (E.9) se muestra gráficamente en la figura 4.28.

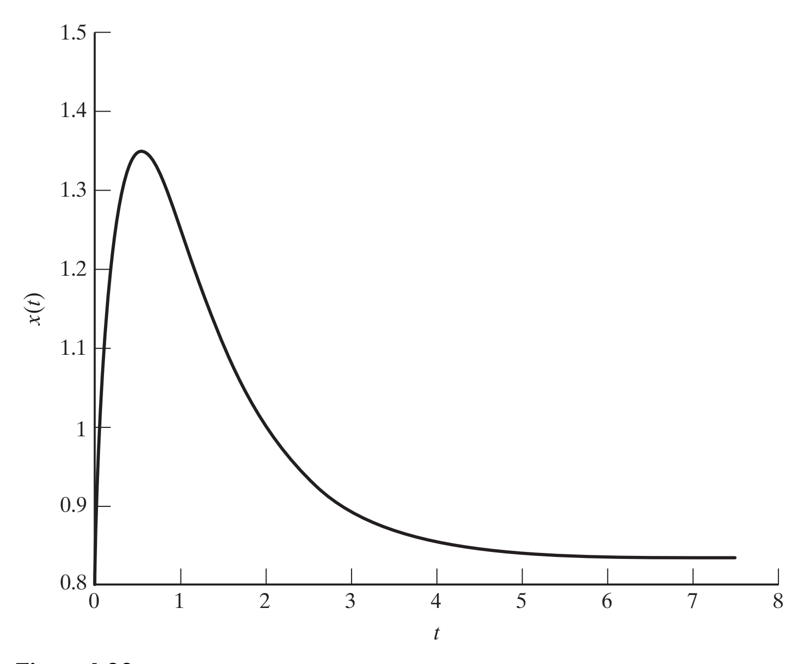


Figura 4.28

■

4.7.5 Análisis de la respuesta escalonada

La respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sometido a una fuerza gradual, dada por las ecuaciones (E.1) y (E.2) del ejemplo 4.9 y las ecuaciones (E.16) y (E.17) del ejemplo 4.24, se pueden expresar en la forma

$$\frac{kx(t)}{F_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \tag{4.52}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{4.53}$$

Las variaciones de la respuesta no dimensional $kx(t)/F_0$, con el tiempo no dimensional, $\omega_n t$, se muestran gráficamente en la figura 4.29 para varios valores de la relación de amortiguamiento ζ. Se ve que para un sistema no amortiguado ($\zeta = 0$), la respuesta presenta oscilaciones que nunca cesan. Para un sistema subamortiguado ($\zeta < 1$), la respuesta sobrepasa y oscila en torno al valor final o de estado estable. Además, cuanto más pequeño es el valor de la relación de amortiguamiento más grande será el sobrepaso, de modo que las oscilaciones tardan más en cesar. Para un sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$), la respuesta alcanza el valor final o de estado estable más rápido sin oscilación. Para un sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$), la respuesta alcanza el valor de estado estable lentamente sin sobrepaso.

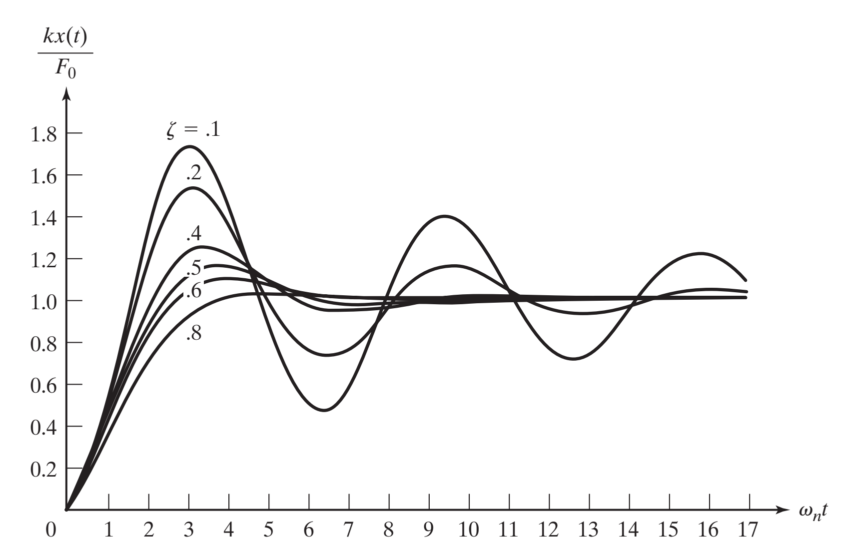


Figura 4.29 Respuesta de un sistema subamortiguado debido a una fuerza gradual unitaria.

4.7.6 Descripción de una respuesta transitoria

El desempeño y comportamiento de un sistema vibratorio para respuesta transitoria se describe en función de parámetros como sobrepaso máximo, tiempo pico, tiempo de subida, tiempo de retardo y tiempo de asentamiento. Estos parámetros se muestran en la figura 4.30, la cual indica una respuesta escalonada típica de un sistema subamortiguado. Se analizan a continuación.

1. ***Tiempo pico (t_p):*** El tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobrepaso.

La cantidad máxima de los sobrepasos de respuesta, M_p, ocurre cuando la derivada de $x(t)$ es cero. La ecuación (E.16) del ejemplo 4.24 da la variación de tiempo de la respuesta escalonada unitaria de un sistema subamortiguado:

$$kx(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t + \cos\omega_d t\right) \tag{4.54}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. La ecuación (4.54) también se puede expresar en forma compacta como

$$kx(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\sqrt{1+\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)^2}\cos(\omega_d t - \alpha) \tag{4.55}$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \qquad (4.56) \qquad (4.56)$$

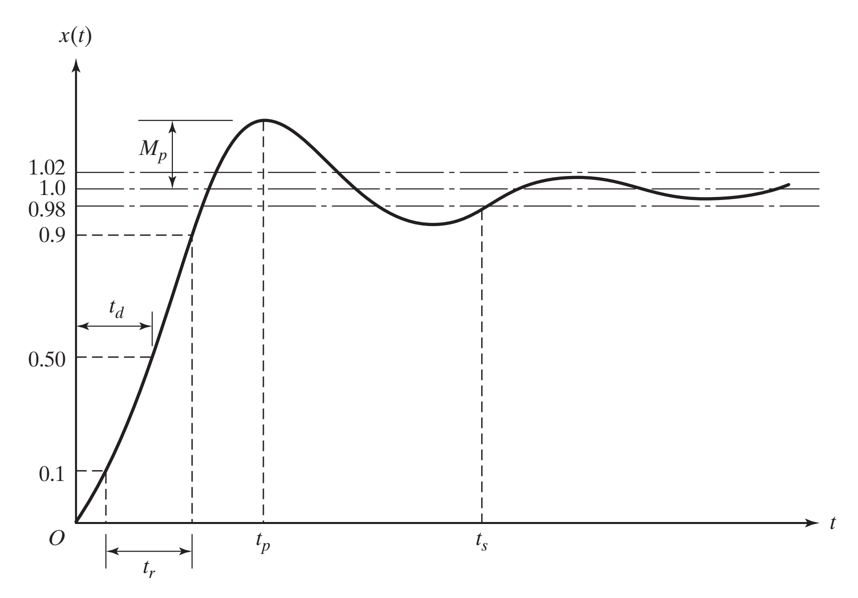


Figura 4.30 Especificaciones de la respuesta de un sistema subamortiguado.

La derivada de $x(t)$ será cero cuando $x(t)$ alcance su máximo, de modo que

$$k\dot{x}(t) = \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t + \cos\omega_d t\right\}$$
$$- e^{-\zeta\omega_n t}\{\zeta\omega_n\cos\omega_d t - \omega_d \operatorname{sen}\omega_d t\} = 0$$

o

$$e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\frac{(\zeta\omega_n)^2}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t + \omega_d \operatorname{sen}\omega_d t\right\} = 0 \tag{4.57}$$

La ecuación (4.57) se satisface cuando sen $\omega_d t = 0$ de modo que

$$\omega_d t_p = 0 \tag{4.58}$$

Por lo tanto, el tiempo pico está dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4.59}$$

2. ***Tiempo de subida*** (***t_s***)***:*** El tiempo de subida es el tiempo necesario para que la respuesta suba de 10% a 90% del valor final o de estado estable para sistemas sobreamortiguados. Por lo común, para sistemas subamortiguados el tiempo de subida se considera como el tiempo requerido para que la respuesta suba de 0% a 100% del valor final o de estado estable.

   Suponiendo que el tiempo de subida es igual al tiempo requerido para que la respuesta suba de 0% a 100%, podemos determinar el tiempo de subida igualando el valor de $x(t)$ dado por la ecuación (4.54) en el instante t_s a uno:

$$x(t_s) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_s}\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t_s + \cos\omega_d t_s\right) \tag{4.60}$$

Observamos que $e^{-\zeta\omega_n t_s} \neq 0$, la ecuación (4.60) da por resultado

$$\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t_s + \cos\omega_d t_s\right) = 0$$

o

$$\tan\omega_d t = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{4.61}$$

Ésta da el tiempo de subida t_s como

$$t_s = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d} \tag{4.62}$$

donde la ecuación (4.56) da α. La misma ecuación indica que el tiempo de subida t_s se puede reducir incrementando el valor de ω_d o ζ.

3. ***Sobrepaso máximo (M_p):*** Es el valor pico máximo de la respuesta comparado con el valor final o de estado estable ($x(\infty)$ o x_{ee}) expresado como un porcentaje del valor de estado estable. Se puede calcular como

$$\text{Soprepaso} = \frac{x(t_p) - x(\infty)}{x(\infty)} \tag{4.63}$$

Sustituyendo la ecuación (4.59) en la expresión $x(t)$, ecuación (4.54), obtenemos

$$x(t_p) \equiv 1 + M_p = 1 - e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\pi + \cos\pi\right) = 1 + e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} \tag{4.64}$$

Por lo tanto, el sobrepaso está dado por

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.65}$$

El sobrepaso en porcentaje se obtiene como

$$\%\, M_p = 100 e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4.66}$$

Si invertimos la relación en la ecuación (4.66), podemos encontrar la relación de amortiguamiento (ζ) para un porcentaje de sobrepaso dado como

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\%\, M_p/100\right))}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\%\, M_p/100\right)}} \tag{4.67}$$

El sobrepaso dado por la ecuación (4.65), se muestra gráficamente en la figura 4.31.

4. ***Tiempo de asentamiento:*** Este tiempo, por definición, es aquel durante el cual $x(t)$ en la ecuación (4.55) llega y se mantiene dentro de $\pm 2\%$ del valor de estado estable, x_{final}. Suponiendo que el término coseno en la ecuación (4.55) es aproximadamente igual a uno, el tiempo requerido para que el factor de multiplicación del término coseno alcance un valor de 0.02 da el tiempo de asentamiento:

$$e^{-\zeta\omega_n t_a}\sqrt{1+\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)^2} = e^{-\zeta\omega_n t_a}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02$$

la cual nos da

$$t_a = \frac{-\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{4.68}$$

A medida que ζ varía de 0 a 0.9, el numerador en la ecuación (4.68) varía de 3.01 a 4.74. Por lo tanto, el tiempo de asentamiento, válido aproximadamente para todos los valores de ζ, se puede considerar como

$$t_a \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{4.69}$$

5. ***Tiempo de demora (t_d):*** Éste es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el 50% del valor final o de estado estable por primera vez.

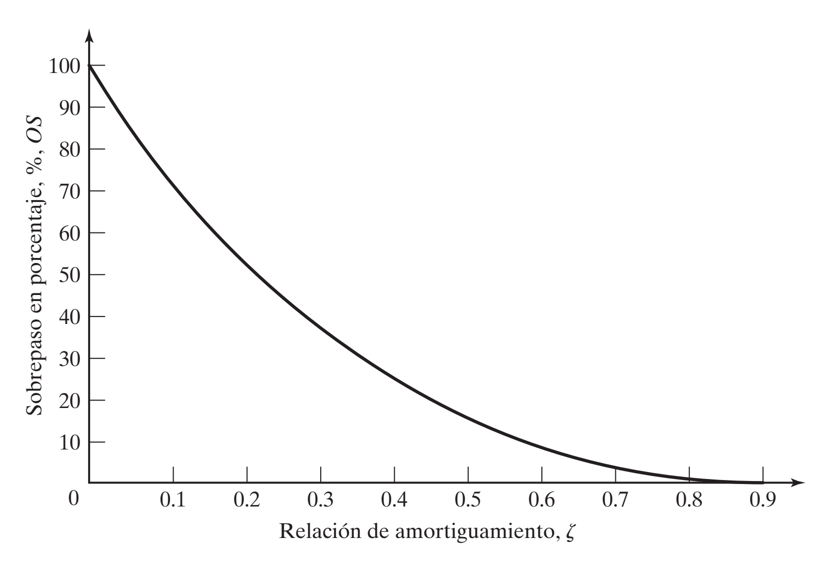


Figura 4.31 Variación de sobrepaso en porcentaje con la relación de amortiguamiento.

Ejemplo 4.28 Características de respuesta derivadas de la función de transferencia

Encuentre el tiempo pico (t_p), porcentaje de sobrepaso ($\% M_p$), tiempo de asentamiento (t_a) y tiempo de subida (t_s) con la función de transferencia del sistema dada por

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{225}{s^2 + 15s + 225} \tag{E.1}$$

Solución: La frecuencia natural del sistema se puede hallar a partir del último término en el denominador de la ecuación (E.1):

$$\omega_n = \sqrt{225} = 15 \text{ rad/s} \tag{E.2}$$

La relación de amortiguamiento se determina desde el término medio en el denominador de la ecuación (E.1) como

$$2\zeta\omega_n = 15 \text{ o } \zeta = \frac{15}{2\omega_n} = \frac{15}{2(15)} = 0.5 \tag{E.3}$$

La sustitución de los valores de ω_n y ζ en las ecuaciones (4.59), (4.66), (4.69) y (4.62) da por resultado

$$\text{Tiempo pico} = t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{15\sqrt{1-0.5^2}} = 0.2418 \text{ s} \tag{E.4}$$

$$\text{Porcentaje de sobrepaso} = \% M_p = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\left(\frac{\pi(0.5)}{\sqrt{1-0.5^2}}\right)} = 100(0.1231) = 12.31 \tag{E.5}$$

$$\text{Tiempo de asentamiento} = t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5(15)} = 0.5333 \text{ s} \tag{E.6}$$

$$\text{Tiempo de subida} = t_r = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d} = \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\omega_d}$$

$$= \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}\right)}{15\sqrt{1-0.5^2}} = 0.2015 \text{ s} \tag{E.7}$$

Este ejemplo demuestra que las características de respuesta, tiempo pico, porcentaje de sobrepaso, tiempo de asentamiento y tiempo de subida, se determinan sin la tediosa tarea de buscar la respuesta en función del tiempo mediante una transformada inversa de Laplace, trazando la respuesta en función del tiempo y tomando medidas de la curva en función del tiempo resultante.

■

Ejemplo 4.29 Parámetros de sistema obtenidos a partir de las características de respuesta conocidas

Determine los valores del momento de inercia de masa y la constante de amortiguamiento de un sistema torsional, mostrado en la figura 4.32, para alcanzar 25% de sobrepaso y un tiempo de asentamiento de 2.5 s durante un par de torsión escalonado de entrada $T_0(t)$. La rigidez torsional del sistema es de 10 N-m/rad.

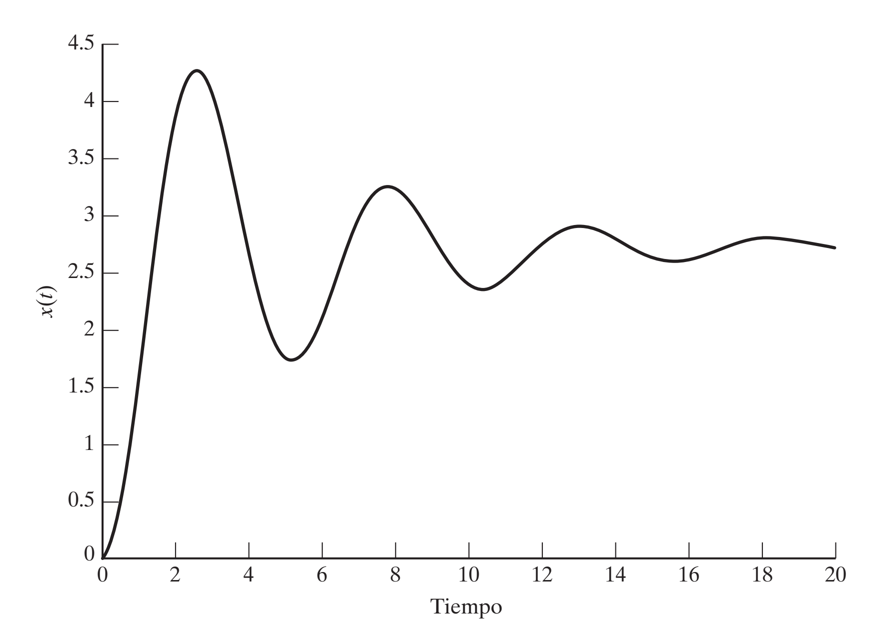


Figura 4.32

Solución: La función de transferencia del sistema se expresa como

$$T(s) = \frac{\Theta(s)}{T_0(s)} = \frac{(1/J)}{s^2 + \frac{c_t}{J}s + \frac{k_t}{J}} \tag{E.1}$$

A partir del último término en el denominador de la ecuación (E.1), obtenemos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}} \tag{E.2}$$

El término medio en el denominador de la ecuación (E.1) da

$$2\zeta\omega_n = \frac{c_t}{J} \tag{E.3}$$

Como el tiempo de asentamiento es de 2.5 s, tenemos (por la ecuación 4.69):

$$t_a = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.5 \qquad \text{o} \qquad \zeta\omega_n = 1.6 \tag{E.4}$$

Las ecuaciones (E.3) y (E.4) dan

$$2\zeta\omega_n = 3.2 = \frac{c_t}{J} \tag{E.5}$$

Las ecuaciones (E.2) y (E.4) dan por resultado

$$\zeta = \frac{1.6}{\omega_n} = 1.6\sqrt{\frac{J}{k_t}} \tag{E.6}$$

Utilizando el porcentaje de sobrepaso conocido, la relación de amortiguamiento se determina por la ecuación (4.67) como

$$\zeta = -\frac{\ln(\% M_p/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\% M_p/100)}} = -\frac{\ln(25/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(25/100)}} = 0.4037 \tag{E.7}$$

La ecuación (E.4) da

$$\omega_n = \frac{1.6}{\zeta} = \frac{1.6}{0.4037} = 3.9633 \text{ rad/s} \tag{E.8}$$

La ecuación (E.2) da por resultado

$$J = \frac{k_t}{\omega_n^2} = \frac{10}{3.9633^2} = 0.6366 \text{ kg-m}^2 \tag{E.9}$$

La constante de amortiguamiento torsional c_t se encuentra a partir de la ecuación (E.5) como

$$c_t = 3.2J = 3.2(0.6366) = 2.0372 \text{ N-m-s/rad} \tag{E.10}$$

■

4.8 Métodos numéricos

La determinación de la respuesta de un sistema sometido a funciones forzadas arbitrarias mediante métodos numéricos se llama simulación numérica. Los métodos analíticos comentados hasta ahora llegan a ser tediosos y en ocasiones incluso imposibles de utilizar para hallar la respuesta de un sistema si la función forzada o excitación no se puede describir en una forma analítica simple o si se tienen que utilizar datos de fuerza experimentalmente determinados (como la reseña de la aceleración del suelo medida durante un sismo). Se pueden utilizar métodos numéricos para verificar la exactitud de las soluciones analíticas, sobre todo si el sistema es complejo. Del mismo modo, las soluciones numéricas se tienen que verificar por medio de métodos analíticos siempre que sea posible. En esta sección se consideran los métodos numéricos de resolver sistemas de un solo grado de libertad sometidos a funciones forzadas arbitrarias.

Las soluciones analíticas son sumamente útiles para comprender el comportamiento de un sistema con respecto a cambios en sus parámetros. Las soluciones analíticas constituyen una ayuda directa al diseñar sistemas que satisfagan cualquier característica de respuesta especificada con la selección apropiada de valores de parámetros. Si la solución analítica se dificulta, la respuesta del sistema se puede hallar por medio de un procedimiento de integración numérica. Se cuenta con varios métodos para la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los métodos de Runge-Kutta son un lugar común para la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

Considere la ecuación de movimiento de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sometido a una fuerza arbitraria $f(t)$:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{4.70}$$

con las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$. La mayoría de los métodos numéricos asumen que la ecuación diferencial aparece en la forma de una ecuación diferencial de primer orden

(o un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden). Como tal, tenemos que convertir la ecuación diferencial de segundo orden, ecuación (4.70), en un conjunto equivalente de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para esto, introducimos las funciones desconocidas

$$x_1(t) = x(t), \qquad x_2(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}_1(t) \tag{4.71}$$

y reescribimos la ecuación (4.70) como

$$m\ddot{x}(t) = -c\dot{x}(t) - kx(t) + f(t) \tag{4.72}$$

o, considerando las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ introducidas en la ecuación (4.71),

$$m\dot{x}_2 = -cx_2(t) - kx_1(t) + f(t) \tag{4.73}$$

La ecuación (4.73) junto con la segunda relación dada en la ecuación (4.71) se puede expresar como

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{4.74}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{c}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \tag{4.75}$$

Las ecuaciones (4.74) y (4.75) representan dos ecuaciones diferenciales de primer orden y juntas indican la ecuación (4.70). Las ecuaciones (4.74) y (4.75) se pueden expresar en forma vectorial como

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{F}(\vec{X}, t) \tag{4.76}$$

donde

$$\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix},$$

$$\vec{F}(\vec{X}, t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \end{Bmatrix} \tag{4.77}$$

4.8.1 Métodos de Runge-Kutta

En la mayoría de los métodos numéricos se obtienen soluciones mejoradas con la presente solución (comenzando con un valor inicial conocido en el tiempo cero) de acuerdo con la fórmula

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \tag{4.78}$$

donde x_{i+1} es el valor de x en $t = t_{i+1}$, x_i es el valor de x en $t = t_i$, y Δx es el mejoramiento incremental agregado a x_i. Si la solución, $x(t)$, se va a determinar durante el intervalo $0 \le t \le T$, el tiempo total se divide en n partes iguales con $\Delta t = T/n$, de modo que $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\,\Delta t$, ... $t_i = i\,\Delta t$, ..., $t_n = n\,\Delta t = T$.

En los métodos de Runge-Kutta se hace que la fórmula aproximada utilizada para obtener la solución x_{i+1} a partir de x_i coincida con la expansión en serie de Taylor de x en x_{i+1} hasta términos de orden $(\Delta t)^k$, donde k significa el orden del método de Runge-Kutta. La expansión en serie de Taylor de $x(t)$ en $t + \Delta t$ está dada por

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\,\Delta t + \ddot{x}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dddot{x}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \ldots \tag{4.79}$$

En contraste con la ecuación (4.79), la cual requiere derivadas de alto orden, los métodos de Runge-Kutta no necesitan derivadas explícitamente más allá del primer orden.

En el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual es el más comúnmente utilizado, se usa la siguiente fórmula de recurrencia para encontrar los valores de $\vec{X}(t)$ en diferentes estaciones de tiempo t_i comenzando a partir del vector inicial conocido, $\vec{X}_0 = \begin{Bmatrix} x(t = 0) \\ \dot{x}(t = 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{Bmatrix}$:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \frac{1}{6}[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4] \tag{4.80}$$

donde

$$\vec{K}_1 = h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i) \tag{4.81}$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{F}\left(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{1}{2}h\right) \tag{4.82}$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{F}\left(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{1}{2}h\right) \tag{4.83}$$

$$\vec{K}_4 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+1}) \tag{4.84}$$

El método es estable y de inicio automático, es decir, sólo se requiere el valor de la función vector $\vec{F}$ en una estación de tiempo previa única para determinar la función en la estación de tiempo actual. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 4.30 Respuesta obtenida con el método de Runge-Kutta

Encuentre la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad sometido a una fuerza con la ecuación de movimiento

$$500\ddot{x} + 200\dot{x} + 750x = F(t) = 2000 \tag{E.1}$$

de modo que $m = 500$, $c = 200$, $k = 750$ y $F(t) = F_0 = 2000$. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Asuma las condiciones iniciales como $x(t = 0) = x_0 = 0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 0$.

Solución: La ecuación de movimiento dada por la ecuación (E.1) se expresa como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden como se muestra en la ecuación (4.76) con

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2(t) \\ \dfrac{1}{500}(2000 - 200x_2 - 750x_1) \end{Bmatrix}$$

y

$$\vec{X}_0 = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La respuesta se calcula durante el tiempo $(0, T)$. La función de tiempo de $T = 20$ s se divide en 400 etapas iguales de modo que

$$\Delta t = h = \frac{T}{400} = \frac{20}{400} = 0.05 \text{ s}$$

Por lo tanto, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.10$, $t_3 = 0.15$, ..., $t_{400} = 20.0$. Se aplica el método de Runge-Kutta para hallar la respuesta del sistema $(x_1(t))$. En la tabla 4.1 se muestran vectores de solución típicos $\vec{X}_i$ para $i = 1, 2, 3, ..., 400$. La respuesta del sistema se muestra trazada en la figura 4.32.

■

Tabla 4.1

i	$x_1(i) = x(t_i)$	$x_2(i) = x(t_i)$
1	0.000000e+000	0.000000e+000
2	4.965271e−003	1.978895e−001
3	1.971136e−002	3.911261e−001
4	4.398987e−002	5.790846e−001
5	7.752192e−022	7.611720e−001
6	1.199998e−001	9.368286e−001
⋮ 7	1.710888e−001	1.105530e+000
8	2.304287e−001	1.266787e+000
9	2.976359e−001	1.420150e+000
10	3.723052e−001	1.565205e+000
391	2.675602e+000	−6.700943e−002
392	2.672270e+000	−6.622167e−002
393	2.668983e+000	−6.520372e−002
394	2.665753e+000	−6.396391e−002
395	2.662590e+000	−6.251125e−002
396	2.659505e+000	−6.085533e−002
397	2.656508e+000	−5.900634e−002
398	2.653608e+000	−5.697495e−002
399	2.650814e+000	−5.477231e−002
400	2.648133e+000	−5.241000e−002

4.9 Respuesta a condiciones forzadas irregulares obtenida aplicando métodos numéricos

En el método de integración numérica directa de la ecuación de movimiento (solución numérica de ecuaciones diferenciales) presentado en la sección 4.8 se supuso que las funciones forzadas $F(t)$ están disponibles como funciones de tiempo de una manera explícita. En muchos problemas prácticos, sin embargo, las funciones forzadas $F(t)$ no están disponibles como expresiones analíticas. Cuando una función forzada se determina experimentalmente, $F(t)$ se puede denominar como una curva irregular. En ocasiones sólo se puede disponer de los valores de $F(t) = F_i$ en una serie de puntos $t = t_i$ en la forma de un diagrama o una tabla. En esos casos podemos ajustar polinomios o algunas curvas como esas a los datos y utilizarlas en la integral de Duhamel, ecuación (4.31), para hallar la respuesta del sistema. Otro método más común de determinar la respuesta implica dividir el eje del tiempo en varios puntos discretos y utilizar una variación simple de $F(t)$ durante cada etapa. Presentaremos este método numérico en esta sección, utilizando una función de interpolación lineal para $F(t)$ [4.8].

Permita que la función varíe con el tiempo de una manera arbitraria, como se indica en la figura 4.33. Esta función forzada se representa de forma aproximada con una función lineal por partes. En la interpolación lineal por partes se supone que la variación de $F(t)$ en cualquier intervalo es lineal, como se muestra en la figura 4.34. En este caso, la respuesta del sistema en el intervalo $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ se puede encontrar agregando la respuesta producida por la función (rampa) lineal aplicada durante el intervalo actual a la respuesta existente en $t = t_{j-1}$ (condición inicial). De aquí resulta

$$x(t) = \frac{\Delta F_j}{k\,\Delta t_j}\left[t - t_{j-1} - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n(t-t_{j-1})} \times \left\{\frac{2\zeta}{\omega_n}\cos\omega_d(t - t_{j-1}) - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2\omega_n^2}{\omega_n^2\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d(t - t_{j-1})\right\}\right]$$
$$+ \frac{F_{j-1}}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n(t-t_{j-1})}\left\{\cos\omega_d(t - t_{j-1}) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d(t - t_{j-1})\right\}\right]$$
$$+ e^{-\zeta\omega_n(t-t_{j-1})}\left[x_{j-1}\cos\omega_d(t - t_{j-1}) + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta\omega_n x_{j-1}}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d(t - t_{j-1})\right] \tag{4.85}$$

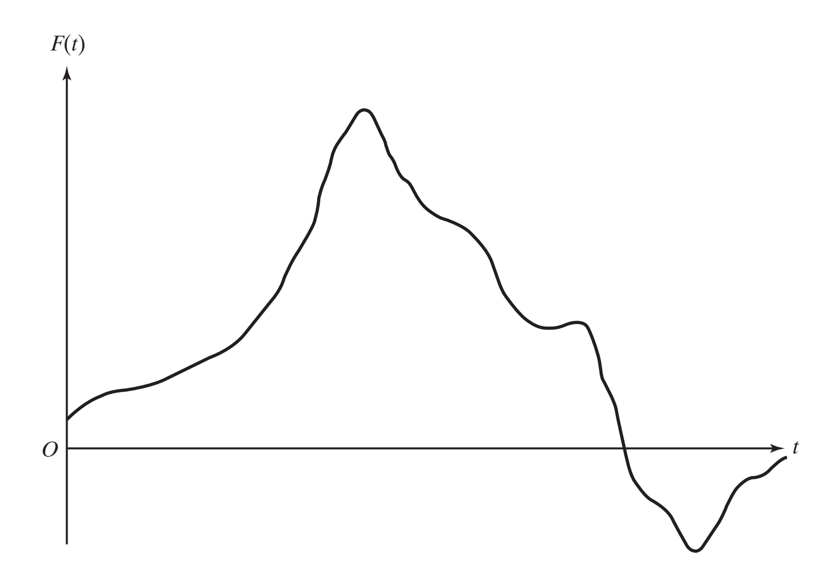


Figura 4. 33 Función forzada arbitraria.

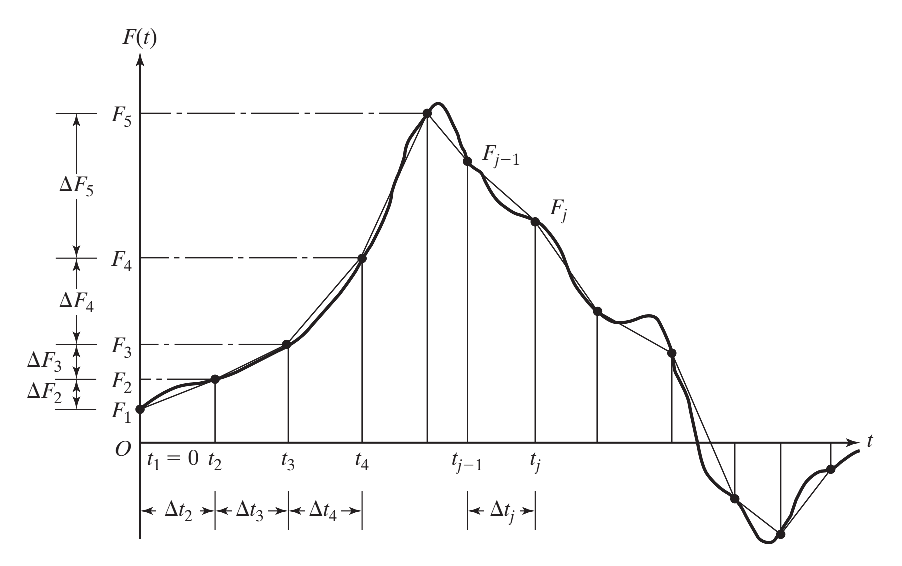


Figura 4.34 Aproximación de una función forzada como una función lineal definida por partes.

donde $\Delta F_j = F_j + F_{j-1}$. Al establecer $t = t_j$ en la ecuación (4.85), obtenemos la respuesta al final del intervalo Δt_j:

$$\begin{aligned} x_j = {} & \frac{\Delta F_j}{k\,\Delta t_j}\left[\Delta t_j - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j}\left\{\frac{2\zeta}{\omega_n}\cos\omega_d\,\Delta t_j - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2\omega_n^2}{\omega_n^2\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j\right\}\right] \\ & + \frac{F_{j-1}}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j}\left\{\cos\omega_d\,\Delta t_j + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j\right\}\right] \\ & + e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j}\left[x_{j-1}\cos\omega_d\,\Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta\omega_n x_{j-1}}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j\right] \end{aligned} \tag{4.86}$$

Diferenciando la ecuación (4.85) con respecto a t y sustituyendo $t = t_j$, obtenemos la velocidad al final del intervalo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = {} & \frac{\Delta F_j}{k\,\Delta t_j}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j}\left\{\cos\omega_d\,\Delta t_j + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j\right\}\right] \\ & + \frac{F_{j-1}}{k}e^{-\zeta\omega_n\Delta t_j}\frac{\omega_n^2}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j + e^{-\zeta\omega_n\,\Delta t_j} \\ & \times\left[\dot{x}_{j-1}\cos\omega_d\,\Delta t_j - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\left(\dot{x}_{j-1} + \frac{\omega_n}{\zeta}x_{j-1}\right)\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t_j\right] \end{aligned} \tag{4.87}$$

Las ecuaciones (4.86) y (4.87) son las relaciones de recurrencia para determinar la respuesta del sistema al final de la j-ésima etapa.

Ejemplo 4.31 Respuesta amortiguada obtenida aplicando métodos numéricos

Encuentre la respuesta de un sistema de resorte-masa-amortiguador sometido a la función forzada

$$F(t) = F_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2t_0}\right) \tag{E.1}$$

en el intervalo $0 \leq t \leq t_0$, aplicando un procedimiento numérico. Suponga $F_0 = 1$, $k = 1$, $m = 1$, $\zeta = 0.1$ y $t_0 = \tau_n/2$ donde τ_n indica el periodo de vibración natural dado por

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{(k/m)^{1/2}} = 2\pi \tag{E.2}$$

Los valores de x y $\dot{x}$ en el instante $t = 0$ son cero.

Solución: La figura 4.35 muestra la función forzada de la ecuación (E.1). Para los cálculos numéricos, el intervalo de 0 a t_0 se divide en 10 escalones iguales con

$$\Delta t_i = \frac{t_0}{10} = \frac{\pi}{10}; \qquad i = 2, 3, \ldots, 11 \tag{E.3}$$

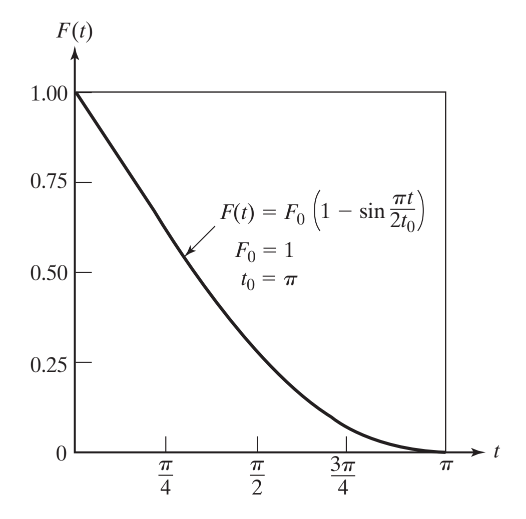


Figura 4.35 Función forzada.

■

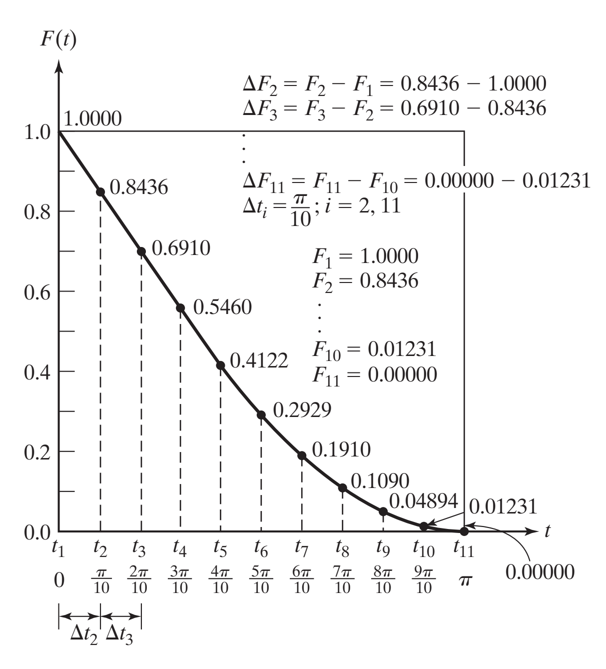


Figura 4.36 Aproximación lineal por partes.

Tabla 4.2 Respuesta del sistema

i	t_i	$x(t_i)$ Obtenida de acuerdo con la figura 4.36 (Idealización 4)
1	0	0.00000
2	0.1π	0.04541
3	0.2π	0.16377
4	0.3π	0.32499
5	0.4π	0.49746
6	0.5π	0.65151
7	0.6π	0.76238
8	0.7π	0.81255
9	0.8π	0.79323
10	0.9π	0.70482
11	π	0.55647

En la figura 4.36 se utilizan impulsos lineales por partes (trapezoidales) para aproximar la función forzada $F(t)$. Los resultados numéricos se dan en la tabla 4.1. Los resultados se pueden mejorar por medio de un polinomio de mayor grado para interpolación en lugar de la función lineal.

4.10 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 4.32 Respuesta total de un sistema sometido a excitación de la base

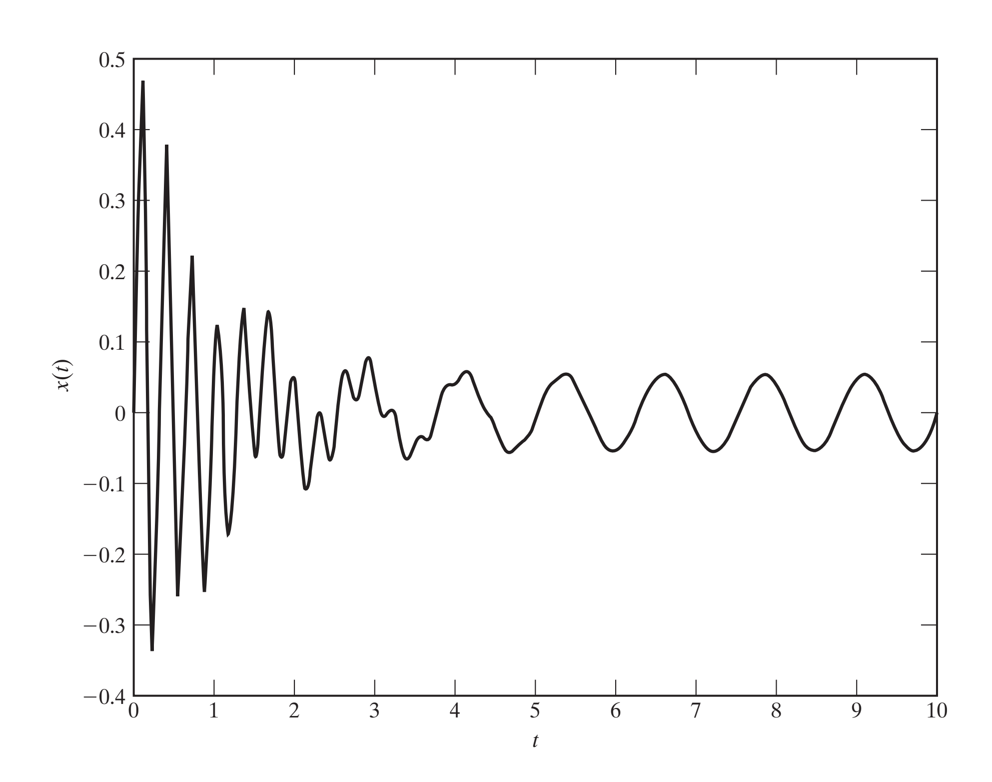
Utilizando MATLAB, trace la respuesta total del sistema viscosamente amortiguado sometido a excitación armónica de la base que se considera en el ejemplo 4.5.

Solución: La ecuación (E.8) del ejemplo 4.5 da la respuesta total del sistema:

$$x(t) = 0.488695e^{-t}\cos(19.975t - 1.529683)$$
$$+ 0.001333\cos(5t - 0.02666) + 0.053314\,\text{sen}(5t - 0.02666)$$

A continuación se proporciona el programa MATLAB para trazar esta ecuación

```
% Ex4_32.m
for i = 1: 1001
    t(i) = (i - 1)*10/1000;
     x(i) = 0.488695 * exp(-t(i)) * cos(19.975*t(i)-1.529683) + ...
          0.001333*cos(5*t(i)-0.02666) + 0.053314 * sin(5*t(i)
          - 0.02666);
 end
 plot(t,x);
 xlabel('t');
 ylabel('x(t)');
```



■

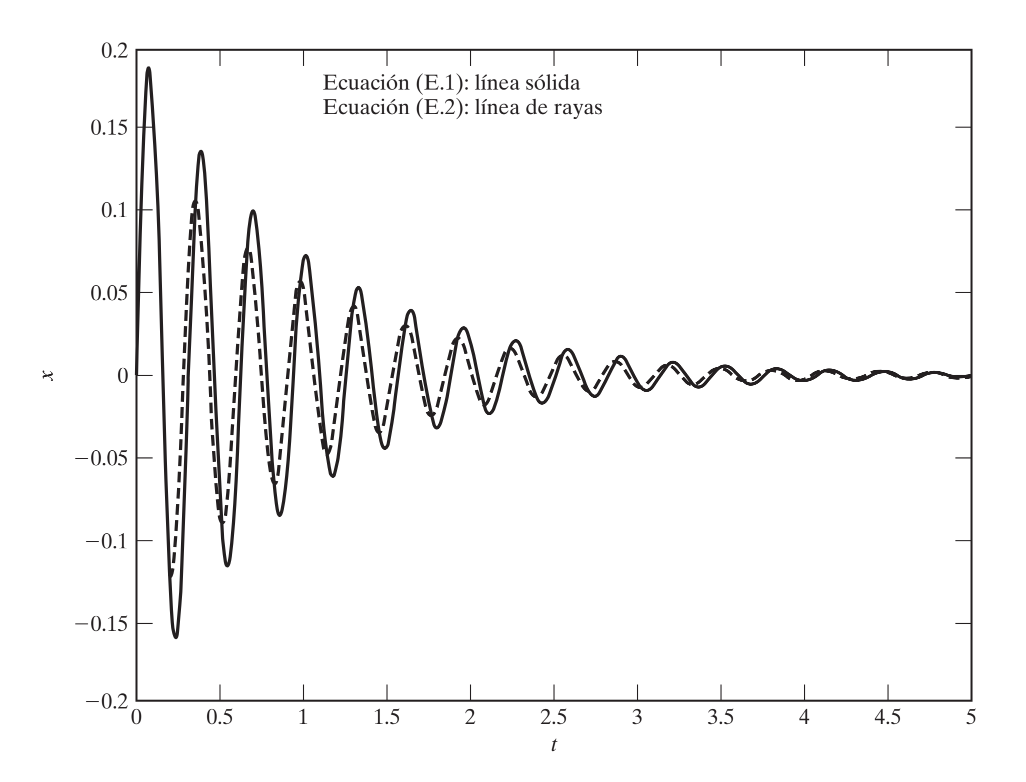
Ejemplo 4.33 Respuesta a un impulso de una estructura

Utilizando MATLAB, trace la respuesta a un impulso de la estructura de un solo grado de libertad debido a (a) un impacto simple y (b) un impacto doble, que se considera en los ejemplos 4.7 y 4.8.

Solución: Las ecuaciones (E.1) y (E.3) de los ejemplos 4.7 y 4.8, respectivamente, dan las respuestas de la estructura a un impulso debido a impactos sencillo y doble:

$$x(t) = 0.20025e^{-t} \operatorname{sen} 19.975t \tag{E.1}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0.20025e^{-t} \operatorname{sen} 19.975t; \; 0 \le t \le 0.2 \\ 0.20025e^{-t} \operatorname{sen} 19.975t + 0.100125e^{-(t-0.2)} \operatorname{sen} 19.975(t - 0.2); \; t \ge 0.2 \end{cases} \tag{E.2}$$



A continuación se da el programa MATLAB para trazar las ecuaciones (E.1) y (E.2).

```
% Ex4_33.m
for i = 1: 1001
    t (i) = (i-1)*5/1000;
    x1(i) = 0.20025 * exp(-t(i)) * sin(19.975*t(i));
    if t(i) > 0.2
        a = 0.100125;
    else
        a = 0.0;
    end
    x2(i) = 0.20025 * exp(-t(i)) * sin(19.975*t(i)) + ...
        a * exp(-(t(i)-0.2)) * sin(19.975*(t(i)-0.2));
end
plot(t,x1);
gtext('Eq. (E.1): solid line');
hold on;
plot(t,x2,'—');
gtext('Eq. (E.2): dash line');
xlabel('t');
```

■

Ejemplo 4.34 Respuesta bajo una fuerza periódica

Desarrolle un programa MATLAB de uso general, llamado **Program4.m**, para hallar la respuesta de estado estable de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad bajo una fuerza periódica. Use el programa para encontrar la respuesta de un sistema sometido a la fuerza que se muestra en la figura adjunta con los siguientes datos: $m = 100$ kg, $k = 10^5$ N/m, $\zeta = 0.1$.

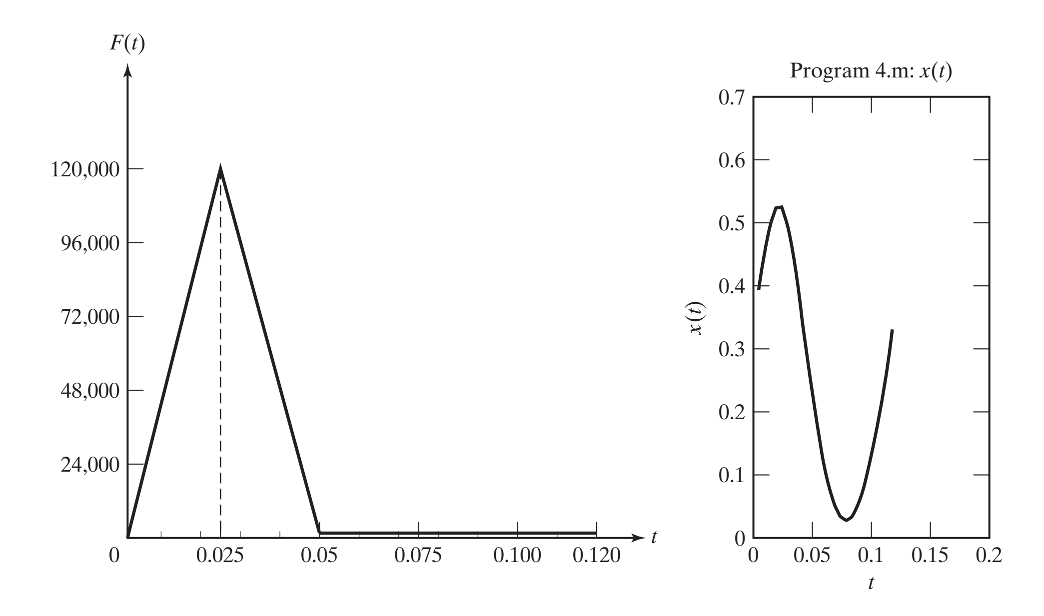
Solución: El programa **Program4.m** se desarrolla para que acepte los valores de la fuerza periódica a n valores discretos de tiempo. Los datos de entrada del programa son los siguientes:

xm = masa del sistema
xk = rigidez del sistema
xai = relación de amortiguamiento (ζ)
n = número de puntos equidistantes en los cuales se conocen los valores de la fuerza $F(t)$
m = número de coeficientes de Fourier que se considerarán en la solución
tiempo = duración de la función $F(t)$
f = matriz de dimensión n que contiene los valores conocidos de $F(t)$; $f(i) = F(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$
t = matriz de dimensión n que contiene los valores discretos conocidos de tiempo t; $t(i) = t_i$, $i = 1, 2, ..., n$

El programa proporciona los siguientes datos de salida:

número de escalones i, $t(i)$, $f(i)$, $x(i)$

donde $x(i) = x(t = t_i)$ es la respuesta en el escalón de tiempo i. El programa también traza la variación de x con el tiempo.



■

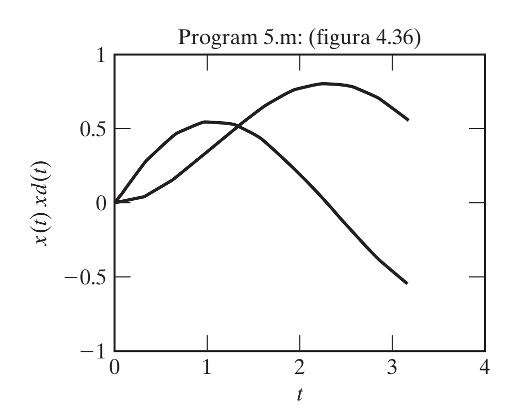
Ejemplo 4.35 Respuesta bajo una función forzada arbitraria

Desarrolle un programa MATLAB de uso general, llamado **`Program5.m`**, para determinar la respuesta de un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado sometido a una función forzada arbitraria mediante los métodos de la sección 4.9. Use el programa para determinar la solución del ejemplo 4.31.

Solución: El programa **`Program5.m`** se desarrolla para que acepte los valores de la fuerza aplicada a n valores discretos de tiempo. El programa requiere los siguientes datos de entrada:

n = número de estaciones de tiempo en las cuales se conocen los valores de la función forzada
t = matriz de tamaño n que contiene los valores del tiempo en los cuales se conoce la función forzada
f = matriz de tamaño n que contiene los valores de la función forzada en varias estaciones de tiempo de acuerdo con la idealización de la figura 4.34 (figura 4.36 para el ejemplo 4.31)
ff = matriz de tamaño n que contiene los valores de la función forzada en varias estaciones de tiempo de acuerdo con la idealización de la figura 4.34 (figura 4.36 para el ejemplo 4.31)
xai = factor de amortiguamiento (ζ)
omn = frecuencia natural no amortiguada del sistema
$delt$ = tiempo incremental entre estaciones de tiempo consecutivas
xk = rigidez de resorte

El programa da los valores de $x(i)$ obtenidos por el método numérico en las diversas estaciones de tiempo i. El programa también traza las variaciones de x con el tiempo.



■

Resumen del capítulo

Consideramos la vibración forzada de sistemas de un solo grado de libertad sometidos a fuerzas periódicas generales mediante la serie de Fourier. Para sistemas sometidos a funciones forzadas arbitrarias, analizamos los métodos de integral de convolución y la transformada de Laplace para hallar la respuesta de sistemas no amortiguados y amortiguados. Estudiamos el concepto de espectros de respuesta y su uso para determinar la respuesta de sistemas sometidos a excitaciones sísmicas. Por último, consideramos métodos numéricos, como el de Runge-Kutta de cuarto orden, para encontrar la respuesta de sistemas sometidos a fuerzas arbitrarias, incluidos los numéricamente descritos.

Ahora que ya terminó este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se dan a continuación.

Referencias

4.1 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

4.2 M. Paz, *Structural Dynamics: Theory and Computation* (2a. ed.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1985.

4.3 E.Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (7a. ed.), Wiley, Nueva York, 1993.

4.4 F. Oberhettinger y L. Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer Verlag, Nueva York, 1973.

4.5 G. M. Hieber y colaboradores, "Understanding and measuring the shock response spectrum. Part I", *Sound and Vibration*, Vol. 8, marzo de 1974, págs. 42-49.

4.6 R. E. D. Bishop, A. G. Parkinson y J. W. Pendered, "Linear analysis of transient vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, 1969, págs. 313-337.

4.7 Y. Matsuzaki y S. Kibe, "Shock and seismic response spectra in design problems", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, octubre de 1983, págs. 3-10.

4.8 S. Timoshenko, D. H. Young y W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 1974.

4.9 R. A. Spinelli, "Numerical inversion of a Laplace transform", *SIAM Journal of Numerical Analysis.* Vol. 3, 1966, págs. 636-649.

4.10 R. Bellman, R. E. Kalaba y J. A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transform,* American Elsevier, Nueva York, 1966.

4.11 S. G. Kelly, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993.

4.12 P-T. D. Spanos, "Digital synthesis of response-design spectrum compatible earthquake records for dynamic analyses", *Shock and Vibration Digest,* Vol. 15, Núm. 3, marzo de 1983, págs. 21-30.

4.13 C. M. Close, D. K. Frederick y J. C. Newell, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems* (3a. ed.), Wiley, Nueva York, 2002.

4.14 G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems* (5a. ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River. NJ, 2006.

4.15 N. S. Nise, *Control Systems Engineering* (3a. ed.), Wiley, Nueva York, 2000.

4.16 K. Ogata, *System Dynamics* (4a. ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 2004.

Preguntas de repaso

4.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. ¿Cuál es la base para expresar la respuesta de un sistema bajo excitación periódica como una suma de varias respuestas armónicas?
2. Indique algunos métodos para hallar la respuesta de un sistema sometido a fuerzas no periódicas.
3. ¿Qué es la integral de Duhamel? ¿Cuál es su uso?
4. ¿Cómo se determinan las condiciones iniciales para un sistema de un solo grado de libertad sometido a un impulso en el instante $t = 0$?
5. Derive la ecuación de movimiento de un sistema sometido a excitación de la base.
6. ¿Qué es un espectro de respuesta?
7. ¿Cuáles son las ventajas del método de la transformada de Laplace?
8. ¿Cuál es el uso de un pseudoespectro?
9. ¿Cómo se define la transformada de Laplace de una función $x(t)$?
10. Defina los términos *impedancia generalizada* y *admitancia de un sistema*.
11. Mencione los modelos de interpolación que se pueden utilizar para aproximar una función forzada arbitraria.
12. ¿Cuántas condiciones resonantes existen cuando la fuerza externa no es armónica?

13. ¿Cómo calcula la frecuencia del primer armónico de una fuerza periódica?
14. ¿Cuál es la relación entre las frecuencias de los armónicos de mayor grado y la frecuencia del primer armónico durante una excitación periódica?
15. ¿Cuál es la diferencia entre respuestas transitoria y de estado estable?
16. ¿Qué es un sistema de primer orden?
17. ¿Qué es un impulso?
18. ¿Cuáles son las propiedades de la función delta Dirac $\delta(t)$?

4.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

1. El cambio en la cantidad de movimiento se conoce como impulso.
2. La respuesta de un sistema sometido a una fuerza arbitraria se puede encontrar sumando las respuestas producidas por varios impulsos elementales.
3. El espectro de respuesta correspondiente a una excitación de la base es útil en el diseño de maquinaria sometida a sismos.
4. Algunas funciones periódicas no pueden ser reemplazadas por una suma de funciones armónicas.
5. Las amplitudes de armónicos de mayor grado serán menores en la respuesta de un sistema.
6. El método de la transformada de Laplace toma automáticamente en cuenta las condiciones iniciales.
7. La ecuación de movimiento se puede integrar numéricamente incluso cuando la fuerza de excitación es no periódica.
8. El espectro de respuesta da la respuesta máxima de todos los sistemas de un solo grado de libertad posibles.
9. Para un oscilador armónico, los espectros de aceleración y desplazamiento se pueden obtener a partir del espectro de velocidad.
10. Si dos masas m_1 y m_2 se unen después de una colisión, ésta se llama colisión elástica.
11. Las características de respuesta transitoria se pueden hallar a partir de la función de transferencia.
12. Se puede utilizar el método de Runge-Kutta para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de cualquier orden.
13. La transformada de Laplace de 1 es $\frac{1}{s}$.

4.3 Llene cada uno de los siguientes espacios en blanco con la palabra correcta:

1. La respuesta de un sistema lineal sometido a una fuerza periódica se encuentra _______ respuestas armónicas apropiadas.
2. Cualquier función periódica se puede representar por medio de una integral de ________.
3. Una fuerza de impulso es de gran magnitud y actúa durante un periodo muy ______.
4. La respuesta de un sistema de un solo grado de libertad a un ______ unitario se conoce como función de respuesta a impulso.
5. La integral de Duhamel también se conoce como integral de _______.
6. La variación de la respuesta máxima con la frecuencia natural de un sistema de un solo grado de libertad se conoce como espectro de _______.
7. La respuesta transitoria de un sistema se puede hallar por medio de la integral de _______.
8. La solución completa de un problema de vibración se compone de las soluciones de estado ______ y transitoria.
9. El método de la transformada de Laplace transforma una ecuación diferencial en una ecuación _________.
10. La función de transferencia es la ________ de la impedancia generalizada.
11. Un impulso se puede medir si se encuentra el cambio en _______ del sistema.
12. La integral de Duhamel está basada en la función de respuesta _________ del sistema.
13. La integral de Duhamel se puede utilizar para encontrar la respuesta de sistemas _________________ de un solo grado de libertad sometidos a excitaciones arbitrarias.
14. El espectro de respuesta de velocidad, determinado a partir del espectro de aceleración se conoce como espectro de ________.
15. Cualquier función forzada periódica se puede expandir en una serie de ________.
16. En el dominio de Laplace $\lim_{s \to 0} [sX(s)]$ da el valor _______ de la respuesta.
17. Un cambio en la cantidad de movimiento de un sistema da el _______.

18. La respuesta total de un sistema se compone de valores transitorio y de _________.
19. La transformada de Laplace de $x(t)$ se indica como ________.
20. $F(t)$ indica la transformada inversa de Laplace de ________.
21. La ecuación de movimiento $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ corresponde a un sistema de ________ orden.
22. La transformada de Laplace de $\delta(t)$ es ________.

4.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones dadas:

1. La parte transitoria de la solución surge de
   a. una función forzada **b.** condiciones iniciales **c.** condiciones límite
2. Si un sistema se somete a una fuerza no periódica aplicada repentinamente, la respuesta será
   a. periódica **b.** transitoria **c.** estable
3. Las condiciones iniciales se deben aplicar a una
   a. solución de estado estable **b.** solución transitoria **c.** solución total
4. El espectro de aceleración (S_a) se puede expresar en función del espectro de desplazamiento (S_d) como
   a. $S_a = -\omega_n^2 S_d$ **b.** $S_a = \omega_n S_d$ **c.** $S_a = \omega_n^2 S_d$
5. El pseudoespectro está asociado con
   a. la pseudoaceleración **b.** la pseudovelocidad **c.** el pseudodesplazamiento
6. Los coeficientes de Fourier se tienen que determinar numéricamente cuando los valores de la función $f(t)$ están disponibles
   a. en forma analítica
   b. en valores discretos de t
   c. en la forma de una ecuación compleja
7. La respuesta de un sistema de un solo grado de libertad sometido a excitación de la base, $y(t)$, se puede determinar utilizando la fuerza externa como
   a. $-m\ddot{y}$ **b.** $m\ddot{y}$ **c.** $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky$
8. El espectro de respuesta se utiliza ampliamente en
   a. el diseño de edificios sometidos a grandes cargas vivas
   b. el diseño sísmico
   c. el diseño de maquinaria sometida a fatiga
9. La ecuación de movimiento de un sistema sometido a excitación de la base, $y(t)$, está dado por
   a. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}$
   b. $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}; z = x - y$
   c. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}; z = x - y$
10. La función e^{-est} utilizada en la transformada de Laplace se conoce como
    a. núcleo **b.** integrando **c.** término subsidiario
11. La transformada de Laplace está definida por
    a. $\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-est} x(t)\, dt$
    b. $\bar{x}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-est} x(t)\, dt$
    c. $\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{est} x(t)\, dt$
12. En el dominio de Laplace, el $\lim_{s \to 0} [sX(s)]$ da:
    a. el valor inicial **b.** el valor transitorio **c.** el valor de estado estable

13. $F(t) = \alpha t$ corresponde a

a. un impulso **b.** fuerza gradual **c.** fuerza rampa

14. $f(t) = \delta(t - \tau)$ corresponde a una fuerza aplicada en

a. $t - \tau = 0$ **b.** $t - \tau < 0$ **c.** $t - \tau > 0$

15. En una colisión elástica perfecta de dos masas m_1 y m_2, la cantidad conservada es:

a. energía **b.** cantidad de movimiento **c.** velocidad

16. La respuesta escalonada de un sistema sobreamortiguado presenta

a. nada de oscilaciones **b.** oscilaciones **c.** sobrepaso

17. El método utilizado para expresar $\dfrac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)}$ como $\dfrac{C_1}{s + 1} + \dfrac{C_2}{s + 2}$ se llama:

a. separación **b.** fracciones parciales **c.** descomposición

18. La mayoría de los métodos numéricos de resolver ecuaciones diferenciales suponen que el orden de la ecuación es

a. uno **b.** dos **c.** arbitrario

4.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. $x(t) = \dfrac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t$	**a.** Transformada inversa de Laplace de $\bar{x}(s)$
2. $x(t) = \displaystyle\int_0^t F(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$	**b.** Función de impedancia generalizada
3. $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\bar{Y}(s)\bar{F}(s)$	**c.** Función de respuesta a un impulso unitario
4. $\bar{Y}(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$	**d.** Transformada de Laplace
5. $\bar{z}(s) = ms^2 + cs + k$	**e.** Integral de convolución
6. $\bar{x}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-est} x(t)\, dt$	**f.** Función de admitancia

4.6 Correlacione las siguientes características de respuesta transitoria:

a. Tiempo pico	**1.** Valor pico máximo
b. Tiempo de subida	**2.** Tiempo para alcanzar el valor máximo
c. Sobrepaso máximo	**3.** Tiempo para alcanzar un valor dentro de $\pm 2\%$ del valor de estado estable
d. Tiempo de asentamiento	**4.** Tiempo para alcanzar 50% del valor de estado estable
e. Tiempo de retardo	**5.** Tiempo para incrementar el valor de estado estable de 10% a 90%

Problemas

Sección 4.2 Respuesta bajo una fuerza periódica general

4.1-4.4 Encuentre la respuesta de estado estable de la válvula de control hidráulica que se muestra en la figura 4.4(a) a las funciones forzadas obtenidas reemplazando $x(t)$ con $F(t)$ y A con F_0 en las figuras 1.114-1.117.

4.5 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema viscosamente amortiguado a la función forzada obtenida reemplazando $x(t)$ y A con $F(t)$ y F_0, respectivamente, en la figura 1.54(a).

4.6 Las vibraciones torsionales de un engrane impulsado montado en una flecha (vea la figura 4.37) en condiciones estables están regidas por la ecuación

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = M_t$$

donde k_t es la rigidez torsional de la flecha impulsada, M_t es el par de torsión transmitido, J_0 es el momento de inercia de masa, y θ es el desplazamiento angular del engrane impulsado. Si uno de los 16 dientes del engrane impulsor se rompe, determine la vibración torsional resultante del engrane impulsado para los siguientes datos:

Engrane impulsado: $J_0 = 0.1$ N-m·s^2, velocidad = 1000 rpm, material de la flecha impulsada: acero, sólido, de sección circular con diámetro de 5 cm y longitud de 1 m, $M_{t0} = 1000$ N·m.

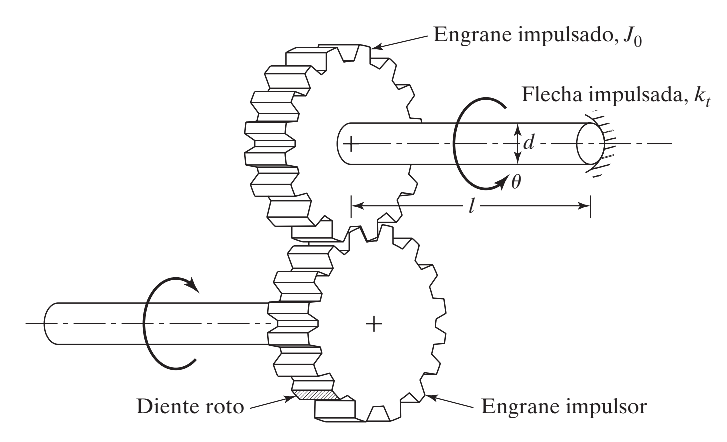


Figura 4.37

4.7 Se utiliza un mecanismo de cigüeñal corredizo para impartir movimiento a la base de un sistema de resorte-masa-amortiguador, como se muestra en la figura 4.38. Representando de forma aproximada el movimiento de la base $y(t)$ como una serie de funciones armónicas, encuentre la respuesta de la masa para $m = 1$ kg, $c = 10$ N-s/m, $k = 100$ N/m, $r = 10$ cm, $l = 1$ m, y $\omega = 100$ rad/s.

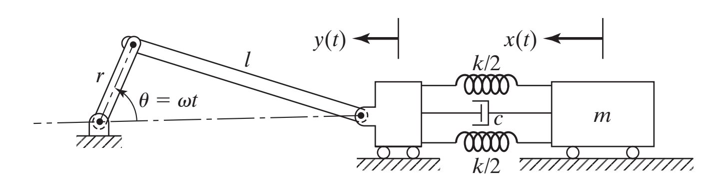


Figura 4.38

4.8 La base de un sistema de resorte-masa-amortiguador se somete al desplazamiento periódico que se muestra en la figura 4.39. Determine la respuesta de la masa aplicando el principio de superposición.

4.9 La base de un sistema de resorte-masa, con amortiguamiento de Coulomb, está conectada al mecanismo de cigüeñal corredizo que se muestra en la figura 4.40. Determine la respuesta del sistema para un coeficiente de fricción μ entre la masa y la superficie representando el movimiento $y(t)$ como una serie de funciones armónicas para $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $r = 10$ cm, $l = 1$ m, $\mu = 0.1$ y $\omega = 100$ rad/s. Determine las limitaciones de su solución.

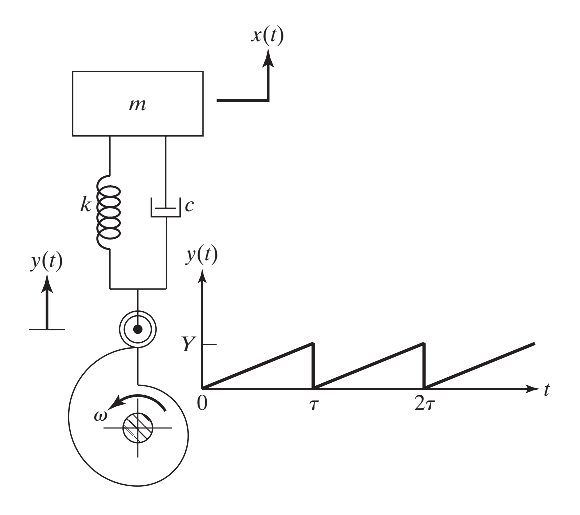


Figura 4.39

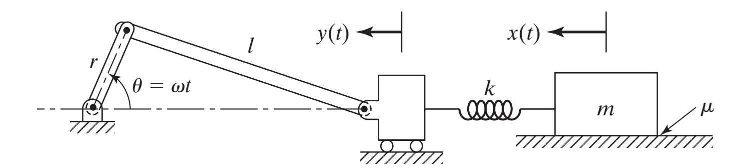


Figura 4.40

4.10 Se utiliza una leva de rodillo para impartir un movimiento periódico a la base del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 4.41. Si el coeficiente de fricción entre la masa y la superficie es μ, determine la respuesta del sistema por medio del principio de superposición. Discuta la validez del resultado.

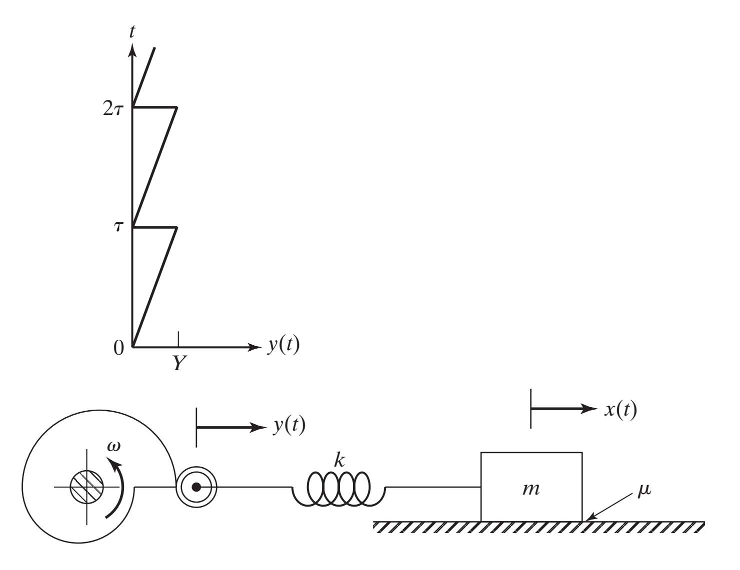


Figura 4.41

4.11 Encuentre la respuesta total de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad sometido a una excitación armónica de la base con los siguientes datos: $m = 10$ kg, $c = 20$ N-s/m, $k = 4000$ N/m, $y(t) = 0.05 \cos 5t$, $x_0 = 0.1$ m y $\dot{x}_0 = 1$ m/s.

4.12 El sistema de suspensión de un automóvil que viaja por una carretera irregular tiene una rigidez de $k = 5 \times 10^6$ N/m y la masa efectiva del automóvil sobre la suspensión es $m = 750$ kg. Las irregularidades de la carretera se pueden considerar como ondas semisenoidales como se indica en la figura 4.42. Determine la respuesta de desplazamiento del automóvil. Suponga que el amortiguamiento del sistema es insignificante.

Sugerencia: La representación como una serie de Fourier de la carretera irregular, $y(t)$, está dada por

$$y(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi t - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos 4\pi t}{1(3)} + \frac{\cos 8\pi t}{3(5)} + \frac{\cos 12\pi t}{5(7)} + \cdots\right\}$$

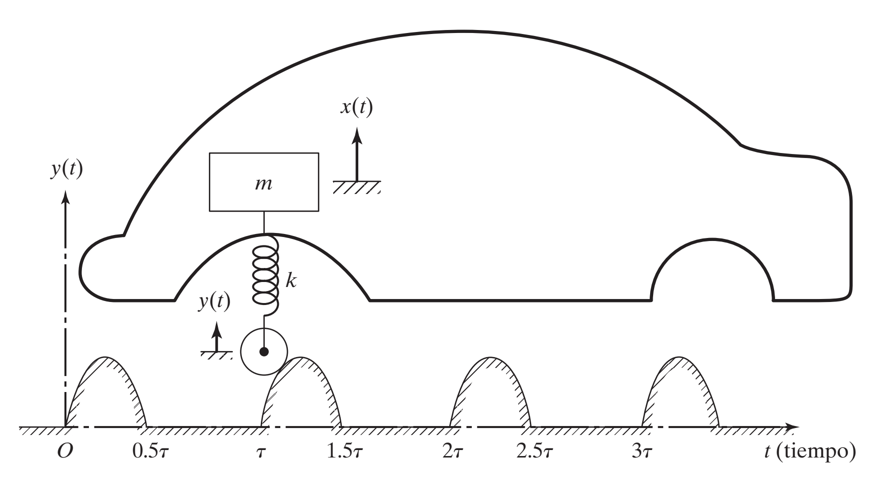


Figura 4.42

Sección 4.3 Respuesta bajo una fuerza periódica de forma irregular

4.13 Determine la respuesta de un sistema amortiguado con $m = 1$ kg, $k = 15$ kN/m y $\zeta = 0.1$ bajo la acción de una función forzada periódica, como se muestra en la figura 1.119.

4.14 Determine la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado sometido a la fuerza periódica cuyos valores se dan en el problema 1.116. Suponga que M_t indica el valor de la fuerza en newtons en el instante t_i segundos. Use $m = 0.5$ kg, $k = 8000$ N/m, y $\zeta = 0.06$.

4.15 Encuentre el desplazamiento del tanque de agua de la figura 4.43(a) sometido a la fuerza periódica mostrada en la figura 4.43(b) tratándolo como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad. Use el procedimiento numérico descrito en la sección 4.3.

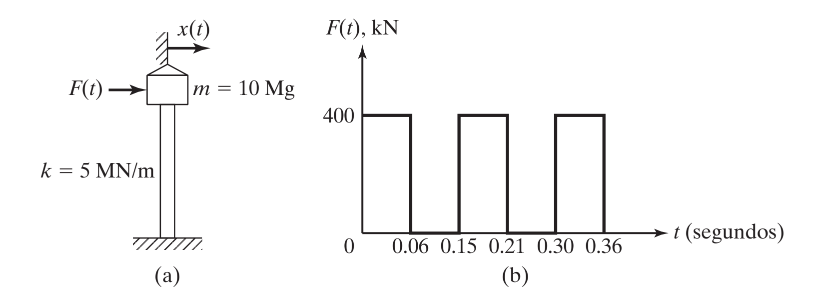


Figura 4.43

Sección 4.5 Integral de convolución

4.16 La limpieza por chorro de arena es un proceso en el cual un material abrasivo, atrapado en un chorro de aire es dirigido sobre la superficie de una pieza fundida para limpiar su superficie. En un montaje particular de limpieza por chorro de arena, la pieza fundida de masa m se coloca sobre un soporte flexible de rigidez k como se muestra en la figura 4.44(a). Si la fuerza ejercida sobre la pieza por el chorro de arena varía como se muestra en la figura 4.44(b), encuentre la respuesta de la pieza fundida.

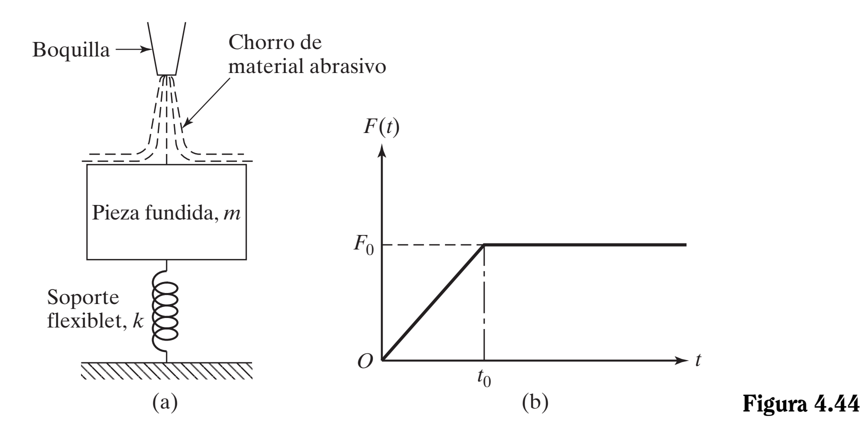


Figura 4.44

4.17 Encuentre el desplazamiento de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sometido a la función forzada $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, donde α es una constante.

4.18 Un cilindro de aire comprimido está conectado al sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 4.45(a). Debido a una pequeña fuga en la válvula, la presión sobre el pistón, $p(t)$ se incrementa como se indica en la figura 4.45(b). Encuentre la respuesta del pistón con los datos siguientes: $m = 10$ kg, $k = 1\,000$ N/m y $d = 0.1$ m.

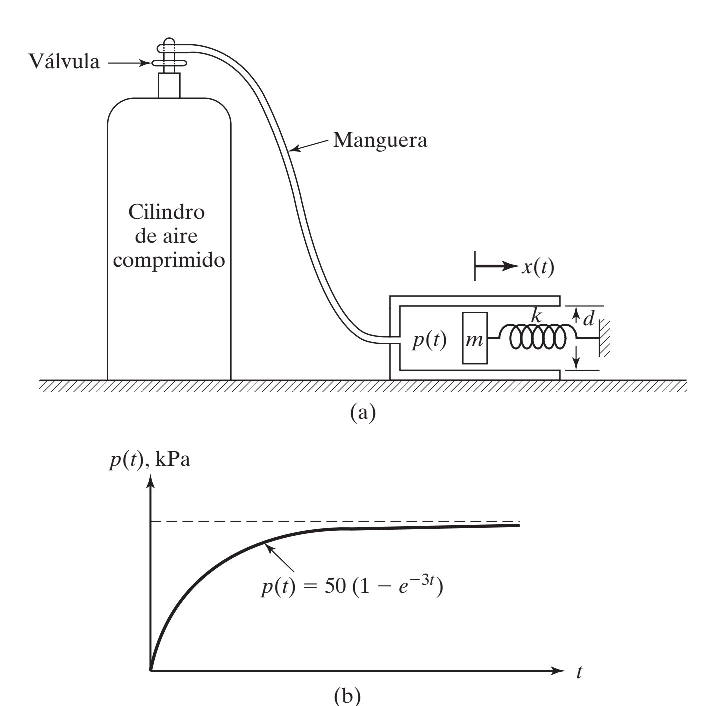


Figura 4.45

4.19 Encuentre la respuesta transitoria de un sistema de resorte-masa no amortiguado durante $t > \pi/\omega$ cuando la masa se somete a una fuerza

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2}(1 - \cos \omega t) & \text{durante } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ F_0 & \text{durante } t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Suponga que el desplazamiento y velocidad de la masa son cero en el instante $t = 0$.

4.20-4.22 Siga el método de la integral de Duhamel para obtener la expresión para la respuesta de un sistema no amortiguado sometido a las funciones forzadas que se muestran en las figuras 4.46(a) a (c).

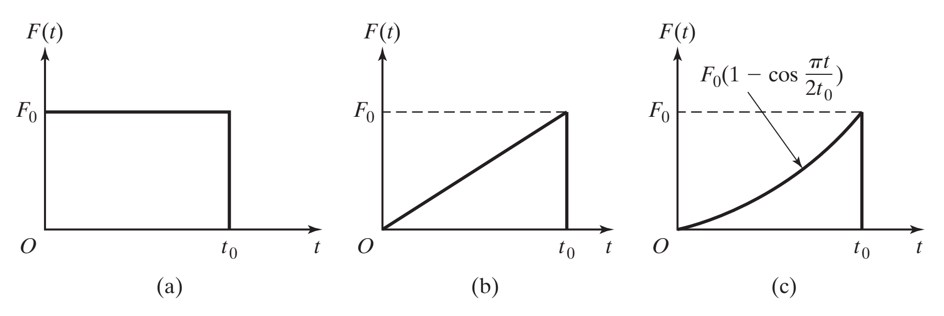


Figura 4.46

4.23 La figura 4.47 muestra un modelo de un solo grado de libertad de un vehículo de motor que viaja en dirección horizontal. Determine el desplazamiento relativo del vehículo cuando viaja por una carretera con baches de la forma $y(s) = Y$ sen $\pi s/\delta$.

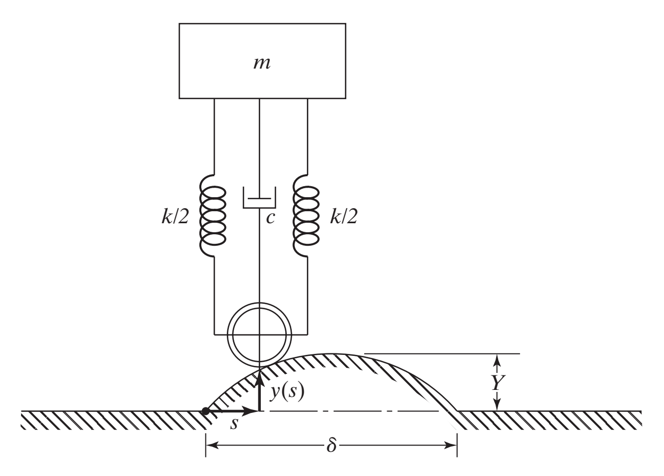


Figura 4.47

4.24 Un vehículo que viaja a una velocidad constante v en dirección horizontal se encuentra con un tope triangular, como se muestra en la figura 4.48. Tratando el vehículo como un sistema no amortiguado de resorte-masa, determine la respuesta del vehículo en dirección vertical.

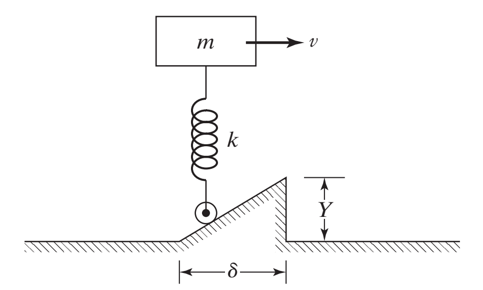


Figura 4.48

4.25 Un automóvil de 1 000 kg de masa viaja por una carretera con topes de la forma que se muestra en a figura 4.49. La velocidad del automóvil es de 50 km/h. Si el periodo natural no amortiguado de vibración en dirección vertical es de 10 seg, determine la respuesta del automóvil considerándolo como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad que vibra en dirección vertical.

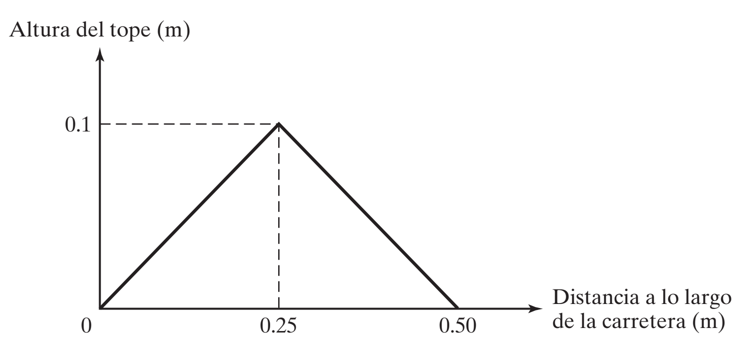


Figura 4.49

4.26 Una videocámara de masa m se empaca en una caja hecha de un material flexible. La rigidez y constante de amortiguamiento del material de empaque son k y c, respectivamente, y la masa de la caja es insignificante. Si la caja de deja caer por accidente desde una altura h sobre un piso rígido (vea la figura 4.50), halle el movimiento de la videocámara.

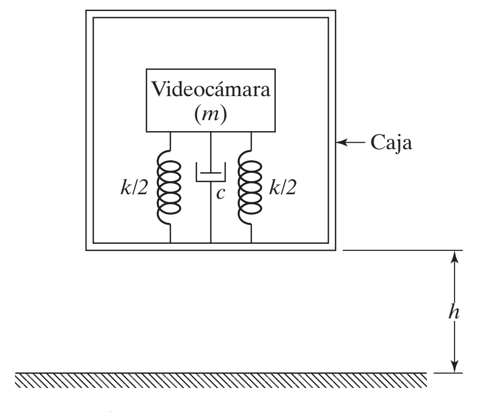


Figura 4.50

4.27 Al rodar por la pista de aterrizaje un avión se encuentra un tope. Como resultado, la raíz del ala se somete a un desplazamiento que se puede expresar como

$$y(t) = \begin{cases} Y(t^2/t_0^2), & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

Encuentre la respuesta de la masa ubicada en la punta del ala si la rigidez de ésta es k (vea la figura 4.51).

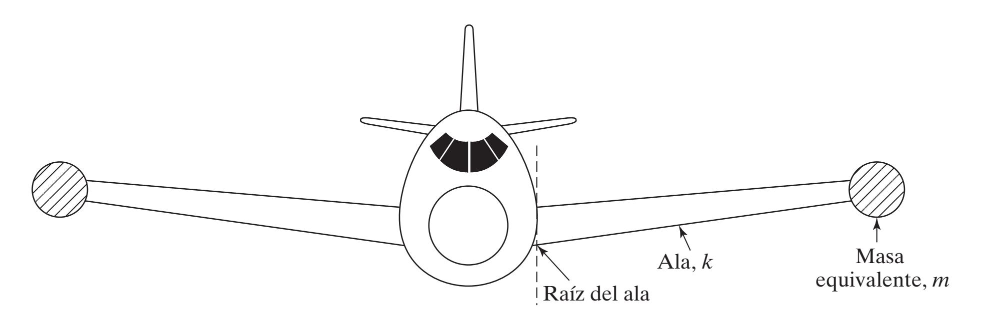


Figura 4.51

4.28 Derive la ecuación (E.1) del ejemplo 4.12.

4.29 En una prueba de encendido estática, un cohete se ancla a un muro rígido por medio de un sistema de resorte-amortiguador, como se muestra en la figura 4.52(a). El empuje que actúa en el cohete alcanza su valor máximo F en un tiempo muy corto y permanece constante hasta el tiempo del quemado total del combustible t_0, como se indica en la figura 4.52(b). El empuje que actúa en el cohete es $F = m_0 v$, donde m_0 es la tasa constante a la cual se quema el combustible y v es la velocidad del chorro. La masa inicial del cohete es M, de modo que su masa en cualquier tiempo t es $m = M - m_0 t$, $0 \le t \le t_0$. (1) Derive la ecuación de movimiento del cohete, y (2) encuentre el desplazamiento máximo de estado estable del cohete, suponiendo una masa promedio (constante) de $\left(M - \frac{1}{2} m_0 t_0\right)$, si los datos son $k = 7.5 \times 10^6$ N/m, $c = 0.1 \times 10^6$ N-s/m, $m_0 = 10$ kg/s, $v = 2000$ m/s, $M = 2000$ kg, y $t_0 = 100$ s.

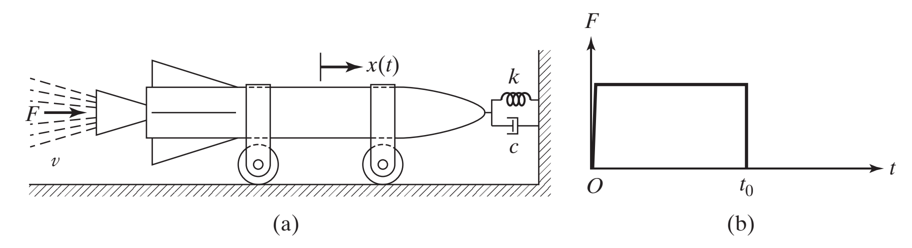


Figura 4.52

4.30 Demuestre que la respuesta a una función escalonada unitaria $h(t)(F_0 = 1$ en la figura 4.10(b)) está relacionada con la función de respuesta a un impulso $g(t)$, ecuación (4.25), como sigue:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

4.31 Demuestre que la integral de convolución, ecuación (4.31), también se puede expresar en función de la respuesta a una función escalonada unitaria $h(t)$ como

$$x(t) = F(0)h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t - \tau)\, d\tau$$

4.32 Encuentre la respuesta de la barra rígida que se muestra en la figura 4.53 por medio de la integral de convolución con los datos siguientes: $k_1 = k_2 = 5\,000$ N/m, $a = 0.25$ m, $b = 0.5$ m, $l = 1.0$ m, $M = 50$ kg, $m = 10$ kg, $F_0 = 500$ N.

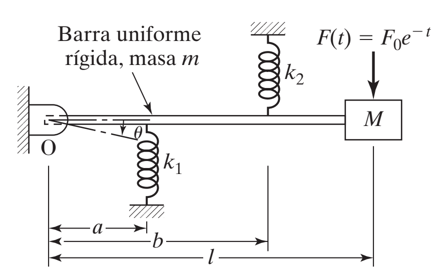


Figura 4.53

4.33 Encuentre la respuesta de la barra rígida que se muestra en la figura 4.54 por medio de la integral de convolución con los datos siguientes: $k = 5\,000$ N/m, $l = 1$ m, $m = 10$ kg, $M_0 = 100$ N-m.

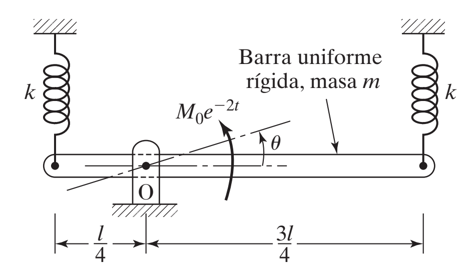


Figura 4.54

4.34 Encuentre la respuesta de la barra rígida que se muestra en la figura 4.55 por medio de la integral de convolución cuando el extremo P del resorte PQ se somete al desplazamiento $x(t) = x_0e^{-t}$. Datos: $k = 5\,000$ N/m, $l = 1$ m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm.

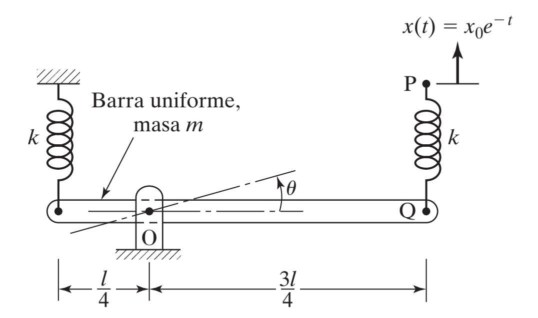


Figura 4.55

4.35 Encuentre la respuesta de la masa que se muestra en la figura 4.56 sometida a la fuerza $F(t) = F_0 e^{-t}$ mediante la integral de convolución. Datos: $k_1 = 1\,000$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $r = 5$ cm, $m = 10$ kg, $J_0 = 1$ kg-m^2, $F_0 = 50$ N.

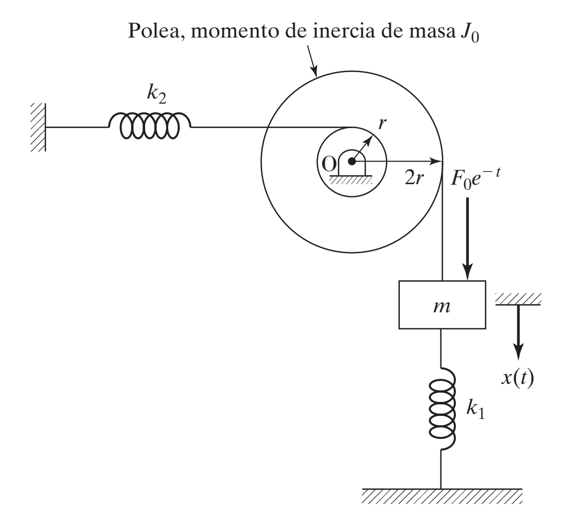


Figura 4.56

4.36 Encuentre las funciones de respuesta a impulso de un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado en los siguientes casos:

a. No amortiguado ($c = 0$)

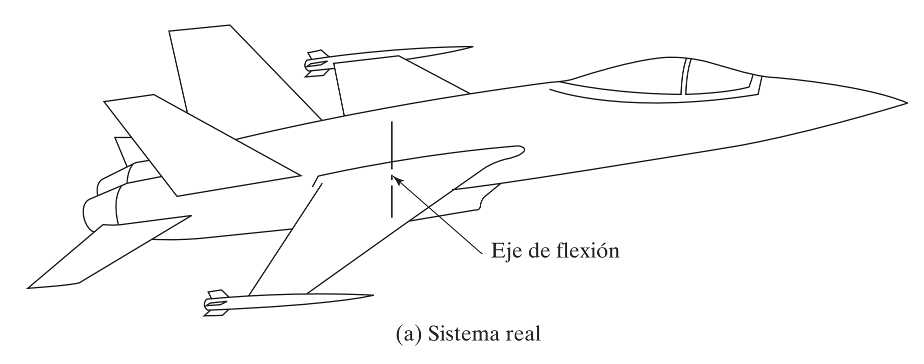
b. Subamortiguado ($c < c_c$)

c. Críticamente amortiguado ($c = c_c$)

d. Sobreamortiguado ($c > c_c$)

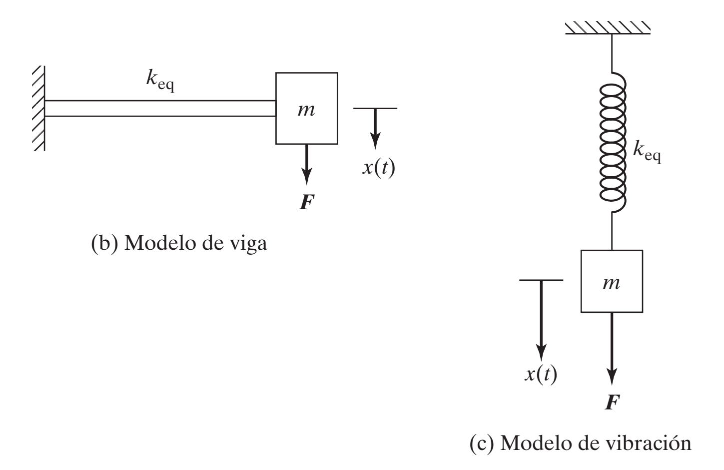
4.37 Encuentre la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad sometido a un impulso $\boldsymbol{F}$ con los siguientes datos: $m = 2$ kg, $c = 4$ N-s/m, $k = 32$ N/m, $\boldsymbol{F} = 4\,\delta(t)$, $x_0 = 0.01$ m, $\dot{x}_0 = 1$ m/s.

4.38 El ala de un avión de combate, que lleva un misil en su punta, como se muestra en la figura 4.57, se puede representar como una viga en voladizo equivalente con $EI = 15 \times 10^9$ N-m^2 con respecto al eje vertical y longitud $l = 10$ m. Si la masa equivalente del ala es $m = 2\,500$ kg, determine la respuesta de vibración del ala (de m) debido al lanzamiento del misil. Suponga que la fuerza en m provocada por el lanzamiento del misil se puede representar como una función de impulso de magnitud $\boldsymbol{F} = 50$ N-s.



(a) Sistema real

Figura 4.57

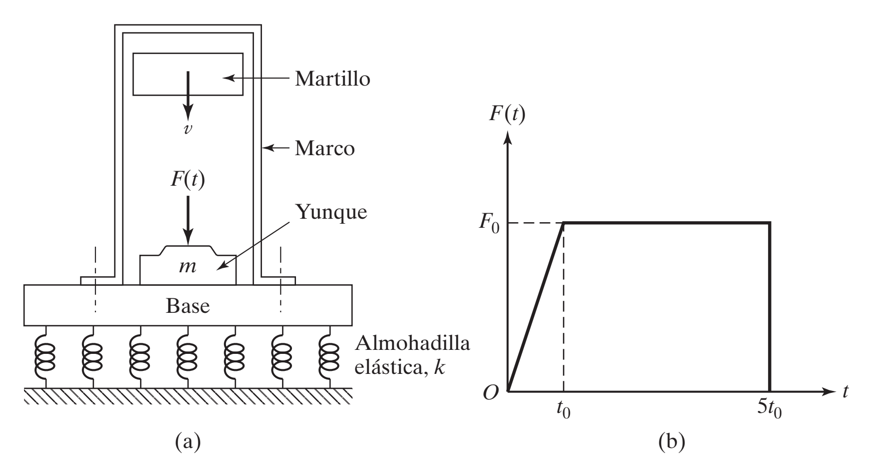


(b) Modelo de viga

(c) Modelo de vibración

Figura 4.57 (Continuación)

4.39 El marco, el yunque y la base del martillo de forja que se muestran en la figura 4.58(a) tienen una masa total de m. La almohadilla de soporte elástica tiene una rigidez de k. Si la fuerza aplicada por el martillo se da en la figura 4.58(b), determine la respuesta del yunque.



(a) (b)

Figura 4.58

4.40 La entrada a la válvula de un motor de combustión interna es una fuerza de $F = 15000$ N aplicada durante un periodo de 0.001 s por una leva como se muestra en la figura 4.59 (vea la figura 1.39 para la disposición de la válvula). La válvula tiene una masa de 15 kg, una rigidez de 10000 N/m y una constante de amortiguamiento de 20 N-s/m. La leva aplica la fuerza F cada 0.5 s. (a) Encuentre la respuesta del desplazamiento de la válvula a partir de su posición de reposo cuando la leva aplica la fuerza F por primera vez. (b) Determine el desplazamiento de la válvula a partir de su posición de reposo cuando la leva aplica la fuerza F por segunda vez.

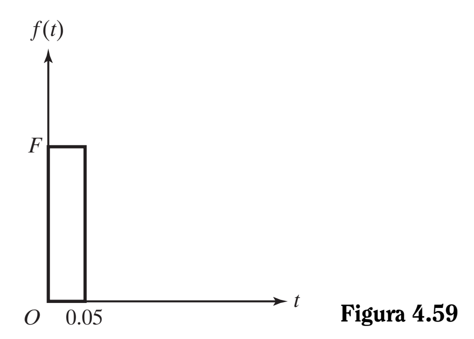


Figura 4.59

4.41 El choque de un pájaro contra el motor de un avión se puede considerar como un impulso (figura 4.60(a)). Si la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento del soporte del motor son $k = 50000$ N/m y 1000 N-s/m, y la masa del motor es $m = 500$ kg, obtenga la respuesta del motor. Suponga la masa del pájaro como 4 kg y la velocidad del avión como 250 km/h.

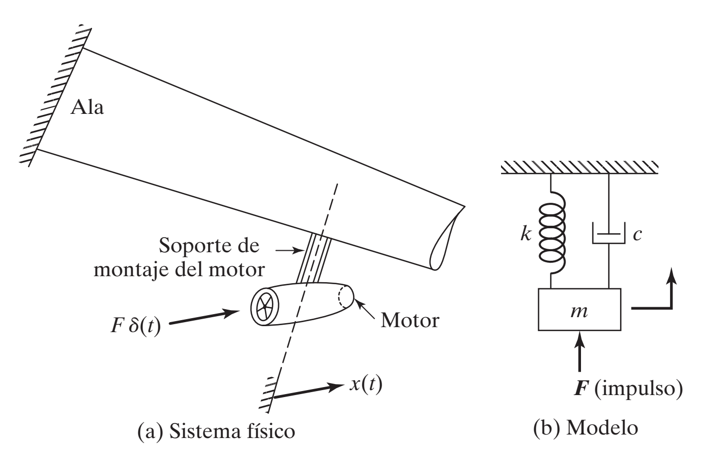


Figura 4.60

4.42 El carro de ferrocarril que se muestra en la figura 4.61 está inicialmente en reposo y un impulso $5\delta(t)$ lo pone en movimiento. (a) Determine el movimiento del carro, $x(t)$. (b) Si se desea detener el carro aplicando otro impulso, determine el impulso que se tiene que aplicar al carro.

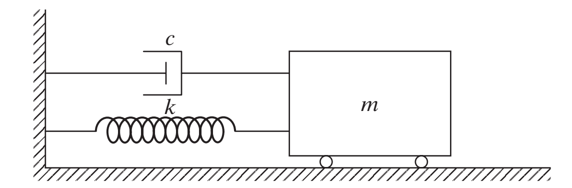


Figura 4.61

4.43 Un sistema de resorte-amortiguador está conectado a una palanca rígida sin masa como se muestra en la figura 4.62. Si se aplica una fuerza gradual de magnitud F_0 en el instante $t = 0$, determine el desplazamiento, $x(t)$, del punto A de la palanca.

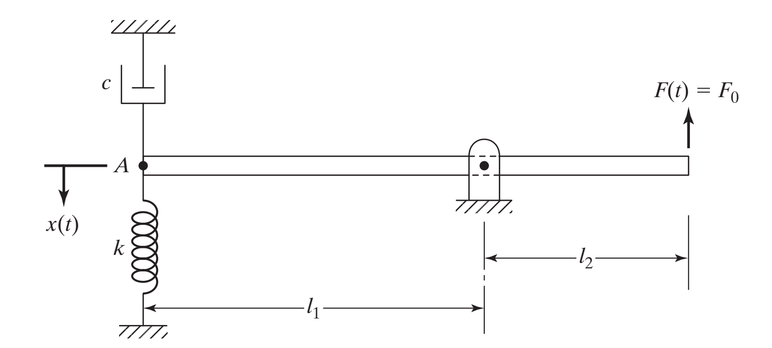


Figura 4.62

4.44 En el transbordador espacial hay un paquete experimental espacial de masa m soportado por una suspensión elástica de rigidez k. Durante el lanzamiento, el transbordador espacial (base del paquete elásticamente soportado) experimenta una aceleración $\ddot{y}(t) = \alpha t$, donde α es una constante. Encuentre la variación del tiempo del desplazamiento, $x(t)$, y el desplazamiento relativo, $x(t) - y(t)$, del paquete. Considere condiciones iniciales cero.

4.45 Una persona que carga un instrumento de precisión de masa m, viaja de pie en el elevador de un edificio (figura 4.63). El elevador, mientras se mueve a una velocidad v_0 en el instante $t = 0$, desacelera a una velocidad cero (se detiene) en el instante τ, de modo que la variación de su velocidad se puede expresar como

$$\nu(t) = \begin{cases} \nu_0\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right); & 0 \leq t \leq \tau \\ 0; & t > \tau \end{cases}$$

suponiendo que la rigidez de la persona que está de pie es k, determine la variación del desplazamiento del instrumento de precisión, $x(t)$.

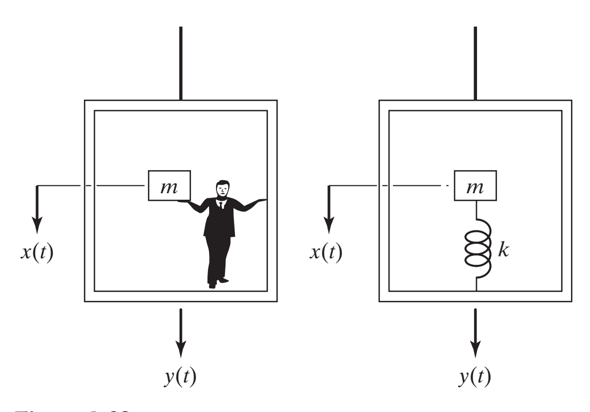


Figura 4.63

4.46 El tanque de agua que se muestra en la figura 4.43(a) se somete a una fuerza huracanada repentina la cual cambia con el tiempo como se muestra en la figura 4.64. Considerando condiciones iniciales cero, determine la respuesta de desplazamiento, $x(t)$, del tanque de agua.

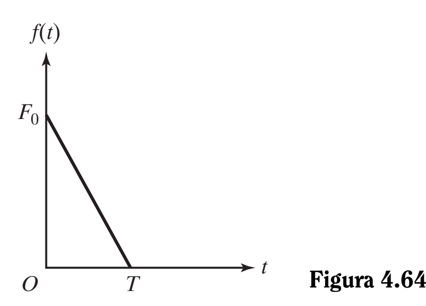


Figura 4.64

Sección 4.6 Espectro de respuesta

4.47 Derive el espectro de respuesta de un sistema no amortiguado con el pulso rectangular que se muestra en la figura 4.46(a). Trace $(x/\delta_{\text{est}})_{\text{máx}}$ con respecto a (t_0/τ_n).

4.48 Encuentre el espectro de respuesta de desplazamiento de un sistema no amortiguado con el pulso que se muestra en la figura 4.46(c).

4.49 La base de un sistema de resorte-masa no amortiguado se somete a una excitación de aceleración dada por $a_0[1 - \text{sen}(\pi t/2t_0)]$. Encuentre el desplazamiento relativo de la masa z.

4.50 Encuentre el espectro de respuesta del sistema considerado en el ejemplo 4.13. Trace $(kx/F_0)_{\text{máx}}$ contra $\omega_n t_0$ en el rango $0 \leq \omega_n t_0 \leq 15$.

4.51* La estructura de un edificio se somete a una carga explosiva, y la idealización de la estructura y la carga se muestran en la figura 4.14. Si $m = 5\,000$ kg, $F_0 = 4$ MN y $t_0 = 0.4$ s, encuentre la rigidez mínima requerida para limitar el desplazamiento a 10 mm.

4.52 Considere la tarjeta de circuito impreso (TCI) montada sobre una repisa de aluminio que se muestra en la figura 4.23(a). Diséñela para que soporte una aceleración de 100 g sometida al pulso rectangular que se muestra en la figura 4.65. Suponga el peso específico, el módulo de Young y el esfuerzo permisible de aluminio como 0.1 lb/pulg^3, 10^7 lb/pulg^2, y 26 000 lb/pulg^2, respectivamente.

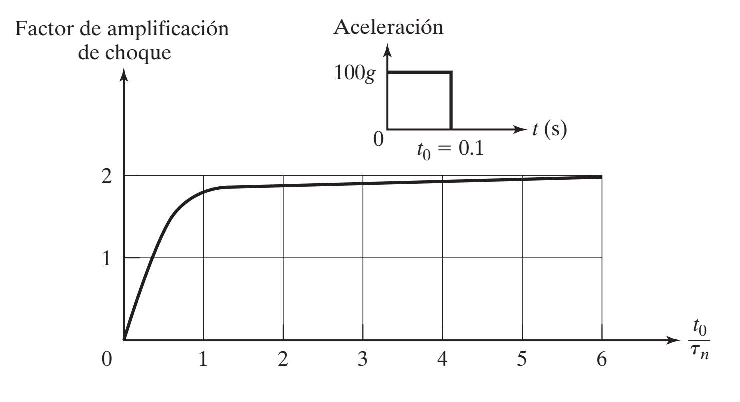


Figura 4.65

---

*El asterisco indica que se trata de un problema sin respuesta única.

4.53 Considere la tarjeta de circuito impreso (TCI) montada sobre una repisa de aluminio en voladizo que se muestra en la figura 4.23(a). Diseñe la repisa para que soporte una aceleración de 100 g sometida al pulso triangular que se muestra en la figura 4.66. Considere las propiedades de material dadas en el problema 4.52.

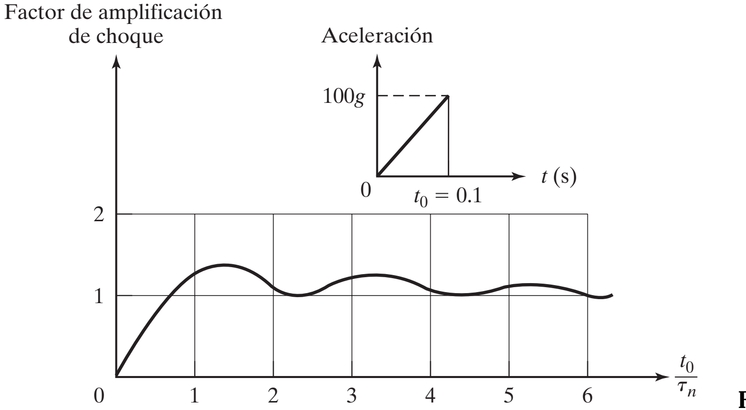


Figura 4.66

4.54 Una caja electrónica, que pesa 1 lb, se somete a una prueba de choque por medio de un pulso semisenoidal de 100 g con una base de tiempo de 0.1 segundo para una prueba de calificación. La caja de coloca a la mitad de una viga doblemente empotrada como se muestra en la figura 4.67. La viga, junto con la caja, se coloca en un recipiente y se somete a la prueba de choque. Diseñe la viga para que soporte el pulso de choque mencionado. Considere las propiedades de material dadas en el problema 4.52.

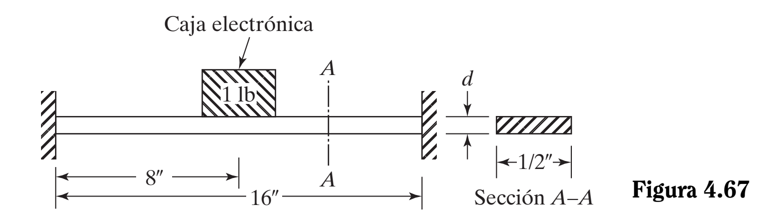


Figura 4.67

4.55* El tanque de agua que se muestra en la figura 4.68 se somete a un sismo cuyo espectro de respuesta se indica en la figura 4.18. El peso del tanque con agua es de 100 000 lb. Diseñe una columna circular hueca de acero de 50 pies de altura de modo que el esfuerzo de flexión máximo no exceda el esfuerzo de fluencia del material. Considere una relación de amortiguamiento de 0.05 y un factor de seguridad de 2.

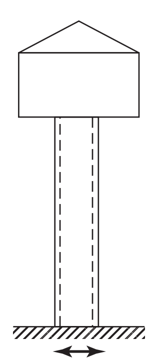


Figura 4.68

4.56 Considere la grúa viajera elevada que se muestra en la figura 4.21. Suponiendo el peso de la carretilla como 5 000 lb y la relación de amortiguamiento total como 2%, determine la rigidez total del sistema necesario para que la carretilla no se descarrile cuando experimente una excitación sísmica vertical cuyo espectro de diseño aparece en la figura 4.19.

4.57 Un poste eléctrico de sección transversal circular con una rigidez a flexión $k = 5\,000$ N/m y una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.05$, soporta un transformador de masa $m = 250$ kg como se muestra en la figura 4.69. Se somete a un sismo caracterizado por un espectro de respuesta dado en la figura 4.18. Encuentre: (a) el desplazamiento máximo del transformador; (b) la fuerza cortante máxima en el poste, y (c) el momento de flexión máximo en el poste.

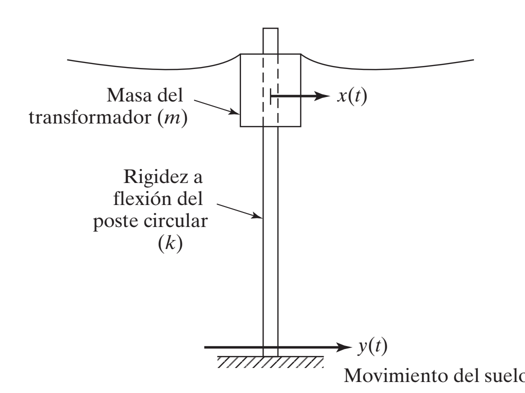


Figura 4.69

Sección 4.7 Transformada de Laplace

4.58 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad sometido a la fuerza $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ siguiendo el método de transformada de Laplace.

4.59 Encuentre la respuesta de un sistema de resorte-masa amortiguado sometido a una función escalonada de magnitud F_0 con el método de transformada de Laplace.

4.60 Encuentre la respuesta de un sistema no amortiguado sometido a un pulso cuadrado $F(t) = F_0$ en el rango $0 \leq t \leq t_0$ durante $t > t_0$ aplicando el método de transformada de Laplace. Considere las condiciones iniciales como cero.

4.61 Derive la expresión para la transformada de Laplace de la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad sometido a los siguientes tipos de funciones forzadas:

a. $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$
b. $f(t) = A \cos \omega t$
c. $f(t) = A e^{-\omega t}$
d. $f(t) = A\delta(t - t_0)$

4.62 Derive una expresión para la función de respuesta a un impulso de un sistema críticamente amortiguado de un solo grado de libertad.

4.63 Encuentre la respuesta de un sistema con la siguiente ecuación de movimiento:

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 5\,\delta(t)$$

aplicando las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0 = 0.05$ m y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 0$. Trace la respuesta del sistema.

4.64 Una bola de bronce de masa m_0 se deja caer sobre la masa de un sistema de un solo grado de libertad desde una altura h como se muestra en la figura 4.70. Si se atrapa la bola después de su primer rebote, determine la respuesta de desplazamiento resultante de la masa m. Suponga que la colisión es perfectamente elástica y que el sistema está inicialmente en reposo. Datos: $m = 2$ kg, $m_0 = 0.1$ kg, $k = 100$ N/m, $c = 5$ N-s/m, y $h = 2$ m.

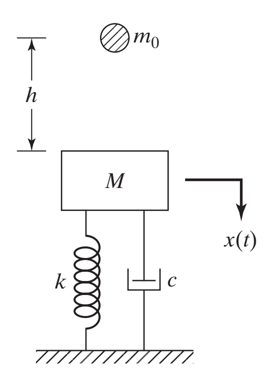


Figura 4.70

4.65 Considere la ecuación de movimiento de un sistema de primer orden:

$$0.5\dot{x} + 4x = f(t)$$

donde la función forzada $f(t)$ es periódica. Si la representación como una serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = 4 \text{ sen } 2t + 2 \text{ sen } 4t + \text{sen } 6t + 0.5 \text{ sen } 8t + \dots$$

a. ¿cuál es el ancho de banda del sistema?

b. encuentre la respuesta de estado estable del sistema considerando únicamente los componentes de $f(t)$ que queden dentro del ancho de banda del sistema.

4.66 Encuentre la respuesta escalonada de un sistema con la ecuación de movimiento formulada:

a. $2\ddot{x} + 10\dot{x} + 12.5 = 10u_s(t)$
b. $2\ddot{x} + 10\dot{x} + 8 = 10u_s(t)$
c. $2\ddot{x} + 10\dot{x} + 18 = 10u_s(t)$

4.67 Derive la transformada de Laplace de la función rampa $F(t) = bt$, $t \geq 0$, comenzando a partir de la transformada de Laplace.

4.68 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(S) = \frac{-s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

4.69 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(S) = \frac{3s + 8}{(s + 2)^2(s + 5)}$$

4.70 Encuentre la respuesta de un sistema de resorte-amortiguador (de primer orden) que se muestra en la figura 4.1(a) con la ecuación de movimiento

$$c\dot{x} + kx = \overline{F}(t)$$

donde la función forzada $\overline{F}(t)$ es una función escalonada unitaria. También determine los valores inicial y de estado estable de la respuesta a partir de las soluciones en el dominio de Laplace y de tiempo.

4.71 Determine los valores inicial y de estado estable de la respuesta rampa del sistema de primer orden que se considera en el ejemplo 4.20, a partir de las soluciones en el dominio de Laplace y de tiempo.

4.72 Encuentre los valores inicial y de estado estable de la respuesta de impulso del sistema subamortiguado que se considera en el ejemplo 4.9 utilizando las soluciones en el dominio de Laplace y de tiempo.

4.73 Encuentre la respuesta de un sistema críticamente amortiguado de un solo grado de libertad sometido a una fuerza gradual con la ecuación de movimiento

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 8x = 5$$

Considere las condiciones iniciales como $x_0 = 1$ y $\dot{x}_0 = 2$.

4.74 Encuentre la respuesta de estado estable de un sistema subamortiguado de un solo grado de libertad sometido a una entrada rampa $\overline{F}(t) = bt$ donde b es la pendiente de la rampa.

4.75 Derive la expresión para la respuesta total de un sistema subamortiguado de un solo grado de libertad sometido a una función forzada $F(t)$. Considere las condiciones iniciales como $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$.

4.76 Para el sistema amortiguado de segundo grado con la función de transferencia dada a continuación, determine los valores de ζ, ω_n, t_s, t_r, t_p y porcentaje de sobrepaso:

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{121}{s^2 + 17.6s + 121}$$

4.77 Para el sistema amortiguado de segundo grado con la función de transferencia dada a continuación, determine los valores de ζ, ω_n, t_a, t_e, t_p y porcentaje de sobrepaso:

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{3.24 \times 10^6}{s^2 + 2700s + 3.24 \times 10^6}$$

4.78 Para el sistema traslacional de segundo grado que se muestra en la figura 4.2(a) con $m = 6$ kg, $c = 30$ N-s/m y $k = 45$ N/m, determine los valores de ζ, ω_n, t_a, t_e, t_p y porcentaje de sobrepaso para $x(t)$.

4.79 Para el sistema torsional de segundo orden que se muestraen la figura 4.2(c) con $J = 2$ kg-m^2, $c_t = 2$ N-m-s/rad y $k_t = 2$ N-m/rad, determine los valores de ζ, ω_n, t_a, t_e, t_p y el porcentaje de sobrepaso para $\theta(t)$.

4.80 Para el sistema traslacional que se muestra en la figura 4.2(a) con $k = 1$ y $f(t) =$ función escalonada unitaria, determine los valores de m y c para alcanzar 40% de sobrepaso y un tiempo de asentamiento de 5 s.

Sección 4.8 Métodos numéricos

4.81 Encuentre la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad con la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

siguiendo el método de Runge-Kutta. Suponga que $m = 5$ kg, $c = 200$ N-s/m, $k = 750$ N/m y

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0\, t}{t_1}; & 0 \leq t \leq t_1 \\ F_0; & t \geq t_1 \end{cases}$$

con $F_0 = 2000$ N y $t_1 = 6$ s.

4.82 Resuelva el problema 4.81 (con el método de Runge-Kutta) con la función forzada

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \operatorname{sen} \dfrac{\pi\, t}{t_1}; & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0; & t \geq t_1 \end{cases}$$

con $F_0 = 2000$ N y $t_1 = 6$ s.

4.83 Resuelva el problema 4.81 (con el método de Runge-Kutta) para la función forzada

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0\, t}{t_1}; & 0 \leq t \leq t_1 \\ F_0 \left(\dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right); & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0; & t \geq t_2 \end{cases}$$

con $F_0 = 2000$ N, $t_1 = 3$ s y $t_2 = 6$ s.

Sección 4.9 Respuesta a condiciones forzadas irregulares obtenida aplicando métodos numéricos

4.84 Derive las expresiones para x_j y $\dot{x}_j$ de acuerdo con la función de interpolación lineal, considerada en la sección 4.9 para el caso no amortiguado. Utilizando estas expresiones, encuentre la solución del ejemplo 4.31 suponiendo que el amortiguamiento es cero.

4.85 Encuentre la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad con la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

utilizando el método numérico de la sección 4.9. Considere $m = 5$ kg, $c = 200$ N-s/m, $k = 750$ N/m y los valores de la función forzada $F(t)$ en tiempos discretos como se indica a continuación:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(t)$	0	400	800	1200	1600	2000	2000	2000	2000	2000	2000

4.86 Encuentre la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad con la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

utilizando el método numérico de la sección 4.9. Considere $m = 5$ kg, $c = 200$ N-s/m, $k = 750$ N/m y los valores de la función forzada $F(t)$ en tiempos discretos como se indica a continuación:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(t)$	0	1000	1732	2000	1732	1000	0	0	0	0	0

4.87 Encuentre la respuesta de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad con la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

utilizando el método numérico de la sección 4.9. Considere $m = 5$ kg, $c = 200$ N-s/m, $k = 750$ N/m y los valores de la función forzada $F(t)$ en tiempos discretos como se indica a continuación:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(t)$	0	666.7	1333.3	2000	1333.3	666.7	0	0	0	0	0

Sección 4.10 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

4.88 Una máquina recibe una fuerza de choque de un martillo de impacto. Si la máquina se puede modelar como un sistema de un solo grado de libertad con $m = 10$ kg, $k = 4000$ N/m y $c = 40$ N-s/m y la magnitud del impacto es $\boldsymbol{F} = 100$ N-s, determine la respuesta de la máquina. También trace la respuesta utilizando MATLAB.

4.89 Si la máquina descrita en el problema 4.88 recibe un doble choque impartido por el martillo de impacto, determine la respuesta de la máquina. Considere la fuerza de impacto, $F(t)$, como $F(t) = 100\ \delta(t) + 50\ \delta(t - 0.5)$ N, donde, $\delta(t)$ es la función delta Dirac. Trace también la respuesta de la máquina aplicando MATLAB.

4.90 Utilizando MATLAB, trace la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado de resorte-masa sometido al pulso rectangular que se muestra en la figura 4.12(a) con (a) $t_0 = 0.1$ s, y (b) $t_0 = 1.5$ s. Considere los siguientes datos: $m = 100$ kg, $k = 1200$ N/m, $c = 50$ N-s/m, $F_0 = 100$ N.

4.91 Siguiendo `Program4.m`, encuentre la respuesta de estado estable de un sistema viscosamente amortiguado con $m = 1$ kg, $k = 400$ N/m y $c = 5$ N-s/m sometido a la fuerza periódica que se muestra en la figura 4.71.

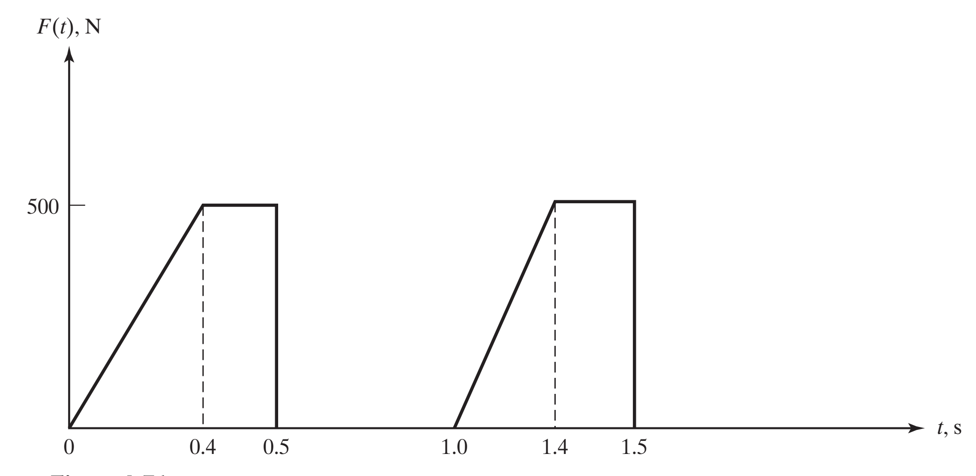


Figura 4.71

4.92 Siguiendo **`Program4.m`**, encuentre la respuesta de un sistema viscosamente amortiguado con $m = 100$ kg, $k = 10^5$ N y z = 0.1 sometido a la fuerza $F(t) = 1\,000(1 - \cos \pi t)$ N.

4.93 Un sistema amortiguado de un solo grado de libertad tiene una masa $m = 2$, un resorte de rigidez $k = 50$ y un amortiguador con $c = 2$. Una función forzada $F(t)$, cuya magnitud se indica en la tabla siguiente, actúa en la masa durante 1 segundo. Encuentre la respuesta del sistema por medio del método de interpolación por partes que se describe en la sección 4.9 utilizando **`Program5.m.`**

Tiempo (t_i)	$F(t_i)$
0.0	−8.0
0.1	−12.0
0.2	−15.0
0.3	−13.0
0.4	−11.0
0.5	−27.0
0.6	−24.0
0.7	3.0
0.8	10.0
0.9	15.0
1.0	18.0

4.94 La ecuación de movimiento de un sistema no amortiguado está dada por $2\ddot{x} + 1500x = F(t)$, donde la curva que se muestra en la figura 4.72 define la función forzada. Encuentre la respuesta del sistema numéricamente en el rango $0 \leq t \leq 0.5$. Considere las condiciones iniciales como $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ y el tamaño del escalón de tiempo como $\Delta t = 0.01$. Use el programa MATLAB **`ode23.`**

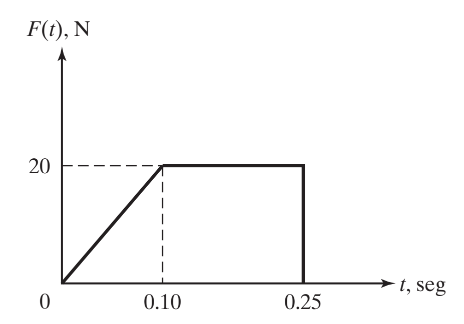


Figura 4.72

4.95 Resuelva el problema 4.94 siguiendo el programa MATLAB **`ode23`** si el sistema está viscosamente amortiguado de modo que la ecuación de movimiento sea

$$2\ddot{x} + 10\dot{x} + 1500x = F(t)$$

4.96 Escriba un programa MATLAB para hallar la respuesta de estado estable de un sistema de un solo grado de libertad sometido a una fuerza arbitraria, evaluando numéricamente la integral de Duhamel. Utilizando este programa, resuelva el ejemplo 4.31.

4.97 Encuentre el desplazamiento relativo del tanque de agua que se muestra en la figura 4.43(a) cuando su base se somete al registro de aceleración sísmica de la figura 1.115 suponiendo que la ordenada representa la aceleración en g's. Use el programa del problema 4.96.

4.98 La ecuación diferencial de movimiento de un sistema no amortiguado está dado por $2\ddot{x} + 150x = F(t)$ con las condiciones iniciales $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Si $F(t)$ es como se muestra en la figura 4.73, halle la respuesta del problema siguiendo el programa del problema 4.96.

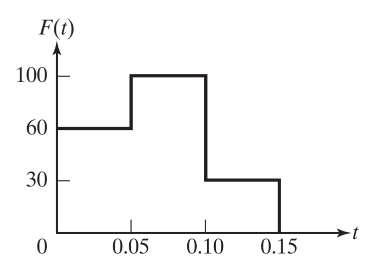


Figura 4.73

Proyectos de diseño

4.99 Diseñe un sismómetro del tipo que se muestra en la figura 4.74(a) (y especifique los valores de a, m y k) para medir sismos. El sismómetro debe tener una frecuencia natural de 10 Hz, y el desplazamiento relativo máximo de la masa debe ser al menos de 2 cm cuando su base se someta al desplazamiento que se aprecia en la figura 4.74(b).

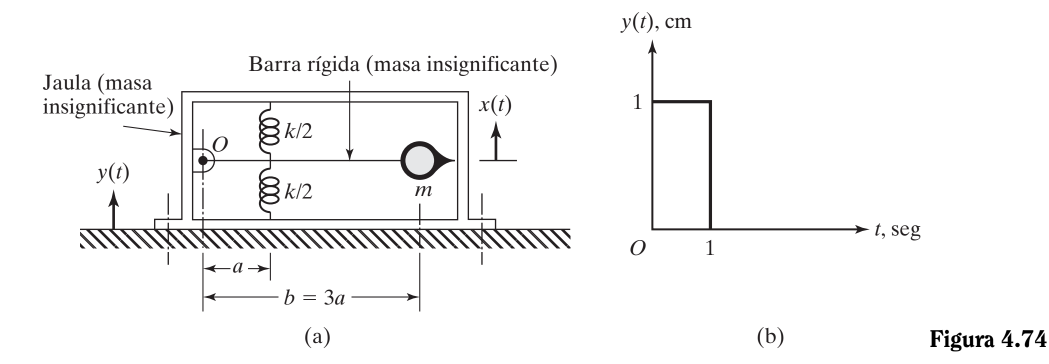


Figura 4.74

4.100 Las fuerzas de corte desarrolladas durante dos operaciones de maquinado diferentes se muestran en las figuras 4.75(a) y (b). Las imprecisiones (en la dirección vertical) en la superficie de acabado en dos casos fueron de 0.1 mm y 0.05, respectivamente. Encuentre la masa y rigidez equivalentes de la cabeza de corte (figura 4.76), considerándola como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad.

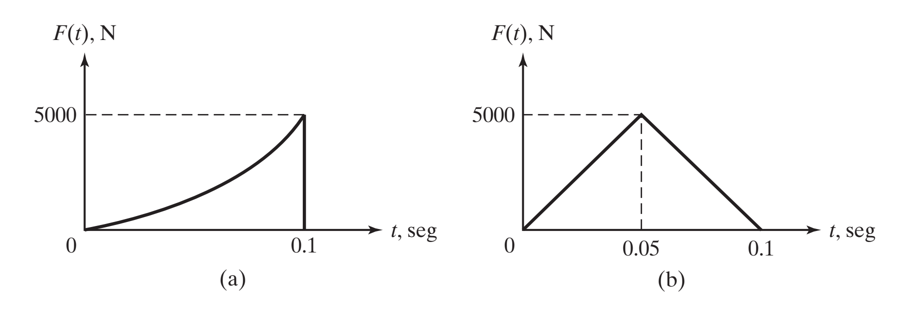


Figura 4.75

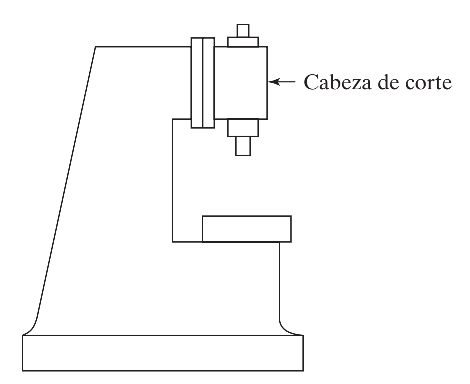


Figura 4.76

4.101 Una fresadora montada a la mitad de un eje se utiliza para quitar metal de una pieza de trabajo (figura 4.77). Se desarrolla un par de torsión de 500 N-m en la fresa en condiciones de fresado de estado estable. Uno de los 16 dientes de la fresa se rompe durante la operación de corte. Determine la sección transversal del eje para limitar la amplitud del desplazamiento angular de la fresa a 1°. Suponga que el eje se puede modelar como una flecha de acero hueco fija por ambos extremos.

Datos: Longitud del eje = 0.5 m, momento de inercia de masa de la fresa = 0.1N-m^2, velocidad de la fresa = 1 000 rpm.

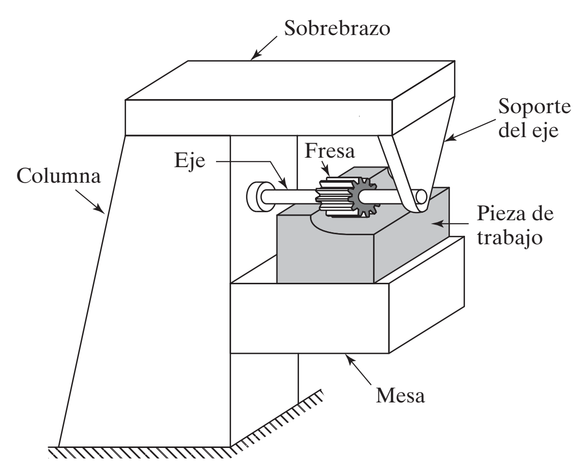


Figura 4.77

CAPÍTULO 5

Sistemas de dos grados de libertad

Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Miembro de una familia de matemáticos y científicos suizos, recibió su doctorado en medicina por su tesis sobre la acción de los pulmones. Fue profesor de matemáticas en San Petersburgo en 1725. Más adelante dio clases de anatomía y botánica en Basel. Desarrolló la teoría de la hidrostática y la hidrodinámica; el "teorema de Bernoulli" es muy conocido entre los ingenieros. Derivó las ecuaciones de movimiento para la vibración de vigas (teoría de Euler-Bernoulli) y estudió los problemas de las cuerdas vibratorias. Bernoulli fue el primero en proponer el principio de superposición de armónicos en vibración libre.
(Fotografía de un retrato, cortesía de David Eugene Smith en *History of Mathematics,* Volumen 1, *General Survey of the History of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Nueva York, 1958).

Esquema del capítulo

En este capítulo se trata de los sistemas de dos grados de libertad, los cuales requieren dos coordenadas independientes para describir su movimiento. Las ecuaciones de movimiento acopladas del sistema se derivan aplicando la segunda ley del movimiento de Newton. Al expresar estas ecuaciones en forma matricial se identifican las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema. Asumiendo el movimiento armónico de las dos masas, se encuentran los valores de eigen o frecuencias naturales de vibración, los vectores modales y la solución de vibración libre del sistema no amortiguado. También se describe el método de incorporación de las condiciones iniciales. Se consideran de manera análoga los sistemas torsionales de dos grados de libertad. Los conceptos de acoplamiento de coordenadas, coordenadas generalizadas y coordenadas principales se presentan con ejemplos. Se hace una introducción al análisis de vibración forzada del sistema sometido a una forma compleja de fuerza armónica y se identifica la matriz de impedancia. Se presentan los sistemas semidefinidos, no restringidos o degenerados junto con un método para encontrar sus frecuencias naturales de vibración. La autoexcitación y el análisis de estabilidad de sistemas de dos grados de libertad se consideran junto con una derivación de las condiciones de estabilidad. También se presenta el criterio de Routh-Hurwitz, el cual se puede utilizar para derivar las condiciones de estabilidad de cualquier sistema de n grados de libertad. Asimismo, el método de la función de transferencia, el cálculo de la respuesta de sistemas de dos grados aplicando la transformada de Laplace y las soluciones obtenidas con funciones de transferencia de frecuencia tienen aquí su presentación. Por último, se ilustran con ejemplos las soluciones de vibración libre y forzada de un sistema de dos grados de libertad que se obtienen utilizando MATLAB.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Formular las ecuaciones de movimiento de sistemas de dos grados de libertad.
- Identificar las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez a partir de las ecuaciones de movimiento.
- Calcular los valores de eigen o frecuencias naturales de vibración, y los vectores modales.
- Determinar la solución de vibración libre utilizando las condiciones iniciales conocidas.
- Comprender los conceptos de acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales.
- Determinar las soluciones de vibración forzada bajo fuerzas armónicas.
- Comprender los conceptos de autoexcitación y estabilidad del sistema.
- Utilizar el método de la transformada de Laplace para solucionar sistemas de dos grados de libertad.
- Resolver problemas de vibración libre y forzada de dos grados de libertad utilizando MATLAB.

5.1 Introducción

Los sistemas que requieren dos coordenadas independientes para describir su movimiento se llaman *sistemas de dos grados de libertad*. Algunos ejemplos de sistemas de dos grados de libertad se mostraron en la figura 1.12. En este capítulo consideraremos sólo sistemas de dos grados de libertad, para proporcionar una introducción simple al comportamiento de sistemas con un número arbitrariamente grande de grados de libertad, lo cual es el tema del capítulo 6.

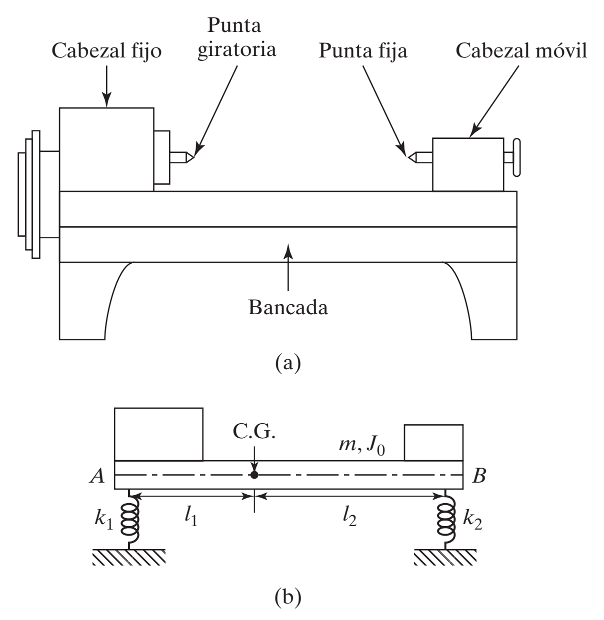


Figura 5.1 Torno.

Considere un modelo simplificado de un torno que se muestra en la figura 5.1(a), en el cual su bancada, representada como una viga elástica, está apoyada sobre dos cortas columnas elásticas con su cabezal fijo y el cabezal móvil indicados como masas concentradas fijas en la viga [5.1-5.3]. Para un análisis de vibración simplificado, el torno se puede tratar como un cuerpo rígido de masa total m y momento de inercia de masa J_0 con respecto a su centro de gravedad (C.G.), apoyado en resortes de rigidez k_1 y k_2 como se muestra en la figura 5.1(b). El desplazamiento del sistema en cualquier momento puede ser especificado por una coordenada lineal $x(t)$, que indica el desplazamiento vertical del C.G. de la masa, y una coordenada angular $\theta(t)$, que indica la rotación de la masa m con respecto a su C.G. En lugar de $x(t)$ y $\theta(t)$, también podemos utilizar $x_1(t)$ y $x_2(t)$, los desplazamientos de los puntos A y B, como coordenadas independientes para especificar el movimiento del sistema. Por lo tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Es importante observar que en este caso la masa m se trata no como una masa puntual sino como un cuerpo rígido que tiene dos posibles tipos de movimiento. (Si es una partícula, no es necesario especificar la rotación de la masa en torno a su C.G.).

Asimismo, considere el automóvil que se muestra en la figura 5.2(a). Para la vibración de un automóvil en el plano vertical se puede utilizar el modelo de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.2(b). En este caso el cuerpo se idealiza como una barra de masa m y momento de inercia de masa J_0, apoyada sobre las ruedas traseras y delanteras (suspensiones) de rigidez k_1 y k_2. El desplazamiento del automóvil en cualquier momento puede ser especificado por la coordenada lineal $x(t)$ que indica el desplazamiento vertical del C.G. del cuerpo y la coordenada angular $\theta(t)$ que indica la rotación (inclinación) del cuerpo con respecto a su C.G. De forma alterna, el movimiento del automóvil se puede especificar por medio de coordenadas independientes, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, de los puntos A y B.

A continuación, considere el movimiento de un edificio de varios pisos sometido a un sismo. Por sencillez, se puede utilizar un modelo de dos grados de libertad como se muestra en la figura 5.3. En este caso el edificio se modela como una barra rígida de masa m y momento de inercia de masa J_0. La resistencia ofrecida al movimiento del edificio por los cimientos y el suelo circundante

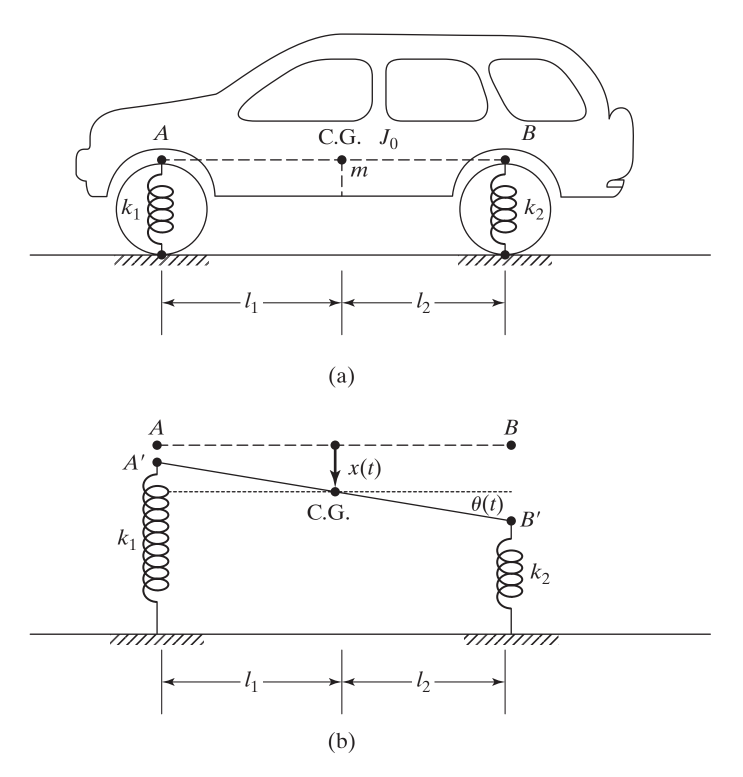


Figura 5.2 Automóvil.

se representa de forma aproximada por un resorte lineal de rigidez k y un resorte torsional de rigidez k_t. El desplazamiento del edificio en cualquier momento puede ser especificado por el movimiento horizontal de la base $x(t)$ y el movimiento angular $\theta(t)$ alrededor del punto O. Por último, considere el sistema de la figura 5.4(a), el cual ilustra el embalaje de un instrumento de masa m. Suponiendo que el movimiento del instrumento se limita al plano xy, el sistema se puede modelar como una masa m soportada por resortes en las direcciones x y y, como se indica en la figura 5.4(b). De modo que el sistema tiene una masa puntual m y dos grados de libertad, porque la masa tiene dos posibles tipos de movimiento (traslación a lo largo de las direcciones x y y). La regla general para calcular el número de grados de libertad se puede formular como sigue:

Número de grados de libertad del sistema	=	Número de masas en el sistema × cantidad de posibles tipos de movimientos de cada masa

Hay dos ecuaciones de movimiento para un sistema de dos grados de libertad, una para cada masa (más precisamente, para cada grado de libertad). Por lo general son de la forma de *ecuaciones diferenciales acopladas*, es decir, cada ecuación implica todas las coordenadas. Si se supone una solución armónica para cada coordenada, las ecuaciones de movimiento conducen a una ecuación de frecuencia que da dos frecuencias naturales para el sistema. Si le impartimos una excitación inicial, el sistema vibra a una de estas frecuencias naturales. Durante la vibración libre en una de las frecuencias naturales, las amplitudes de los dos grados de libertad (coordenadas) se relacionan de una manera específica y la configuración se conoce como *modo normal*, *modo principal* o *modo natural* de vibración. Por lo tanto, un sistema de dos grados de libertad tiene dos modos normales de vibración correspondientes a las dos frecuencias naturales.

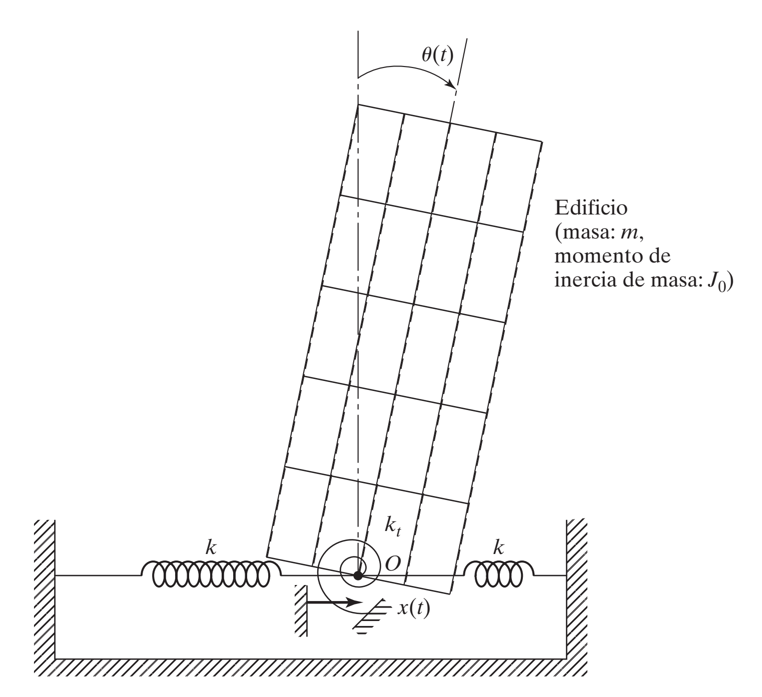


Figura 5.3 Edificio de varios pisos sometido a un sismo.

Si le impartimos una excitación inicial al sistema, la vibración resultante será una superposición de los dos modos normales de vibración. Sin embargo, si el sistema vibra por la acción de una fuerza armónica externa, la vibración armónica forzada resultante ocurre en la frecuencia de la fuerza aplicada. Bajo excitación armónica, ocurre la resonancia (es decir, las amplitudes de las dos coordenadas serán máximas) cuando la frecuencia forzada sea igual a una de las frecuencias naturales del sistema.

Como es evidente por los sistemas que se muestran en las figuras 5.1-5.4, la configuración de un sistema se puede especificar por medio de un conjunto de coordenadas independientes como longitud, ángulo o algún otro parámetro físico. A todo conjunto de coordenadas como ese se le llama *coordenadas generalizadas*. Aun cuando las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad suelen estar acopladas de modo que cada ecuación implique todas las

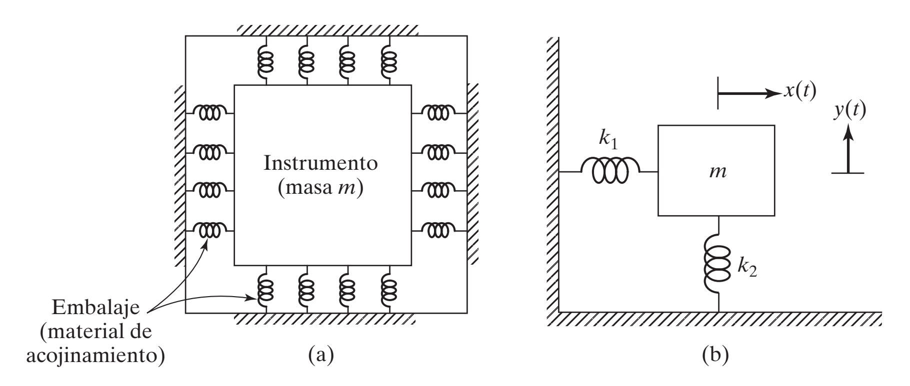


Figura 5.4 Embalaje de un instrumento.

coordenadas, siempre es posible determinar un conjunto particular de coordenadas de modo que cada ecuación de movimiento contenga sólo una coordenada. Entonces las ecuaciones se *desacoplan* y se pueden resolver independientemente de cada una. Tal conjunto de coordenadas, el cual conduce a un sistema desacoplado de ecuaciones, se conoce como *coordenadas principales*.

5.2 Ecuaciones de movimiento para vibración forzada

Considere un sistema de resorte-masa viscosamente amortiguado de dos grados de libertad, como el que se muestra en la figura 5.5(a). Las coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ describen totalmente el movimiento del sistema, las cuales definen las posiciones de las masas m_1 y m_2 en cualquier momento t con respecto a las posiciones de equilibrio respectivas. Las fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ actúan en las masas m_1 y m_2, respectivamente. Los diagramas de cuerpo libre de las masas m_1 y m_2 se muestran en la figura 5.5(b). La aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton a cada una de las masas proporciona las ecuaciones de movimiento:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \tag{5.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \tag{5.2}$$

Se ve que la ecuación (5.1) contiene términos que implican x_2 (es decir, $-c_2\dot{x}_2$ y $-k_2x_2$), en tanto que la ecuación (5.2) contiene términos que implican x_1 (es decir, $-c_2\dot{x}_1$ y $-k_2x_1$). Por consiguiente representan un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. De este modo, se puede esperar que el movimiento de la masa m_1 influya en el movimiento de la masa m_2 y viceversa. Las ecuaciones (5.1) y (5.2) se pueden escribir en forma matricial como

$$[m]\,\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\,\dot{\vec{x}}(t) + [k]\,\vec{x}(t) = \vec{f}(t) \tag{5.3}$$

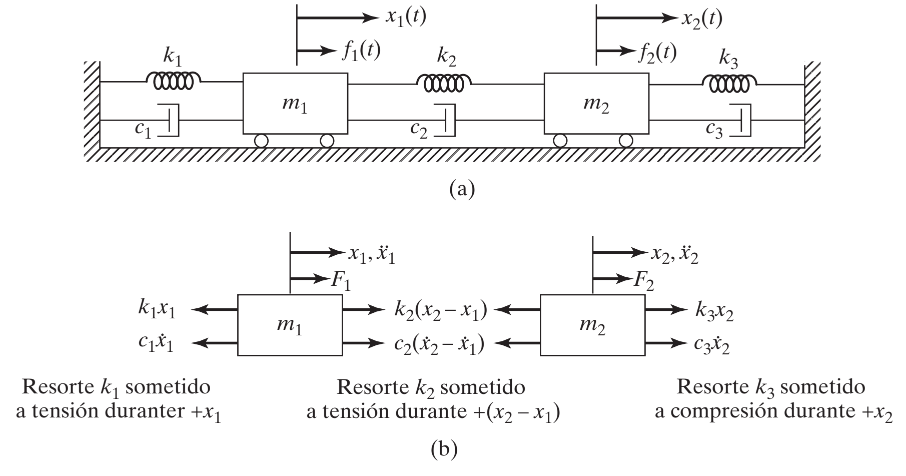


Figura 5.5 Sistema de resorte-masa-amortiguador de dos grados de libertad.

donde $[m]$, $[c]$ y $[k]$ se conocen como *matrices* de *masa*, *amortiguamiento* y *rigidez*, respectivamente, y se expresan como

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

y $\vec{x}(t)$ y $\vec{f}(t)$ son los *vectores* de *desplazamiento* y *fuerza*, respectivamente, y se expresan como

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

y

$$\vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Se ve que $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son matrices de 2×2 cuyos elementos son las masas, coeficientes de amortiguamiento y rigideces conocidos del sistema, respectivamente. Además, se ve que estas matrices son simétricas, de modo que

$$[m]^T = [m], \qquad [c]^T = [c], \qquad [k]^T = [k]$$

donde el superíndice T indica la transpuesta de la matriz.

Observe que las ecuaciones de movimiento (5.1) y (5.2) se desacoplan (se vuelven independientes una de otra) sólo cuando $c_2 = k_2 = 0$, lo que implica que las dos masas m_1 y m_2 no están físicamente conectadas. En ese caso, las matrices $[m]$, $[c]$ y $[k]$ se vuelven diagonales. La solución de las ecuaciones de movimiento (5.1) y (5.2) con cualesquiera fuerzas arbitrarias $f_1(t)$ y $f_2(t)$ es difícil de obtener, sobe todo por al acoplamiento de las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$. La solución de las ecuaciones (5.1) y (5.2) implica cuatro constantes de integración (dos por cada ecuación). Los desplazamientos y velocidades iniciales de las dos masas se suelen especificar como $x_1(t = 0) = x_1(0)$, $\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0)$, $x_2(t = 0) = x_2(0)$, y $\dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0)$. Primero consideraremos la solución de vibración libre de las ecuaciones (5.1) y (5.2).

5.3 Análisis de vibración libre de un sistema no amortiguado

Para el análisis de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.5(a), establecemos $f_1(t) = f_2(t) = 0$. Además, si se omite el amortiguamiento, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, las ecuaciones de movimiento (5.1) y (5.2) se reducen a

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0 \tag{5.4}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \tag{5.5}$$

Nos interesa saber si m_1 y m_2 pueden oscilar armónicamente con la misma frecuencia y ángulo de fase pero con diferentes amplitudes. Suponiendo que sea posible tener movimiento armónico de m_1 y m_2 a la misma frecuencia ω y al mismo ángulo de fase ϕ, consideramos las soluciones de las ecuaciones (5.4) y (5.5) como

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi) \tag{5.6}$$

donde X_1 y X_2 son constantes que indican las amplitudes máximas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y ϕ es el ángulo de fase. Sustituyendo la ecuación (5.6) en las ecuaciones (5.4) y (5.5), obtenemos

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$
$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0 \tag{5.7}$$

Dado que la ecuación (5.7) debe satisfacerse para todos los valores del tiempo t, los términos entre paréntesis rectangulares deben ser cero. Esto resulta en

$$\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 = 0$$
$$-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0 \tag{5.8}$$

las cuales representan dos ecuaciones algebraicas homogéneas simultáneas en las incógnitas X_1 y X_2. Se ve que la solución trivial $X_1 = X_2 = 0$ satisface la ecuación 5.8, lo que implica que no hay vibración. Para una solución no trivial de X_1 y X_2, el determinante de los coeficientes de X_1 y X_2 debe ser cero

$$\det\begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

o

$$(m_1m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2$$
$$+ \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \tag{5.9}$$

La ecuación (5.9) se conoce como *ecuación de frecuencia* o *característica* porque su solución produce las frecuencias o los valores característicos del sistema. Las raíces de la ecuación (5.9) están dadas por

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2}\right\}$$
$$\mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2}\right\}^2\right.$$
$$\left. - 4\left\{\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1m_2}\right\}\right]^{1/2} \tag{5.10}$$

Esto demuestra que es posible que el sistema tenga una solución armónica no trivial de la forma de la ecuación (5.6) cuando ω es igual a ω_1 y ω_2 dadas por la ecuación (5.10). Llamamos ω_1 y ω_2 a las *frecuencias naturales* del sistema.

Los valores de X_1 y X_2 aún no se han determinado. Estos valores dependen de las frecuencias naturales ω_1 y ω_2. Indicaremos los valores de X_1 Y X_2 correspondientes a ω_1 como $X_1^{(1)}$ y $X_2^{(1)}$ y los correspondientes a ω_2 como $X_1^{(2)}$ y $X_2^{(2)}$. Además, dado que la ecuación (5.8) es homogénea, sólo se pueden determinar las relaciones $r_1 = \{X_2^{(1)}/X_1^{(1)}\}$ y $r_2 = \{X_2^{(2)}/X_1^{(2)}\}$. Para $\omega^2 = \omega_1^2$ y $\omega^2 = \omega_2^2$, la ecuación (5.8) indica

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

Observe que las dos relaciones para cada r_i $(i = 1, 2)$ en la ecuación (5.11) son idénticas. Los modos normales de vibración correspondientes a ω_1^2 y ω_2^2 se pueden expresar, respectivamente, como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

y

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

Los vectores $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$, los cuales indican los modos normales de vibración, se conocen como *vectores modales* del sistema. La solución de vibración libre o el movimiento en el tiempo se puede expresar, utilizando la ecuación (5.6), como

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{primer modo}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{matrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{matrix} = \begin{matrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{matrix} = \text{segundo modo} \tag{5.13}$$

donde las condiciones iniciales determinan las constantes $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 y ϕ_2.

Condiciones iniciales. Como se mencionó antes, cada una de las dos ecuaciones de movimiento, ecuaciones (5.1) y (5.2), implica derivadas de segundo orden; por consiguiente, se requiere especificar dos condiciones iniciales para casa masa. Como se estableció en la sección 5.1, se puede hacer que el sistema vibre en su modo normal *i*ésimo $(i = 1,2)$ sometiéndolo a las condiciones iniciales específicas

$$x_1(t = 0) = X_1^{(i)} = \text{alguna constante} \qquad \dot{x}_1(t = 0) = 0,$$

$$x_2(t = 0) = r_i X_1^{(i)}, \qquad \dot{x}_2(t = 0) = 0$$

Sin embargo, para cualesquier otras condiciones iniciales, ambos modos se excitarán. El movimiento resultante, dado por la solución general de las ecuaciones (5.4) y (5.5), se obtiene mediante una superposición lineal de los dos modos normales, ecuación (5.13):

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)}(t) + c_2 \vec{x}^{(2)}(t) \tag{5.14}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Dado que $\vec{x}^{(1)}(t)$ y $\vec{x}^{(2)}(t)$ ya implican las constantes desconocidas $X_1^{(1)}$ y $X_1^{(2)}$ (vea la ecuación (5.13)), podemos escoger $c_1 = c_2 = 1$, sin pérdida de generalidad. Por tanto, los componentes del vector $\vec{x}(t)$ se expresan, utilizando la ecuación (5.14) con $c_1 = c_2 = 1$ y la ecuación (5.13), como

$$x_1(t) = x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t)$$
$$= r_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{5.15}$$

donde las condiciones iniciales pueden determinar las constantes incógnitas $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 y ϕ_2:

$$x_1(t = 0) = x_1(0), \qquad \dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0),$$
$$x_2(t = 0) = x_2(0), \qquad \dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0) \tag{5.16}$$

La sustitución de la ecuación (5.16) en la ecuación (5.15) conduce a

$$x_1(0) = X_1^{(1)}\cos\phi_1 + X_1^{(2)}\cos\phi_2$$
$$\dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2$$
$$x_2(0) = r_1 X_1^{(1)}\cos\phi_1 + r_2 X_1^{(2)}\cos\phi_2$$
$$\dot{x}_2(0) = -\omega_1 r_1 X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2 \tag{5.17}$$

La ecuación (5.17) se puede considerar como cuatro ecuaciones algebraicas en las incógnitas $X_1^{(1)}\cos\phi_1$, $X_1^{(2)}\cos\phi_2$, $X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1$ y $X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2$. La solución de la ecuación (5.17) se expresa como

$$X_1^{(1)}\cos\phi_1 = \left\{\frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}, \qquad X_1^{(2)}\cos\phi_2 = \left\{\frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}$$
$$X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1 = \left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1(r_2 - r_1)}\right\}, \qquad X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2 = \left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2(r_2 - r_1)}\right\}$$

a partir de las cuales obtenemos la solución deseada:

$$X_1^{(1)} = [\{X_1^{(1)}\cos\phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1\}^2]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)}\left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}\right]^{1/2}$$
$$X_1^{(2)} = [\{X_1^{(2)}\cos\phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2\}^2]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)}\left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}\right]^{1/2}$$
$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(1)}\operatorname{sen}\phi_1}{X_1^{(1)}\cos\phi_1}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2 x_1(0) - x_2(0)]}\right\}$$
$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(2)}\operatorname{sen}\phi_2}{X_1^{(2)}\cos\phi_2}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1 x_1(0) + x_2(0)]}\right\} \tag{5.18}$$

Ejemplo 5.1 Frecuencias de un sistema de resorte-masa

Encuentre las frecuencias naturales y formas de modo de un sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 5.6, el cual está restringido para moverse sólo en la dirección vertical. Considere $n = 1$.

Solución: Si medimos x_1 y x_2 respecto a las posiciones de equilibrio estático de las masas m_1 y m_2, respectivamente, las ecuaciones de movimiento y la solución obtenida para el sistema de la figura 5.5(a) también son aplicables a este caso si sustituimos $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento, ecuaciones (5.4) y (5.5), son resultado de

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 &= 0 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Suponiendo una solución armónica como

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi);\ i = 1, 2 \tag{E.2}$$

la ecuación de frecuencia se obtiene sustituyendo la ecuación (E.2) en la ecuación (E.1):

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

o

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \tag{E.3}$$

La solución de la ecuación (E.3) proporciona las frecuencias naturales

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.4}$$

$$\omega_2 = \left\{ \frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{E.5}$$

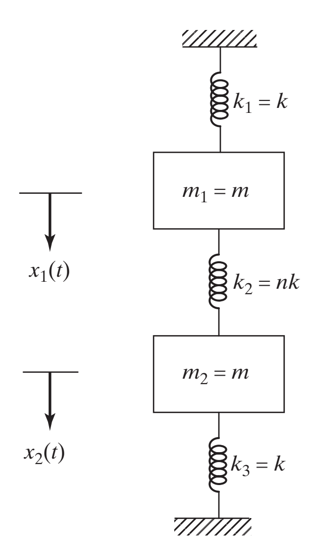


Figura 5.6 Sistema de dos grados de libertad.

De acuerdo con la ecuación (5.11) las relaciones de amplitud resultan de

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1 \tag{E.6}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1 \tag{E.7}$$

Los modos naturales resultan de la ecuación (5.13):

$$\text{Primer modo} = \vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$

$$\text{Segundo modo} = \vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \end{Bmatrix} \tag{E.9}$$

En la ecuación (E.8) se ve que cuando el sistema vibra en su primer modo, las amplitudes de las dos masas no cambian. Esto implica que la longitud de resorte medio permanezca constante. Por lo tanto, los movimientos de m_1 y m_2 están en fase (vea la figura 5.7(a)). Cuando el sistema vibra en su segundo modo, la ecuación (E.9) muestra que los desplazamientos de las dos masas tienen la misma magnitud con signos opuestos. Por lo tanto, los movimientos de m_1 y m_2 están desfasados 180° (vea la figura 5.7(b)). En este caso el punto medio del resorte medio permanece estacionario todo el tiempo t. Tal punto se denomina *nodo*. Utilizando la ecuación (5.15) el movimiento (solución general) del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \\ x_2(t) &= X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \end{aligned} \tag{E.10}$$

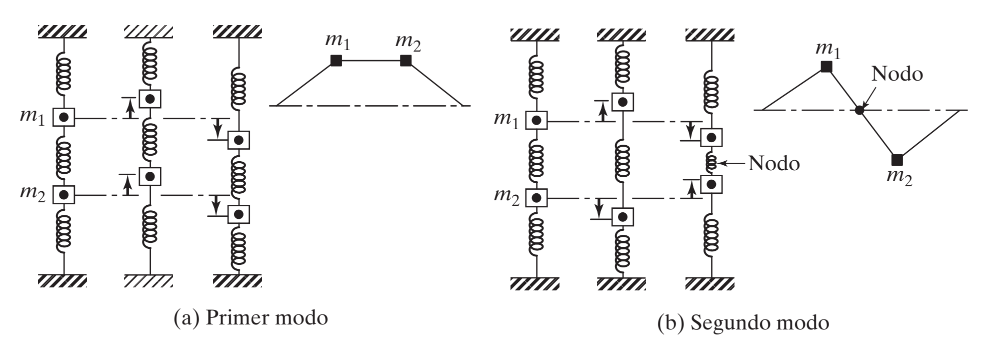


Figura 5.7 Modo de vibración.

■

Nota: Se ve que el cálculo de las frecuencias naturales y formas de modo es laborioso y tedioso. Se pueden utilizar programas de computadora de forma conveniente para el cálculo numérico de las frecuencias naturales y formas de modo de sistemas de varios grados de libertad (vea la sección 5.12).

Ejemplo 5.2 Condiciones iniciales para excitar un modo específico

Encuentre las condiciones iniciales que necesitan aplicarse al sistema que se muestra en la figura 5.6 para que vibre (a) en el primer modo, y (b) en el segundo modo.

Solución:

Método: Especifique la solución que se obtendrá para el primer o segundo modo a partir de la solución general en condiciones iniciales arbitrarias y resuelva las ecuaciones resultantes.

Para condiciones iniciales arbitrarias, la ecuación (5.15) describe el movimiento de las masas. En este caso, $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ de modo que la ecuación (5.15) se reduce a la ecuación (E.10) del ejemplo 5.1:

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_2\right) \tag{E.1}$$

Suponiendo las condiciones iniciales como en la ecuación (5.16), las constantes $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 y ϕ_2 se obtienen por la ecuación (5.18), aplicando $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$:

$$X_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\left\{[x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{k}[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]^2\right\}^{1/2} \tag{E.2}$$

$$X_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\left\{[-x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{3k}[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]^2\right\}^{1/2} \tag{E.3}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{-\sqrt{m}\,[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{k}\,[x_1(0) + x_2(0)]}\right\} \tag{E.4}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{m}\,[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{3k}\,[-x_1(0) + x_2(0)]}\right\} \tag{E.5}$$

a. La ecuación (E.8) del ejemplo 5.1 da el primer modo normal del sistema

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_1\right) \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

La comparación de las ecuaciones (E.1) y (E.6) muestra que el movimiento del sistema es idéntico al del primer modo normal sólo si $X_1^{(2)} = 0$. Esto requiere que (a partir de la ecuación E.3)

$$x_1(0) = x_2(0) \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \tag{E.7}$$

b. La ecuación (E.9) del ejemplo 5.1 proporciona el segundo modo normal del sistema:

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_2\right) \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$

La comparación de las ecuaciones (E.1) y (E.8) muestra que el movimiento del sistema coincide con el segundo modo normal sólo si $X_1^{(1)} = 0$. Esto implica que (a partir de la ecuación E.2)

$$x_1(0) = -x_2(0) \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \tag{E.9}$$

■

Ejemplo 5.3 Respuesta de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.5(a) con $k_1 = 30$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0$, $m_1 = 10$, $m_2 = 1$ y $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Solución: Para los datos dados, el problema de valor eigen, ecuación (5.8), se vuelve

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} -10\omega^2 + 35 & -5 \\ -5 & -\omega^2 + 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

Si hacemos que el determinante de la matriz de coeficientes en la ecuación (E.1) sea igual a cero, obtenemos la ecuación de frecuencia (vea la ecuación (5.9)):

$$10\omega^4 - 85\omega^2 + 150 = 0 \tag{E.2}$$

a partir de la cual se pueden encontrar las frecuencias naturales como

$$\omega_1^2 = 2.5, \qquad \omega_2^2 = 6.0$$

o

$$\omega_1 = 1.5811, \qquad \omega_2 = 2.4495 \tag{E.3}$$

La sustitución de $\omega^2 = \omega_1^2 = 2.5$ en la ecuación (E.1) conduce a $X_2^{(1)} = 2X_1^{(1)}$, mientras que $\omega^2 = \omega_2^2 = 6.0$ en la ecuación (E.1) resulta $X_2^{(2)} = -5X_1^{(2)}$. Por lo tanto, los modos normales (o vectores eigen) se expresan como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)} \tag{E.4}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)} \tag{E.5}$$

Las respuestas de vibración libre de las masas m_1 y m_2 están dadas por (vea la ecuación (5.15)):

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2) \tag{E.6}$$

$$x_2(t) = 2X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) - 5X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2) \tag{E.7}$$

donde $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 y ϕ_2.son constantes que se tienen que determinar a partir de las condiciones iniciales. Utilizando las condiciones iniciales dadas en las ecuaciones (E.6) y (E.7), obtenemos

$$x_1(t = 0) = 1 = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \tag{E.8}$$

$$x_2(t = 0) = 0 = 2X_1^{(1)} \cos \phi_1 - 5X_1^{(2)} \cos \phi_2 \tag{E.9}$$

$$\dot{x}_1(t = 0) = 0 = -1.5811X_1^{(1)} \operatorname{sen} \phi_1 - 2.4495X_1^{(2)} \operatorname{sen} \phi_2 \tag{E.10}$$

$$\dot{x}_2(t = 0) = -3.1622X_1^{(1)} + 12.2475X_1^{(2)} \operatorname{sen} \phi_2 \tag{E.11}$$

La solución de las ecuaciones (E.8) y (E.9) produce

$$X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \frac{5}{7}, \qquad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{2}{7} \tag{E.12}$$

en tanto la solución de las ecuaciones (E.10) y (E.11) conduce a

$$X_1^{(1)} \operatorname{sen} \phi_1 = 0, \qquad X_1^{(2)} \operatorname{sen} \phi_2 = 0 \tag{E.13}$$

Las ecuaciones (E.12) y (E.13) proporcionan

$$X_1^{(1)} = \frac{5}{7}, \qquad X_1^{(2)} = \frac{2}{7}, \qquad \phi_1 = 0, \qquad \phi_2 = 0 \tag{E.14}$$

Por lo tanto, las respuestas de vibración libre de m_1 y m_2 están dadas por

$$x_1(t) = \frac{5}{7} \cos 1.5811t + \frac{2}{7} \cos 2.4495t \tag{E.15}$$

$$x_2(t) = \frac{10}{7} \cos 1.5811t - \frac{10}{7} \cos 2.4495t \tag{E.16}$$

La representación gráfica de las ecuaciones (E.15) y (E.16) se considera en el ejemplo 5.17.

■

5.4 Sistema torsional

Considere un sistema torsional compuesto de dos discos montados en una flecha, como se muestra en la figura 5.8. Los tres segmentos de la flecha tienen constantes de resorte rotacionales k_{t1}, k_{t2} y k_{t3}, como se indica en la figura. También se muestran los discos y momentos de inercia de masa J_1 y J_2, los pares de torsión aplicados M_{t1} y M_{t2} y los grados de libertad rotacionales θ_1 y θ_2. Las ecuaciones diferenciales de movimiento rotacional para los discos J_1 y J_2 se derivan como

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

que después de reordenarlas se escriben como

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2} \quad (5.19)$$

Para el análisis de vibración libre del sistema, la ecuación (5.19) se reduce a

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = 0 \quad (5.20)$$

Observe que la ecuación (5.20) es semejante a las ecuaciones (5.4) y (5.5). De hecho, la ecuación (5.20) se puede obtener sustituyendo θ_1, θ_2, J_1, J_2, k_{t1}, k_{t2}, y k_{t3} en lugar de x_1, x_2, m_1, m_2, k_1, k_2 y k_3, respectivamente. Por lo tanto, el análisis presentado en la sección 5.3 también es aplicable a sistemas torsionales con sustituciones apropiadas. Los dos ejemplos siguientes ilustran el procedimiento.

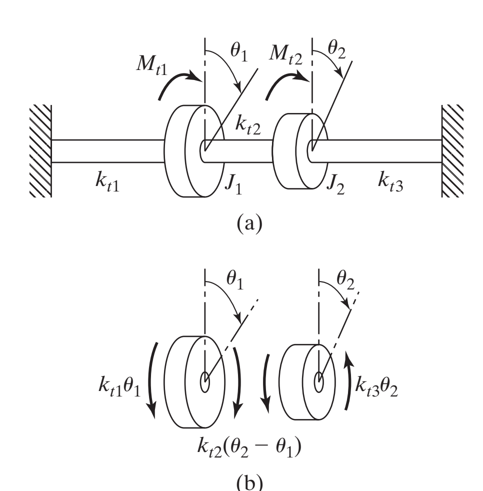


Figura 5.8 Sistema torsional con discos montados en una flecha.

Ejemplo 5.4 Frecuencias naturales de un sistema torsional

Encuentre las frecuencias naturales y formas de modo para el sistema torsional que se muestra en la figura 5.9 para $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$ y $k_{t1} = k_{t2} = k_t$.

Solución: La ecuación diferencial de movimiento, ecuación (5.20), se reduce a (con $k_{t3} = 0$, $k_{t1} = k_{t2} = k_t$, $J_1 = J_0$ y $J_2 = 2J_0$).

$$J_0\ddot{\theta}_1 + 2k_t\theta_1 - k_t\theta_2 = 0$$
$$2J_0\ddot{\theta}_2 - k_t\theta_1 + k_t\theta_2 = 0 \quad (E.1)$$

Reordenando y sustituyendo la solución armónica

$$\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi); \qquad i = 1, 2 \quad (E.2)$$

resulta la ecuación de frecuencia

$$2\omega^4 J_0^2 - 5\omega^2 J_0 k_t + k_t^2 = 0 \quad (E.3)$$

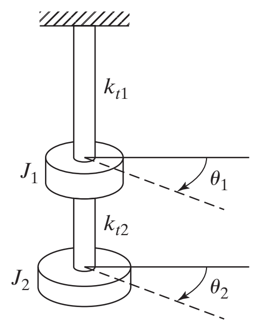


Figura 5.9 Sistema torsional.

La solución de la ecuación (E.3) proporciona las frecuencias naturales

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 - \sqrt{17})} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 + \sqrt{17})} \tag{E.4}$$

Las relaciones de amplitud son

$$r_1 = \frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = 2 - \frac{(5 - \sqrt{17})}{4}$$

$$r_2 = \frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = 2 - \frac{(5 + \sqrt{17})}{4} \tag{E.5}$$

Las ecuaciones (E.4) y (E.5) también se pueden obtener sustituyendo $k_1 = k_{t1} = k_t$, $k_2 = k_{t2} = k_t$, $m_1 = J_1 = J_0$, $m_2 = J_2 = 2J_0$ y $k_3 = 0$ en las ecuaciones (5.10) y (5.11).

■

Nota: Para un sistema de dos grados de libertad, las dos frecuencias ω_1 y ω_2 no son iguales a cualquiera de las frecuencias naturales de los sistemas de dos grados de libertad construidos con los mismos componentes. En el ejemplo 5.4 los sistemas de un solo grado de libertad k_{t1} y J_1

$$\left(\text{con } \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_{t1}}{J_1}} = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}\right)$$

y k_{t2} y J_2

$$\left(\text{con } \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{k_{t2}}{J_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_t}{J_0}}\right)$$

se combinan para obtener el sistema que se muestra en la figura 5.9. Se ve que ω_1 y ω_2 son diferentes de $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$.

Ejemplo 5.5 Frecuencias naturales de la hélice de un motor marino

En la figura 5.10(a) se muestra el diagrama de un motor marino conectado a una hélice por medio de engranes. Los momentos de inercia de masa del volante, motor, engrane 1, engrane 2 y la hélice (en kg-m^2) son 9000, 1000, 250, 150 y 2000, respectivamente. Encuentre las frecuencias naturales y formas de modo del sistema sometido a vibración torsional.

Solución

Método: Encuentre los momentos de inercia de masa equivalentes de todos los rotores con respecto a un rotor y utilice un modelo de dos grados de libertad.

Supuestos:

1. Se puede considerar que el volante está estacionario (fijo), puesto que su momento de inercia de masa es muy grande comparado con el de los demás rotores.
2. El motor y los engranes pueden ser reemplazados por un solo rotor equivalente.

Dado que los engranes 1 y 2 tienen 40 y 20 dientes, la flecha gira a dos veces la velocidad de la flecha 1. Por lo tanto, los momentos de inercia de masa del engrane 2 y la hélice, con respecto al motor, son

$$(J_{G2})_{\text{eq}} = (2)^2(150) \quad = 600 \text{ kg-m}^2$$

$$(J_P)_{\text{eq}} = (2)^2(2000) = 8000 \text{ kg-m}^2$$

Ya que la distancia entre el motor y la unidad de engranes es pequeña, el motor y los dos engranes pueden ser reemplazados por un solo rotor con un momento de inercia de masa de

$$J_1 = J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{\text{eq}} = 1000 + 250 + 600 = 1850 \text{ kg-m}^2$$

Suponiendo un módulo de cortante de 80×10^9 N/m^2 para acero, la rigidez torsional de las flechas 1 y 2 se determina como

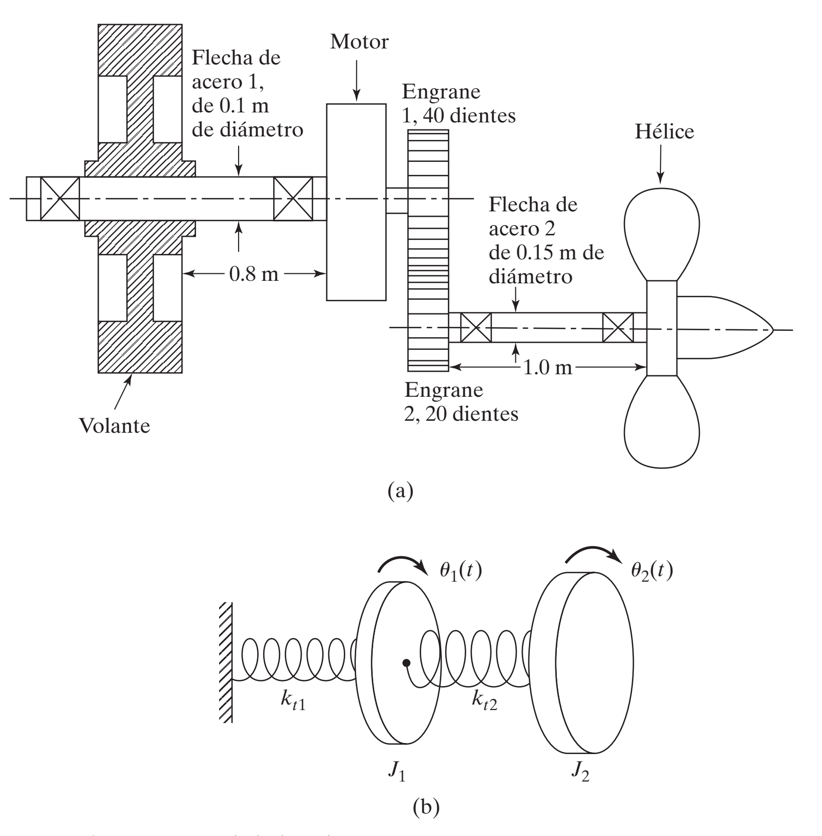


Figura 5.10 Sistema de hélice de motor marino.

$$k_{t1} = \frac{GI_{01}}{l_1} = \frac{G}{l_1}\left(\frac{\pi d_1^4}{32}\right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.10)^4}{(0.8)(32)} = 981{,}750.0 \text{ N-m/rad}$$

$$k_{t2} = \frac{GI_{02}}{l_2} = \frac{G}{l_2}\left(\frac{\pi d_2^4}{32}\right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.15)^4}{(1.0)(32)} = 3{,}976{,}087.5 \text{ N-m/rad}$$

Dado que la longitud de la flecha 2 no es insignificante, se supone que la hélice es un rotor conectado al extremo de la flecha 2. Por lo tanto, el sistema se puede representar como un sistema torsional de dos grados de libertad, como se indica en la figura 5.10(b). Si se establece que $k_3 = 0$, $k_1 = k_{t1}$, $k_2 = k_{t2}$, $m_1 = J_1$ y $m_2 = J_2$ en la ecuación (5.10), las frecuencias naturales del sistema se determinan como

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2}\right\} \pm \left[\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1 J_2}\right\}\right]^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2}\right\} \pm \left[\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2}\right\}^2 - \frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1 J_2}\right]^{1/2} \tag{E.1}$$

Puesto que

$$\frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} = \frac{(98.1750 + 397.6087) \times 10^4}{2 \times 1850} + \frac{397.6087 \times 10^4}{2 \times 8000} = 1588.46$$

y

$$\frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1 J_2} = \frac{(98.1750 \times 10^4)\,(397.6087 \times 10^4)}{(1850)\,(8000)} = 26.3750 \times 10^4$$

La ecuación (E.1) resulta

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = 1588.46 \pm [(1588.46)^2 - 26.3750 \times 10^4]^{1/2} = 1588.46 \pm 1503.1483$$

Por lo tanto

$$\omega_1^2 = 85.3117 \quad \text{o} \quad \omega_1 = 9.2364 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2^2 = 3091.6083 \quad \text{o} \quad \omega_2 = 55.6022 \text{ rad/s}$$

Para las formas de modo, se establece que $k_1 = k_{t1}$, $k_2 = k_{t2}$, $k_3 = 0$, $m_1 = J_1$ y $m_2 = J_2$ en la ecuación (5.11) para obtener

$$r_1 = \frac{-J_1\omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

$$= \frac{-(1850)\,(85.3117) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = 1.2072$$

y

$$r_2 = \frac{-J_1\omega_2^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

$$= \frac{-(1850)\,(3091.6083) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = -0.1916$$

Por lo tanto, las formas de modo se determinan a partir de una ecuación semejante a la ecuación (5.12) como

$$\left\{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right\}^{(1)} = \left\{\frac{1}{r_1}\right\} = \frac{1}{1.2072}$$

y

$$\left\{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right\}^{(2)} = \left\{\frac{1}{r_2}\right\} = \frac{1}{-0.1916}$$

■

5.5 Acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales

Como previamente se mencionó, un sistema de n grados de libertad requiere n coordenadas independientes para describir su configuración. Por lo común, estas coordenadas son cantidades geométricas independientes medidas con respecto a la posición de equilibrio del cuerpo vibratorio. Sin embargo, es posible seleccionar algún otro conjunto de n coordenadas para describir la configuración del sistema. El segundo conjunto puede ser, por ejemplo, diferente del primero en que las coordenadas pueden tener su origen alejado de la posición de equilibrio del cuerpo. Podría haber otros conjuntos de coordenadas para describir la configuración del sistema. Cada uno de estos conjuntos de n coordenadas se conoce como *coordenadas generalizadas*.

Como un ejemplo, considere el torno que se muestra en la figura 5.11(a). Por sencillez, el torno puede ser reemplazado por una viga elástica soportada por columnas elásticas cortas, y tanto el cabezal fijo como el móvil pueden ser reemplazados por dos masas concentradas como se muestra en la figura 5.11(b). El modelado del torno como un sistema de dos grados de libertad se indicó en la sección 5.1. Como se muestra en las figuras 5.12(a) y (b), cualquiera de los siguientes conjuntos de coordenadas se puede utilizar para describir el movimiento de este sistema de dos grados de libertad:

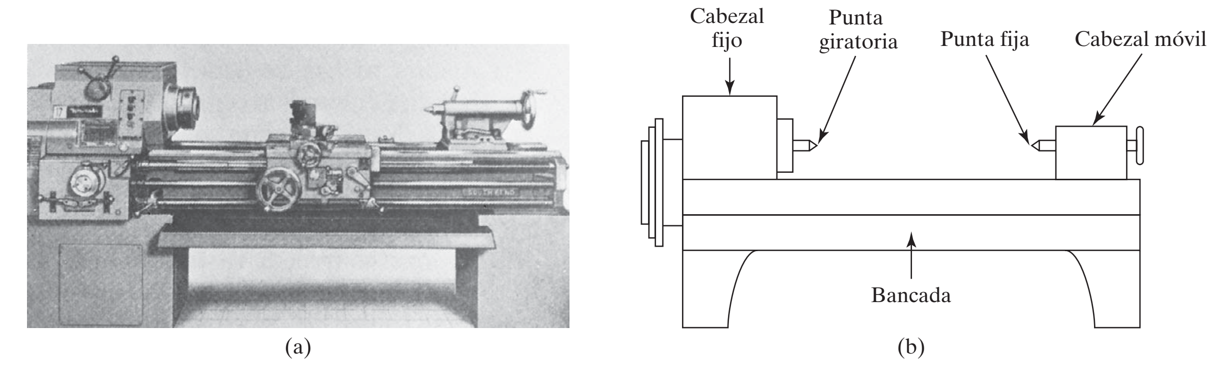


Figura 5.11 Torno. (Fotografía cortesía de South Bend Lathe Corp.).

1. Deflexiones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de los dos extremos del torno AB.
2. Deflexión $x(t)$ del C.G. y rotación $\theta(t)$.
3. Deflexión $x_1(t)$ del extremo A y rotación $\theta(t)$.
4. Deflexión $y(t)$ del punto P localizado a una distancia c a la izquierda del C.G. y rotación $\theta(t)$.

Por lo tanto, cualquier conjunto de coordenadas como (x_1, x_2), (x, θ), (x_1, θ) y (y, θ) representa las coordenadas generalizadas del sistema. Ahora derivaremos las ecuaciones de movimiento del torno por medio de dos conjuntos de coordenadas diferentes para ilustrar el concepto de acoplamiento de coordenadas.

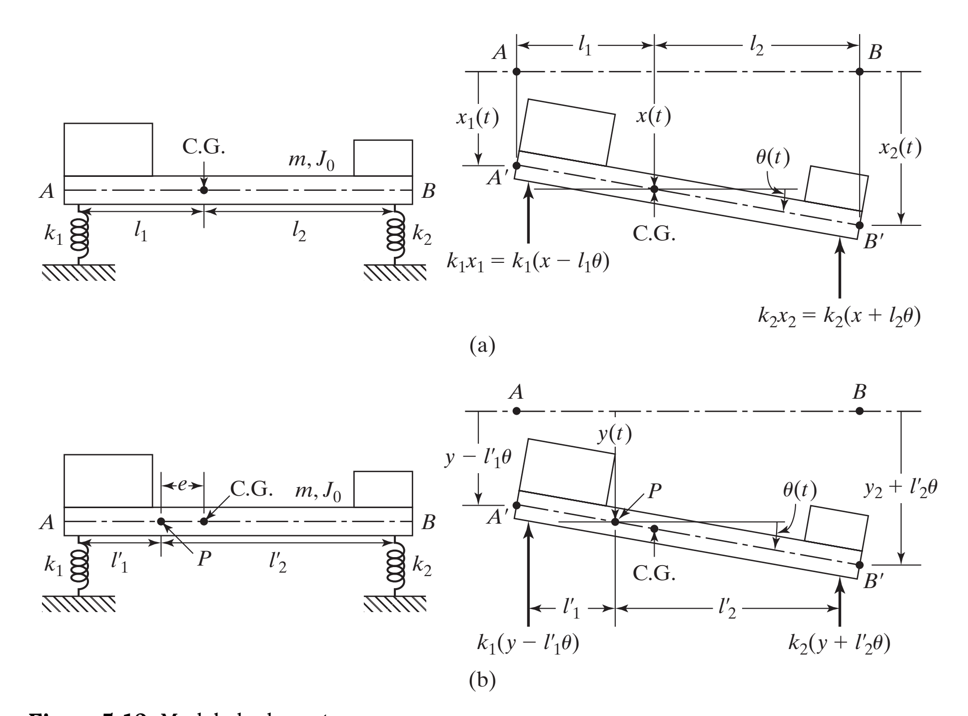


Figura 5.12 Modelado de un torno.

Ecuaciones de movimiento utilizando x(t) y θ(t). De acuerdo con el diagrama que se muestra en la figura 5.12(a), con los valores positivos de las variables de movimiento indicados, la ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección vertical se escribe como

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) \tag{5.21}$$

y la ecuación de momento con respecto al C.G. se expresa como

$$J_0\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 \tag{5.22}$$

Las ecuaciones (5.21) y (5.22) se reordenan y escriben en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

Se ve que cada una de estas ecuaciones contiene x y θ. Si el término de acoplamiento $(k_1l_1 - k_2l_2)$ es igual a cero, es decir, si $k_1l_1 = k_2l_2$, se vuelven independientes entre sí. Si $k_1l_1 \neq k_2l_2$, el movimiento resultante del torno AB es tanto traslacional como rotacional cuando se aplica o un desplazamiento o un par de torsión a través del C.G. del cuerpo como condición inicial. En otras palabras, el torno gira en el plano vertical y también tiene movimiento vertical a menos que $k_1l_1 = k_2l_2$. Esto se conoce como *acoplamiento elástico* o *estático*.

Ecuaciones de movimiento utilizando $y(t)$ y $\theta(t)$. De acuerdo con la figura 5.12(b), donde $y(t)$ y $\theta(t)$ se utilizan como las coordenadas generalizadas del sistema, las ecuaciones de movimiento para traslación y rotación se escriben como

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -k_1(y - l_1'\theta) - k_2(y + l_2'\theta) - me\ddot{\theta} \\ J_p\ddot{\theta} &= k_1(y - l_1'\theta)l_1' - k_2(y + l_2'\theta)l_2' - me\ddot{y} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Estas ecuaciones se reordenan y escriben en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2l_2' - k_1l_1') \\ (-k_1l_1' + k_2l_2') & (k_1l_1'^2 + k_2l_2'^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

Las dos ecuaciones de movimiento representadas por la ecuación (5.25) contienen y y θ, de modo que son ecuaciones acopladas. Contienen términos de acoplamiento tanto estáticos (o elásticos) como dinámicos (o masa). Si $k_1l_1' = k_2l_2'$, el sistema tendrá *acoplamiento dinámico* o de *inercia* únicamente. En este caso, si el torno se sube y baja en la dirección y, la fuerza de inercia $m\ddot{y}$, la cual actúa a través del centro de gravedad del cuerpo, induce un movimiento en la dirección θ, gracias al momento $m\ddot{y}e$. Asimismo, un movimiento en la dirección θ induce un movimiento en el torno en la dirección y debido a la fuerza $me\ddot{\theta}$.

Observe las siguientes características de estos sistemas:

1. En la mayoría de los casos, un sistema viscosamente amortiguado de dos grados de libertad tiene ecuaciones de movimiento en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

   Esta ecuación revela el tipo de acoplamiento actual. Si la matriz de rigidez no es diagonal, el sistema tiene acoplamiento elástico o estático. Si la matriz de amortiguamiento no es diagonal el sistema tiene acoplamiento de amortiguamiento o de velocidad. Finalmente, si la matriz de masa no es diagonal, el sistema tiene acoplamiento de masa o inercial. Tanto el acoplamiento de velocidad como de masa quedan bajo el encabezado de acoplamiento dinámico.
2. El sistema vibra de forma natural independientemente de las coordenadas que se utilicen. La selección de las coordenadas es una mera conveniencia.
3. De acuerdo con las ecuaciones (5.23) y (5.25), está claro que la naturaleza del acoplamiento depende de las coordenadas utilizadas y no es una propiedad inherente del sistema. Es posible seleccionar un sistema de coordenadas $q_1(t)$ y $q_2(t)$ que produzca ecuaciones de movimiento desacopladas tanto estática como dinámicamente. Tales coordenadas se llaman *coordenadas principales* o *naturales*. La ventaja principal de utilizar coordenadas principales es que las ecuaciones de movimiento desacopladas resultantes se pueden resolver independientemente una de la otra.

El siguiente ejemplo ilustra el método de hallar las coordenadas principales en función de las coordenadas geométricas.

Ejemplo 5.6 Coordenadas principales de un sistema de resorte-masa

Determine las coordenadas principales del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 5.6.

Solución

Método: Defina dos soluciones independientes como coordenadas principales y expréselas en función de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

La ecuación (E.10) del ejemplo 5.1 proporciona el movimiento general del sistema que se muestra en la figura 5.6:

$$x_1(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) - B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \tag{E.1}$$

donde $B_1 = X_1^{(1)}$, $B_2 = X_1^{(2)}$, ϕ_1 y ϕ_2 son constantes. Definimos un nuevo sistema de coordenadas $q_1(t)$ y $q_2(t)$ de modo que

$$q_1(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right)$$

$$q_2(t) = B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \tag{E.2}$$

Puesto que $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son funciones armónicas, sus ecuaciones de movimiento correspondientes se escriben como[1]

$$\ddot{q}_1 + \left(\frac{k}{m}\right)q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \left(\frac{3k}{m}\right)q_2 = 0 \tag{E.3}$$

Estas ecuaciones representan un sistema de dos grados de libertad cuyas frecuencias naturales son $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Como no hay ni acoplamiento estático ni acoplamiento dinámico en las ecuaciones de movimiento, $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son coordenadas principales. De acuerdo con las ecuaciones (E.1) y (E.2), podemos escribir

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \tag{E.4}$$

La solución de las ecuaciones (E.4) resulta en las coordenadas principales:

$$q_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)]$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) - x_2(t)] \tag{E.5}$$

■

Ejemplo 5.7 Frecuencias y modos de un automóvil

Determine las frecuencias de cabeceo (movimiento angular) y rebote (movimiento lineal hacia arriba y hacia abajo) y la ubicación de los centros de oscilación (nodos) de un automóvil por los siguientes datos (vea la figura 5.13):

Masa $(m) = 1\,000$ kg
Radio de giro $(r) = 0.9$ m
Distancia entre el eje delantero y el C.G. $(l_1) = 1.0$ m
Distancia entre el eje trasero y el C.G. $(l_2) = 1.5$ m
Rigidez del resorte delantero $(k_f) = 18$ kN/m
Rigidez del resorte trasero $(k_r) = 22$ kN/m

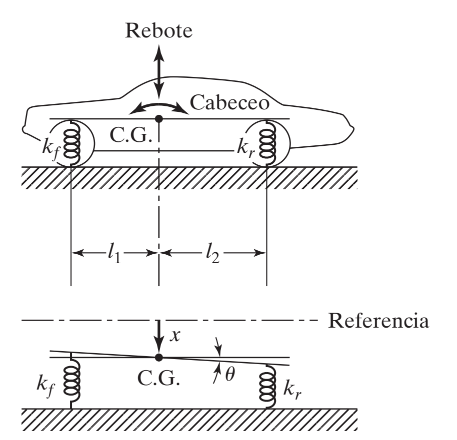


Figura 5.13 Movimientos de cabeceo y rebote de un automóvil.

[1]Observe que $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ proporciona la ecuación de movimiento correspondiente a la solución $q = B\cos(\omega t + \phi)$.

Solución: Si x y θ se utilizan como coordenadas independientes, la ecuación (5.23) proporciona las ecuaciones de movimiento con $k_1 = k_f$, $k_2 = k_r$ y $J_0 = mr^2$. Para la vibración libre suponemos una solución armónica:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \phi), \qquad \theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \phi) \tag{E.1}$$

Aplicando las ecuaciones (E.1) y (5.23), obtenemos

$$\begin{bmatrix} (-m\omega^2 + k_f + k_r) & (-k_f l_1 + k_r l_2) \\ (-k_f l_1 + k_r l_2) & (-J_0\omega^2 + k_f l_1^2 + k_r l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Por los datos conocidos, la ecuación (E.2) se escribe como

$$\begin{bmatrix} (-1000\omega^2 + 40{,}000) & 15{,}000 \\ 15{,}000 & (-810\omega^2 + 67{,}500) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.3}$$

a partir de la cual se puede derivar la ecuación de frecuencia:

$$8.1\omega^4 - 999\omega^2 + 24{,}750 = 0 \tag{E.4}$$

Las frecuencias naturales se pueden encontrar según la ecuación (E.4):

$$\omega_1 = 5.8593 \text{ rad/s}, \qquad \omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s} \tag{E.5}$$

Con estos valores, la relación de amplitudes se puede encontrar utilizando la ecuación (E.3):

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = -2.6461, \qquad \frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = 0.3061 \tag{E.6}$$

Los nodos se localizan observando que la tangente de un ángulo pequeño es aproximadamente igual al ángulo mismo. Por lo tanto, de acuerdo con la figura 5.14, vemos que la distancia entre el C.G. y el nodo es de -2.6461 m para ω_1 y de 0.3061 m para ω_2. Las formas de modo se indican por medio de líneas de rayas en la figura 5.14.

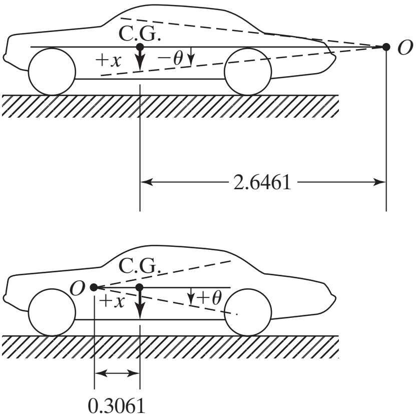


Figura 5.14 Formas de modo de un automóvil. ■

5.6 Análisis de vibración forzada

Las ecuaciones de movimiento de un sistema general de dos grados de libertad sometido a fuerzas externas se escriben como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

Se ve que las ecuaciones (5.1) y (5.2) son casos especiales de la ecuación (5.27), con $m_{11} = m_1$, $m_{22} = m_2$ y $m_{12} = 0$. Consideremos que las fuerzas externas sean armónicas:

$$F_j(t) = F_{j0}e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2 \tag{5.28}$$

donde ω es la frecuencia forzada. Podemos escribir las soluciones de estado estable como

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2 \tag{5.29}$$

donde X_1 y X_2 son, por lo general, cantidades complejas que dependen de ω y los parámetros del sistema. La sustitución de las ecuaciones (5.28) y (5.29) en la ecuación (5.27) conduce a

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega_2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

Como en la sección 3.5, definimos la impedancia mecánica $Z_{sa}(i\omega)$ como

$$Z_{sa}(i\omega) = -\omega^2 m_{sa} + i\omega c_{sa} + k_{sa}, \qquad r, s = 1, 2 \tag{5.31}$$

Y escribimos la ecuación (5.30) como

$$[Z(i\omega)]\vec{X} = \vec{F}_0 \tag{5.32}$$

donde

$$[Z(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} = \text{Matriz de impedancia}$$

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

y

$$\vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

La ecuación (5.32) se puede resolver para obtener

$$\vec{X} = [Z(i\omega)]^{-1}\vec{F}_0 \tag{5.33}$$

donde la inversa de la matriz de impedancia está dada por

$$[Z(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}\begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Las ecuaciones (5.33) y (5.34) conducen a la solución

$$X_1(i\omega) = \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}$$

$$X_2(i\omega) = \frac{-Z_{12}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \tag{5.35}$$

Si sustituimos la ecuación (5.35) en la ecuación (5.29) podemos hallar la solución completa, $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

El análisis de un sistema de dos grados de libertad utilizado como amortiguador de vibración se ha proporcionado en la sección 8.11. La referencia [5.4] se ocupa de la respuesta de impacto de un sistema de dos grados de libertad, mientras que la referencia [5.5] considera la respuesta de estado estable bajo excitación armónica.

Ejemplo 5.8 Respuesta de estado estable de un sistema de resorte-masa

Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 5.15 cuando la masa m_1 es excitada por la fuerza $F_1(t) = F_{10}\cos\omega t$. Además, trace su curva de respuesta de frecuencia.

Solución: Las ecuaciones de movimiento del sistema se pueden expresar como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10}\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

La comparación de la ecuación (E.1) con la ecuación (5.27) muestra que

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0,$$
$$k_{11} = k_{22} = 2k, \quad k_{12} = -k, \quad F_1 = F_{10}\cos\omega t, \quad F_2 = 0$$

Suponemos que la solución es como sigue[2]

$$x_j(t) = X_j\cos\omega t, \qquad j = 1, 2 \tag{E.2}$$

[2]Dado que $F_{10}\cos\omega t = \text{Re}\,(F_{10}\,e^{i\omega t})$, supondremos que la solución también es $x_j = \text{Re}(X_j e^{i\omega t}) = X_j\cos\omega t, j = 1, 2$. Se puede verificar que las X_j sean reales para un sistema no amortiguado.

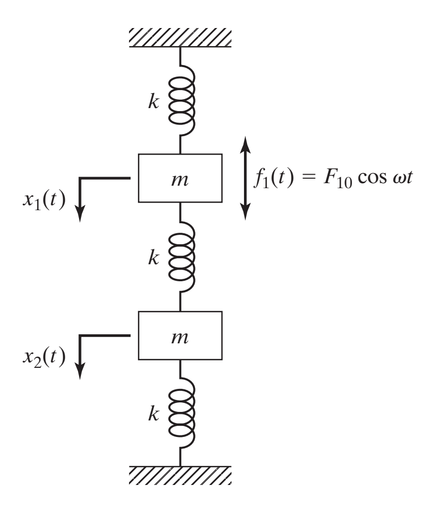


Figura 5.15 Sistema de dos masas sometido a una fuerza armónica.

La ecuación (5.31) resulta

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k, \qquad Z_{12}(\omega) = -k \tag{E.3}$$

Por consiguiente, la ecuación (5.35) proporciona X_1 y X_2:

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)} \tag{E.4}$$

$$X_2(\omega) = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)} \tag{E.5}$$

Definiendo $\omega_1^2 = k/m$ y $\omega_2^2 = 3k/m$, las ecuaciones (E.4) y (E.5) se expresan como

$$X_1(\omega) = \frac{\left\{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\} F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} \tag{E.6}$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} \tag{E.7}$$

Las respuestas X_1 y X_2 se muestran en la figura 5.16 en función de los parámetros ω/ω_1 sin unidades. En este parámetro, ω_1 se seleccionó arbitrariamente; pudimos haber seleccionado ω_2 con la misma facilidad. Se ve que las amplitudes X_1 y X_2 se hacen infinitas cuando $\omega^2 = \omega_1^2$ u $\omega^2 = \omega_2^2$. Por lo tanto, hay dos condiciones de resonancia para el sistema: una en ω_1 y otra en ω_2. En todos los demás valores de ω, las amplitudes

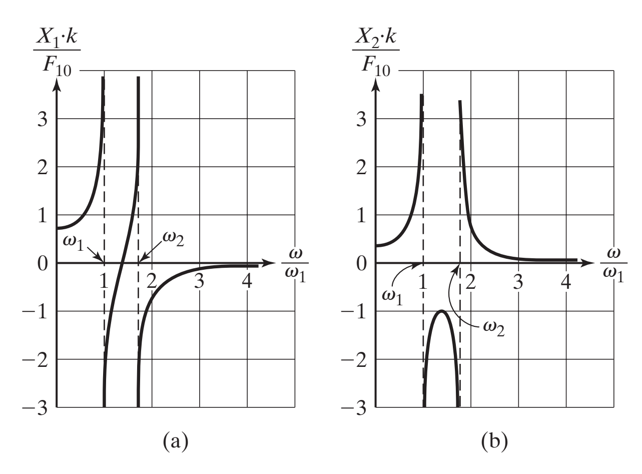


Figura 5.16 Curvas de respuesta de frecuencia del ejemplo 5.8.

de vibración son finitas. En la figura 5.16 se observa que hay un valor particular de la frecuencia ω al cual la vibración de la primera masa m_1, al que se aplicó la fuerza $f_1(t)$, se reduce a cero. Esta característica forma la base del amortiguador de vibración dinámica analizado en el capítulo 8.

■

5.7 Sistemas semidefinidos

Los *sistemas semidefinidos* también se conocen como *sistemas no restringidos* o *degenerados*. En la figura 5.17 se muestran dos ejemplos de tales sistemas. Se puede considerar que la configuración que aparece en la figura 5.17(a) representa dos carros de ferrocarril de masas m_1 y m_2 con un resorte de acoplamiento k. Supongamos que la configuración que aparece en la figura 5.17(c) representa dos rotores de momentos de inercia de masa J_1 y J_2 conectados por una flecha de rigidez torsional k_t.

En un ferrocarril, los carros se pueden modelar como masas concentradas y el acoplamiento entre los carros como resortes. Un tren que rueda por la vía se puede considerar como un sistema que tiene un cuerpo rígido, con movimiento traslacional no restringido. Al mismo tiempo, los carros pueden vibrar uno con respecto del otro. La presencia de un grado de libertad no restringido en

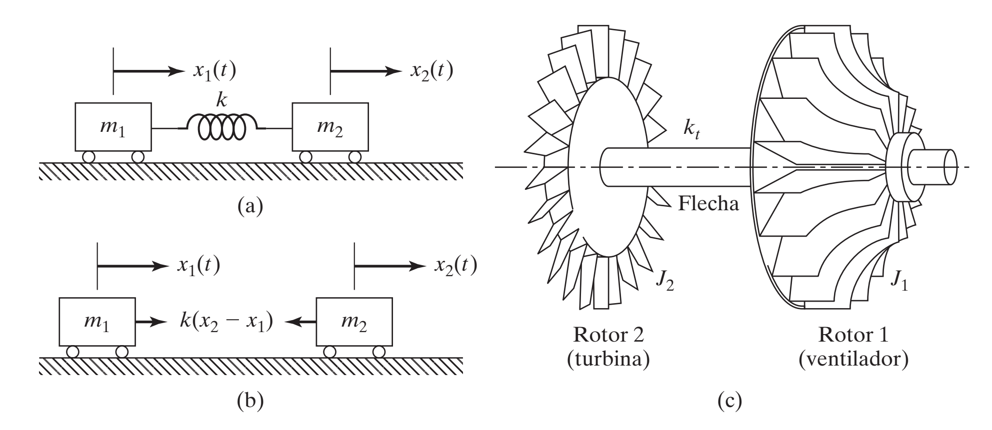


Figura 5.17 Sistemas semidefinidos.

la ecuación de movimiento cambia el análisis. La matriz de rigidez de un sistema no restringido será singular. Una de las frecuencias naturales de un sistema de dos grados de libertad no restringido será cero. Para un sistema como ese, el movimiento se compone de traslación y vibración.

El análisis de sistemas no restringidos se presenta considerando el sistema que se muestra en la figura 5.17(a). La ecuación de movimiento del sistema se escribe como (figura 5.17b):

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \tag{5.36}$$

Para vibración libre, suponemos que el movimiento es armónico:

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \qquad j = 1, 2 \tag{5.37}$$

La sustitución de la ecuación (5.37) en la ecuación (5.36) resulta en

$$(-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0$$
$$-kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 = 0 \tag{5.38}$$

Igualando el determinante de los coeficientes de X_1 y X_2 a cero, obtenemos la ecuación de frecuencia como

$$\omega^2[m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0 \tag{5.39}$$

A partir de la cual se obtienen las frecuencias naturales

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \tag{5.40}$$

Como se estableció antes, la ecuación (5.40) muestra que una de las frecuencias naturales del sistema es cero, lo que significa que el sistema no está oscilando. En otras palabras, el sistema se mueve como un todo sin movimiento relativo entre las dos masas (traslación de cuerpo rígido). Este tipo de sistemas, los cuales tienen una de las frecuencias naturales igual a cero, se llaman *sistemas semidefinidos*. Podemos verificar, sustituyendo ω_2 en la ecuación (5.38), que $X_1^{(2)}$ y $X_2^{(2)}$ están opuestos en fase. Por lo tanto, habría un nodo a la mitad del resorte.

La solución de vibración libre de un sistema no restringido se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.9 Vibración libre de un sistema no restringido

Encuentre la solución de vibración libre del sistema no restringido que se muestra en la figura 5.17(a) para los siguientes datos: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k = 200$ N/m, $x_1(0) = 0.1$ m, y $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Solución: Las frecuencias naturales del sistema se calculan, para los datos conocidos, a partir de la ecuación (5.40) como

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \left\{\frac{200(1 + 2)}{1(2)}\right\}^{\frac{1}{2}} = 17.3205 \text{ rad/S} \tag{E.1}$$

Para calcular las formas de modo, la ecuación (5.38) se escribe en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} (-m_1\omega^2 + k) & -k \\ -k & (-m_2\omega^2 + k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Para $\omega_1 = 0$, con los datos conocidos, la ecuación (E.2) se escribe como,

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.3}$$

La solución de la ecuación (E.3) proporciona el primer modo o vector modal como

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.4}$$

donde a_1 es una constante. Para $\omega_2 = 17.3205$, con los datos conocidos, la ecuación (E.2) se escribe como

$$\begin{bmatrix} -100 & -200 \\ -200 & -400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.5}$$

La solución de la ecuación (E.5) proporciona el segundo modo o vector modal como

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = a_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

donde a_2 es una constante. La solución de vibración en cada modo se expresa como

$$\dot{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1')} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \phi_1 \tag{E.7}$$

$$\overline{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2')} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) = a_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \cos(17.3205t + \phi_2) \tag{E.8}$$

La solución de vibración libre en cualesquiera condiciones iniciales se expresa como una combinación lineal de las formas de modo, como sigue

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = b_1\overline{x}^{(1)}(t) + b_2\overline{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \phi_1 + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \cos(17.3205t + \phi_2) \end{aligned} \tag{E.9}$$

donde b_1, b_2, $c_1 = a_1b_1$ y $c_2 = a_2b_2$ son constantes (desconocidas). Las velocidades de las masas se determinan diferenciando la ecuación (E.9) como

$$\dot{\overline{x}}(t) = -c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} (17.3205) \text{ sen } (17.3205t + \phi_2) \tag{E.10}$$

Utilizando las condiciones iniciales dadas, las ecuaciones (E.9) y (E.10) resultan

$$x_1(0) = c_1 \cos \phi_1 + c_2 \cos \phi_2 = 0.1 \tag{E.11}$$

$$x_2(0) = c_1 \cos \phi_1 + 0.5c_2 \cos \phi_2 = 0 \tag{E.12}$$

$$\dot{x}_1(0) = -17.3205c_2 \text{ sen } \phi_2 = 0 \tag{E.13}$$

$$\dot{x}_2(0) = -8.66025c_2 \text{ sen } \phi_2 = 0 \tag{E.14}$$

La solución de las ecuaciones (E.11) a (E.14) proporciona

$$c_2 = \pm 0.06666, \qquad \phi_2 = 0 \text{ o } \pi, \qquad c_1 \cos \phi_1 = 0.03333 \tag{E.15}$$

Utilizando la ecuación (E.15), la solución de vibración libre dada por la ecuación (E.9) se expresa como

$$x_1(t) = 0.03333 \pm 0.06666 \cos(17.3205t + \phi_2) \tag{E.16}$$

$$x_2(t) = 0.03333 \mp 0.03333 \cos(17.3205t + \phi_2) \tag{E.17}$$

donde se tiene que utilizar más (menos) cuando ϕ_2 se considera como 0 (π) en las ecuaciones (E.16) y (E.17).
Nota: Por las ecuaciones (E.16) y (E.17) se ve que la respuesta de vibración libre (o solución) se compone de un término constante (traslación) y un término armónico (vibración).

■

5.8 Autoexcitación y análisis de estabilidad

En la sección 3.11, las condiciones de estabilidad de un sistema de un solo grado de libertad se expresaron en función de las constantes físicas del sistema. El procedimiento se amplió a un sistema de dos grados de libertad en esta sección. Cuando el sistema se somete a fuerzas de autoexcitación, los términos de fuerza se combinan con los términos de amortiguamiento/rigidez, y las ecuaciones de movimiento resultantes se expresan en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.41}$$

Sustituyendo la solución

$$x_j(t) = X_j e^{est}, \qquad j = 1, 2 \tag{5.42}$$

en la ecuación (5.41) e igualando el determinante de la matriz de coeficientes a cero, obtenemos la ecuación característica de la forma

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \tag{5.43}$$

Los coeficientes a_0, a_1 a_2, a_3 y a_4 son números reales, puesto que resultan de los parámetros físicos del sistema. Si s_1, s_2, s_3 y s_4 indican las raíces de la ecuación (5.43), tenemos

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = 0$$

o

$$s^4 - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)s^3 + (s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_3s_4)s^2 - (s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + s_1s_3s_4 + s_2s_3s_4)s + (s_1s_2s_3s_4) = 0 \quad (5.44)$$

Una comparación de las ecuaciones (5.43) y (5.44) produce

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ a_2 &= s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_3s_4 \\ a_3 &= -(s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + s_1s_3s_4 + s_2s_3s_4) \\ a_4 &= s_1s_2s_3s_4 \end{aligned} \quad (5.45)$$

El criterio para estabilidad es que las partes reales de s_i ($i = 1, 2, 3, 4$) deben ser negativas para que no se incrementen los exponenciales en la ecuación (5.42). Utilizando las propiedades de la ecuación cuártica, se concluye que una condición suficiente y necesaria para estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación (a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4) sean positivos y que la condición

$$a_1a_2a_3 > a_0a_3^2 + a_4a_1^2 \quad (5.46)$$

se satisfaga [5.8, 5.9]. Una técnica más general, la cual se puede utilizar para investigar la estabilidad de un sistema de n grados de libertad, se conoce como criterio de Routh-Hurwitz [5.10]. Para el sistema considerado, ecuación (5.43), el criterio de Routh-Hurwitz manifiesta que el sistema será estable si todos los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_4$ son positivos y los determinantes definidos a continuación son positivos:

$$T_1 = |a_1| > 0 \quad (5.47)$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (5.48)$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0 \quad (5.49)$$

La ecuación (5.47) sólo expresa que el coeficiente a_1 debe ser positivo, en tanto que la satisfacción de la ecuación (5.49), acoplada con la satisfacción de las condiciones $a_3 > 0$ y $a_4 > 0$, implica la satisfacción de la ecuación (5.48). Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema es que todos los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 sean positivos y que se satisfaga la desigualdad establecida en la ecuación (5.46).

5.9 Método de la función de transferencia

Como se expresó en la sección 3.12, la función de transferencia de una ecuación diferencial indica la relación de la transformada de Laplace de la función de respuesta (salida) a la transformada de Laplace de la función forzada (entrada), suponiendo condiciones iniciales cero. Para el sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.5, las ecuaciones de movimiento son las [ecuaciones (5.1) y (5.2)]:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \tag{5.50}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = f_2 \tag{5.51}$$

Considerando las transformadas de Laplace de las ecuaciones (5.50) y (5.51), y suponiendo condiciones iniciales cero, obtenemos

$$\begin{aligned} m_1s^2X_1(s) &+ (c_1 + c_2)sX_1(s) - c_2sX_2(s) \\ &+ (k_1 + k_2)X_1(s) - k_2X_2(s) = F_1(s) \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned} m_2s^2X_2(s) &+ (c_2 + c_3)sX_2(s) - c_2sX_1(s) \\ &+ (k_2 + k_3)X_2(s) - k_2X_1(s) = F_2(s) \end{aligned} \tag{5.53}$$

Las ecuaciones (5.52) y (5.53) se reordenan para obtener

$$[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]X_1(s) - (c_2\, s + k_2)X_2(s) = F_1(s) \tag{5.54}$$

$$[m_2s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3)]X_2(s) - (c_2s + k_2)X_1(s) = F_2(s) \tag{5.55}$$

Las ecuaciones (5.54) y (5.55) indican dos ecuaciones algebraicas lineales simultáneas en $X_1(s)$ y $X_2(s)$. Éstas se pueden resolver con la regla de Cramer [5.11] como

$$X_1(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)} \tag{5.56}$$

$$X_2(s) = \frac{D_2(s)}{D(s)} \tag{5.57}$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \begin{vmatrix} F_1(s) & -(c_2s + k_2) \\ F_2(s) & m_2s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} \\ &= [m_2s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3)]F_1(s) + (c_2s + k_2)F_2(s) \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} D_2(s) &= \begin{vmatrix} m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2) & F_1(s) \\ -(c_2s + k_2) & F_2(s) \end{vmatrix} \\ &= [m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]F_2(s) + (c_2s + k_2)F_1(s) \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{vmatrix} m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2) & -(c_2s + k_2) \\ -(c_2s + k_2) & m_2s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} \\ &= m_1m_2s^4 + [m_2(c_1 + c_2) + m_1(c_2 + c_3)]s^3 \\ &\quad + [m_2(k_1 + k_2) + m_1(k_2 + k_3) + c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1]s^2 \\ &\quad + [(k_1 + k_2)(c_2 + c_3) + c_1k_2 + c_1k_3 - c_2k_2 + c_2k_3]s \\ &\quad + (k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) \end{aligned} \tag{5.60}$$

Notas:

1. El denominador, $D(s)$, en las expresiones $X_1(s)$ y $X_2(s)$ dado por la ecuación 5.60, es un polinomio de cuarto grado en s e indica el polinomio característico del sistema. Debido a que el polinomio característico es de cuarto grado, se dice que el modelo (o sistema) es un modelo (o sistema) de cuarto grado (u orden).
2. Las ecuaciones (5.56) y (5.57) nos permiten aplicar las transformadas inversas de Laplace para obtener las ecuaciones diferenciales de cuarto grado para $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente (problema 5.79).
3. Se pueden utilizar las ecuaciones (5.56) y (5.57) para derivar las funciones de transferencia de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ correspondientes a cualquier función forzada especificada.

5.10 Soluciones obtenidas aplicando la transformada de Laplace

El cálculo de respuestas de sistemas de dos grados de libertad con la transformada de Laplace se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.10 Respuesta de vibración libre de un sistema no amortiguado

Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.5(a) aplicando el método de la transformada de Laplace para los siguientes datos: $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $k_1 = 8$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Suponga que las condiciones iniciales son $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Solución: Por los datos dados, para vibración libre con $f_1(t) = f_2(t) = 0$, las ecuaciones de movimiento del sistema, ecuaciones (5.1) y (5.2), adoptan la forma

$$2\ddot{x}_1 + 12x_1 - 4x_2 = 0 \tag{E.1}$$

$$4\ddot{x}_2 - 4x_1 + 4x_2 = 0 \tag{E.2}$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (E.1) y (E.2), obtenemos

$$2[s^2X_1(s) - sx_1(0) - \dot{x}_1(0)] + 12X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \tag{E.3}$$

$$4[s^2X_2(s) - sx_2(0) - \dot{x}_2(0)] - 4X_1(s) + 4X_2(s) = 0 \tag{E.4}$$

Para las condiciones iniciales conocidas, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, las ecuaciones (E.3) y (E.4) se escriben como

$$(2s^2 + 12)X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \tag{E.5}$$

$$(4s^2 + 4)X_2(s) - 4X_1(s) = 4s \tag{E.6}$$

Si introducimos

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4s & 4s^2 + 4 \end{vmatrix} = 16s \tag{E.7}$$

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 12 & 0 \\ -4 & 4s \end{vmatrix} = 8s^3 + 48s \tag{E.8}$$

$$D(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 12 & -4 \\ -4 & 4s^2 + 4 \end{vmatrix} = 8s^4 + 56s^2 + 32 \tag{E.9}$$

la solución de las ecuaciones (E.5) y (E.6) para $X_1(s)$ y $X_2(s)$, basada en la regla de Cramer, se expresa como

$$X_1(s) = \frac{D_1 s)}{D(s)} = \frac{16s}{8s^4 + 56s^2 + 32} = \frac{2s}{s^4 + 7s^2 + 4} \tag{E.10}$$

$$X_2(s) = \frac{D_2(s)}{D(s)} = \frac{8s^3 + 48s}{8s^4 + 56s^2 + 32} = \frac{s^3 + 6s}{s^4 + 7s^2 + 4} \tag{E.11}$$

En las ecuaciones (E.10) y (E.11) se observa que el denominador es cuadrático en s^2 (cierto para todos los sistemas no amortiguados de dos grados de libertad). Dado que las raíces del denominador, $s^4 + 7s^2 + 4 = 0$, son

$$s^2 = -0.6277 \text{ (o } -0.7923^2\text{)}, -6.3723 \text{ (o } -2.5243^2\text{)} \tag{E.12}$$

$X_1(s)$ y $X_2(s)$ se expresan en forma factorizada como

$$X_1(s) = \frac{2s}{(s^2 + 0.6277)(s^2 + 6.3723)} \tag{E.13}$$

$$X_2(s) = \frac{s^3 + 6s}{(s^2 + 0.6277)(s^2 + 6.3723)} \tag{E.14}$$

Utilizando fracciones parciales, $X_1(s)$ y X_2 (s) se escriben como

$$X_1(s) = \frac{0.7923C_1}{s^2 + 0.6277} + \frac{C_2 s}{s^2 + 0.6277} + \frac{2.5243C_3}{s^2 + 6.3723} + \frac{C_4 s}{s^2 + 6.3723} \tag{E.15}$$

$$X_2(s) = \frac{0.7923C_5}{s^2 + 0.6277} + \frac{C_6 s}{s^2 + 0.6277} + \frac{2.5243C_7}{s^2 + 6.3723} + \frac{C_8 s}{s^2 + 6.3723} \tag{E.16}$$

Para determinar $x_1(t)$, igualamos (E.15) y (E.13) para obtener (de los numeradores)

$$0.7923C_1(s^2 + 6.3723) + C_2 s(s^2 + 6.3723) + 2.5243C_3(s^2 + 0.6277) + C_4 s(s^2 + 0.6277) = 2s$$

o

$$s^3(C_2 + C_4) + s^2(0.7923C_1 + 2.5243C_3) + s(6.3723C_2 + 0.6277C_4)$$
$$+ (5.0488C_1 + 3.4676C_3) = 2s \tag{E.17}$$

Igualando los términos correspondientes en ambos lados de la ecuación (E.17) obtenemos

$$C_2 + C_4 = 0, 0.7923C_1 + 2.5243C_3 = 0, 6.3723C_2 + 0.6277C_4 = 2,$$
$$5.0488C_1 + 1.5845C_3 = 0 \tag{E.18}$$

La solución de las ecuaciones (E.18) resulta en $C_1 = 0$, $C_2 = 0.3481$, $C_3 = 0$, $C_4 = -0.3481$ y por consiguiente $X_1(s)$ de la ecuación (E.15) se escribe como

$$X_1(s) = 0.3481\frac{s}{s^2 + 0.6277} - 0.3481\frac{s}{s^2 + 6.3723} \tag{E.19}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.19) resulta

$$x_1(t) = 0.3481 \cos 0.7923t - 0.3481 \cos 2.5243t \tag{E.20}$$

Para determinar $x_2(t)$, igualamos (E.16) y (E.14) para obtener (de los numeradores)

$$0.7923C_5(s^2 + 6.3723) + C_6s(s^2 + 6.3723)$$
$$+ 2.5243C_7(s^2 + 0.6277) + C_8s(s^2 + 0.6277) = s^3 + 6s$$

o

$$s^3(C_6 + C_8) + s^2(0.7923C_5 + 2.5243C_7) + s(6.3723C_6 + 0.6277C_8)$$
$$+ (5.0488C_5 + 1.5845C_7) = s^3 + 6s \tag{E.21}$$

Si igualamos los términos correspondientes en ambos lados de la ecuación (E.21) obtenemos

$$C_6 + C_8 = 1, 0.7923C_5 + 2.5243C_7 = 0, 6.3723C_6 + 0.6277C_8 = 6,$$
$$5.0488C_5 + 1.5845C_7 = 0 \tag{E.22}$$

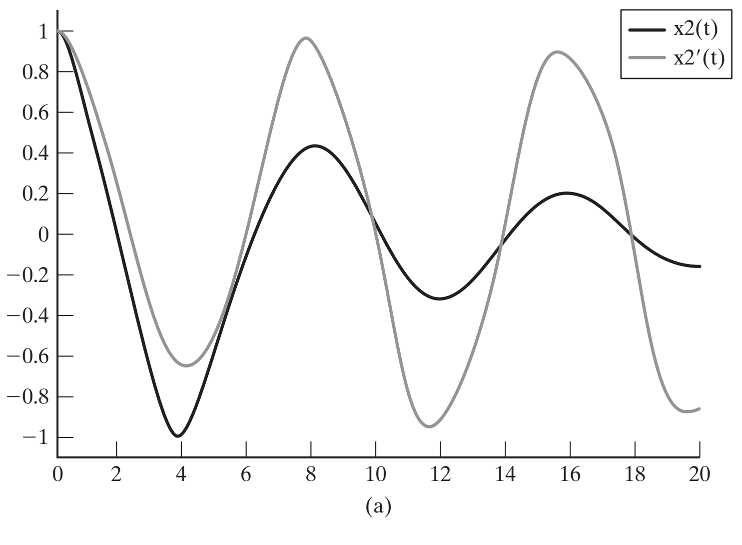
La solución de las ecuaciones (E.22) produce $C_5 = 0$, $C_6 = 0.9352$, $C_7 = 0$, $C_8 = 0.0648$, y por consiguiente $X_2(s)$ de la ecuación (E.16) se expresa como

$$X_2(s) = 0.9352\frac{s}{s^2 + 0.6277} + 0.0648\frac{s}{s^2 + 6.3723} \tag{E.23}$$

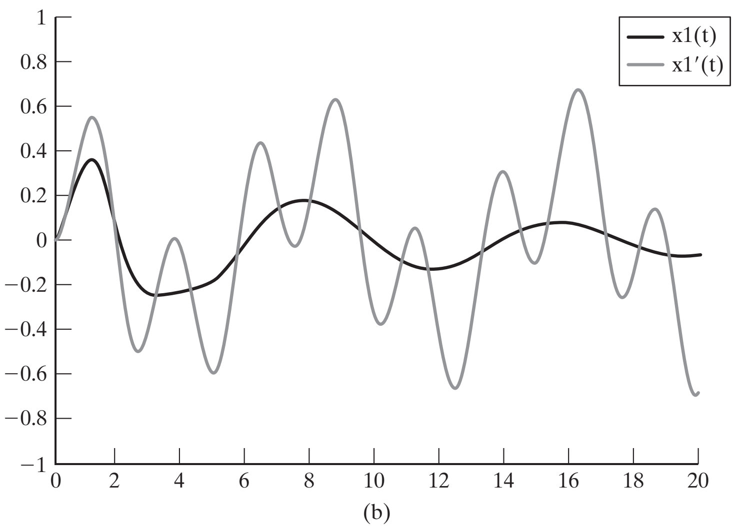
La transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.23) resulta

$$x_2(t) = 0.9352 \cos 0.7923t + 0.0648 \cos 2.5243t \tag{E.24}$$

La respuesta de vibración libre del sistema, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, dada por las ecuaciones (E.20) y (E.24), se muestra gráficamente en la figura 5.18.



(a)



(b)

Figura 5.18

■

Ejemplo 5.11 Respuesta de vibración libre de un sistema amortiguado

Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.5(a) aplicando el método de la transformada de Laplace con los datos siguientes: $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $k_1 = 8$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$.
Considere las condiciones iniciales como $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Solución: Por los datos dados, para vibración libre con $f_1(t) = f_2(t) = 0$, las ecuaciones de movimiento del sistema (5.1) y (5.2), adoptan la forma

$$2\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 12x_1 - 4x_2 = 0 \tag{E.1}$$

$$4\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 4x_1 + 4x_2 = 0 \tag{E.2}$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (E.1) y (E.2), obtenemos

$$2[s^2X_1(s) - sx_1(0) - \dot{x}_1(0)] + 2[sX_1(s) - x_1(0)] - 2[sX_2(s) - x_2(0)] + 12X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \quad \text{(E.3)}$$

$$4[s^2X_2(s) - sx_2(0) - \dot{x}_2(0)] - 2[sX_1(s) - x_1(0)] + 2[sX_2(s) - x_2(0)] - 4X_1(s) + 4X_2(s) = 0 \quad \text{(E.4)}$$

Para las condiciones iniciales conocidas, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, las ecuaciones (E.3) y (E.4) se escriben como

$$(2s^2 + 2s + 12)X_1(s) - (2s + 4)X_2(s) = -2 \quad \text{(E.5)}$$

$$(4s_2 + 2s + 4)X_2(s) - (2s + 4)X_1(s) = 4s + 2 \quad \text{(E.6)}$$

Introduciendo

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} -2 & 2s - 4 \\ 4s + 2 & 4s^2 + 2s + 4 \end{vmatrix} = 16s \quad \text{(E.7)}$$

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 2s + 12 & -2 \\ -2s - 4 & 4s + 2 \end{vmatrix} = 8s^3 + 12s^2 + 48s + 16 \quad \text{(E.8)}$$

$$D(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 2s + 12 & -2s - 4 \\ -2s - 4 & 4s^2 + 2s + 4 \end{vmatrix} = 8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + + 16s + 32 \quad \text{(E.9)}$$

la solución de las ecuaciones (E.5) y (E.6) para $X_1(s)$ y $X_2(s)$, basada en la regla de Cramer, se expresa como

$$X_1(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)} = \frac{16s}{8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + 16s + 32} = \frac{2s}{s^4 + 1.5s^3 + 7s^2 + 2s + 4} \quad \text{(E.10)}$$

$$X_2(s) = \frac{D_2(s)}{D(s)} = \frac{8s^3 + 12s^2 + 48s + 16}{8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + 16s + 32} = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2}{s^4 + 1.5s^3 + 7s^2 + 2s + 4} \quad \text{(E.11)}$$

Por las ecuaciones (E.10) y (E.11) se ve que el denominador no es una cuadrática en s^2 (cierto para todos los sistemas amortiguados de dos grados de libertad). Las raíces del denominador (raíces características del sistema), $s^4 + 15s^3 + 7s^2 + 2s + 4 = 0$, se pueden hallar (por ejemplo, utilizando MATLAB), como

$$s_{1,2} = -0.6567 \pm 2.3807i \equiv a \pm bi$$
$$s_{3,4} = -0.0933 \pm 0.8044i \equiv c \pm di \quad \text{(E.12)}$$

Se ve que las raíces son complejas (cierto para todos los sistemas amortiguados) en lugar de valores simplemente imaginarios (cierto para sistemas no amortiguados). Considerando las raíces características en la ecuación (E.12), $X_1(s)$ de la ecuación (E.10) se expresa como

$$X_1(s) = \frac{2s}{[(s + a)^2 + b^2][(s + c)^2 + d^2]} = \frac{C_1b + C_2(s + a)}{[(s + a)^2 + b^2]} + \frac{C_3d + C_4(s + c)}{[(s + c)^2 + d^2]} \quad \text{(E.13)}$$

donde $a = 0.6567$, $b = 2.3807$, $c = 0.0933$, $d = 0.8044$, y C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, son constantes desconocidas. Escribiendo la expresión del lado derecho de la ecuación (E.13) como

$$\frac{[C_1 b + C_2(s + a)][(s + c)^2 + d^2]}{[(s + a)^2 + b^2]} + \frac{[C_3 d + C_4(s + c)][(s + a)^2 + b^2]}{[(s + c)^2 + d^2]} \tag{E.14}$$

e igualando el numerador de la ecuación (E.14) al numerador de la expresión intermedia de la ecuación (E.13), obtenemos

$$(C_1 b + C_2 s + C_2 a)(s^2 + 2sc + c^2 + d^2) + (C_3 d + C_4 s + C_4 c)(s^2 + 2sa + a^2 + b^2) = 2s$$

o

$$\begin{aligned} s^3(C_2 + C_4) + s^2(2cC_2 + bC_1 + aC_2 + 2aC_4 + dC_3 + cC_4) + s[(c^2 + d^2)C_2 \\ 2c(bC_1 + aC_2) + (a^2 + b^2)C_4 + 2a(dC_3 + cC_4)] + [(bC_1 + aC_2)(c^2 + d^2) \\ + (dC_3 + cC_4)(a^2 + b^2) = 2s \end{aligned} \tag{E.15}$$

Igualando los coeficientes de los términos correspondientes en ambos lados de la ecuación (E.15), obtenemos

$$\begin{aligned} &C_2 + C_4 = 0 \\ &bC_1 + (2\,c + a)C_2 + dC_3 + (2a + c)C_4 = 0 \\ &2cbC_1 + (2ac + c^2 + d^2)C_2 + 2adC_3 + (2ac + 2a^2 + b^2)C_4 = 0 \\ &(bc^2 + bd^2)C_1 + (ac^2 + ad^2)C_2 + (da^2 + db^2)C_3 + (ca^2 + cb^2)C_4 = 0 \end{aligned} \tag{E.16}$$

donde los valores de a, b, c y d se definen en la ecuación (E.12). La solución de las ecuaciones (E.16), por ejemplo, con MATLAB, da $C_1 = -0.0945$, $C_2 = -0.3713$, $C_3 = 0.0196$, $C_4 = 0.3713$. Por lo tanto, $X_1(s)$ en la ecuación (E.13) se expresa como

$$\begin{aligned} X_1(s) = &-0.0945\frac{b}{(s + a)^2 + b^2} - 0.3713\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2} \\ &+ 0.0196\frac{d}{(s + c)^2 + d^2} + 0.3713\frac{s + c}{(s + c)^2 + d^2} \end{aligned} \tag{E.17}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.17), obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) = &\, e^{-0.6567t}(0.0945 \operatorname{sen} 2.3807t - 0.3713 \cos 2.3807t) \\ &+ e^{-0.0933t}(0.0196 \operatorname{sen} 0.8044t + 0.3713 \cos 0.8044t) \end{aligned} \tag{E.18}$$

Asimismo, basada en las raíces características dadas en la ecuación (E.12), $X_2(s)$ de la ecuación (E.11) se expresa como

$$X_2(s) = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2}{[(s + a)^2 + b^2][(s + c)^2 + d^2]} = \frac{C_5 b + C_6(s + a)}{[(s + a)^2 + b^2]} + \frac{C_7 d + C_8(s + c)}{[(s + c)^2 + d^2]} \tag{E.19}$$

donde $a = 0.6567$, $b = 2.3807$, $c = 0.0933$, $d = 0.8044$ y C_i, $i = 5, 6, 7, 8$ son constantes desconocidas. Escribiendo la expresión del lado derecho de la ecuación (E.19) como

$$\frac{[C_5 b + C_6(s+a)][(s+c)^2 + d^2]}{[(s+a)^2 + b^2]} + \frac{[C_7 d + C_8(s+c)][(s+a)^2 + b^2]}{[(s+c)^2 + d^2]} \tag{E.20}$$

e igualando el numerador de la ecuación (E.20) al numerador de la expresión intermedia de la ecuación (E.19), obtenemos

$$(C_5 b + C_6 s + C_6 a)(s^2 + 2sc + c^2 + d^2) + (C_7 d + C_8 s + C_8 c)(s^2 + 2sa + a^2 + b^2)$$
$$= s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2$$

o

$$\begin{aligned} &{}^3(C_6 + C_8 + s^2(2cC_6 + bC_5 + aC_6 + 2aC_8 + dC_7 + cC_8) + s[(c^2 + d^2)C_6 \\ &+ 2c(bC_5 + aC_6) + (a^2 + b^2)C_8 + 2a(dC_7 + cC_8)] + [(bC_5 + aC_6)(c^2 + d^2) \\ &+ dC_7 + cC_8)(a^2 + b^2) = s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2 \end{aligned} \tag{E.21}$$

Igualando los coeficientes de los términos correspondientes en ambos lados de la ecuación (E.21), obtenemos

$$\begin{aligned} &C_6 + C_8 = 1 \\ &bC_5 + (2c + a)C_6 + dC_7 + (2a + c)C_8 = 1.5 \\ &2cbC_5 + (2ac + c^2 + d^2)C_6 + 2adC_7 + (2ac + a^2 + b^2)C_8 = 6 \\ &(bc^2 + bd^2)C_5 + (ac^2 + ad^2)C_6 + (da^2 + db^2)C_7 + (ca^2 + cb^2)C_8 = 2 \end{aligned} \tag{E.22}$$

donde los valores de a, b, c y d se definen en la ecuación (E.12). La solución de las ecuaciones (E.22), por ejemplo, con MATLAB, resulta $C_5 = -0.0418$, $C_6 = 0.0970$, $C_7 = 0.3077$, $C_8 = 0.9030$. Por lo tanto, la ecuación (E.19) se escribe como

$$\begin{aligned} X_2(s) = &- 0.0418\frac{b}{(s+a)^2 + b^2} + 0.0970\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \\ &+ 0.3077\frac{d}{(s+c)^2 + d^2} + 0.9030\frac{s+c}{(s+c)^2 + d^2} \end{aligned} \tag{E.23}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (E.23), obtenemos

$$\begin{aligned} x_2(t) = &\, e^{-0.6567t}(-0.0418 \operatorname{sen} 2.3807t + 0.0970 \cos 2.3807t) \\ &+ e^{-0.0933t}(0.3077 \operatorname{sen} 0.8044t + 0.9030 \cos 0.8044t) \end{aligned} \tag{E.24}$$

La respuesta de vibración libre del sistema, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, dada por las ecuaciones (E.18) y (E.24), se muestra gráficamente en la figura 5.18.

■

Ejemplo 5.12 Respuesta bajo un impulso obtenida aplicando el método de la transformada de Laplace

Dos carros de ferrocarril, de masas $m_1 = M$ y $m_2 = m$, están conectados por medio de un resorte de rigidez k, como se muestra en la figura 5.17(a). Si el carro de masa M se somete a un impulso $F_0\delta(t)$, determine las respuestas de respuesta de los carros aplicando el método de la transformada de Laplace.

Solución: Las respuestas de los carros se determinan con cualquiera de los siguientes métodos:

a. Considere el sistema que experimentará vibración forzada debido a la velocidad inicial producida por el impulso aplicado al carro M.
b. Considere el sistema que experimentará vibración debido a la fuerza $f(t) = F_0\delta(t)$ aplicada al carro M (con los desplazamientos y velocidades de los carros M y m considerados cero inicialmente).

Aplicando el segundo método, las ecuaciones de movimiento de los carros se expresan como

$$M\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F_0\,\delta(t) \tag{E.1}$$

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \tag{E.2}$$

Aplicando las transformadas de Laplace, las ecuaciones (E.1) y (E.2) se escriben como

$$(Ms^2 + k)X_1(s) - kX_2(s) = F_0 \tag{E.3}$$

$$-kX_1(s) + (ms^2 + k)X_2(s) = 0 \tag{E.4}$$

Las ecuaciones (E.3) y (E.4) se resuelven para $X_1(s)$ y $X_2(s)$ como

$$X_1(s) = \frac{F_0(ms^2 + k)}{s^2\{Mms^2 + k(M + m)\}} \tag{E.5}$$

$$X_2(s) = \frac{F_0 k}{s^2\{Mms^2 + k(M + m)\}} \tag{E.6}$$

Utilizando fracciones parciales, las ecuaciones (E.5) y (E.6) se reescriben como

$$X_1(s) = \frac{F_0}{M + m}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{\omega M}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \tag{E.7}$$

$$X_2(s) = \frac{F_0}{M + m}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \tag{E.8}$$

donde

$$\omega^2 = k\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \tag{E.9}$$

Las transformadas inversas de las ecuaciones (E.7) y (E.8), utilizando los resultados del apéndice D (en el sitio web), dan las respuestas en función del tiempo de los carros como

$$x_1(t) = \frac{F_0}{M + m}\left(t + \frac{m}{\omega M}\operatorname{sen}\omega t\right) \tag{E.10}$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{M + m}\left(t - \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right) \tag{E.11}$$

Nota: Las ecuaciones (E.10) y (E.11) se trazan en el ejemplo 5.18.

■

5.11 Soluciones obtenidas utilizando funciones de transferencia de frecuencia

La función de transferencia de frecuencia se obtiene sustituyendo $i\omega$ en lugar de s en la función de transferencia general del sistema. La generación de la función de transferencia de frecuencia y el método de búsqueda de la respuesta de un sistema por medio de esta función se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.13 Derivación de funciones de transferencia de frecuencia

Derive las funciones de transferencia de frecuencia $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para el sistema que se muestra en la figura 5.19(a).

Solución: De acuerdo con los diagramas de cuerpo libre de las masas m_1 y m_2 que se muestran en la figura 5.19(b), las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen como

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = p_1 = P_0 \operatorname{sen}\omega t \tag{E.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = p_2 = 0 \tag{E.2}$$

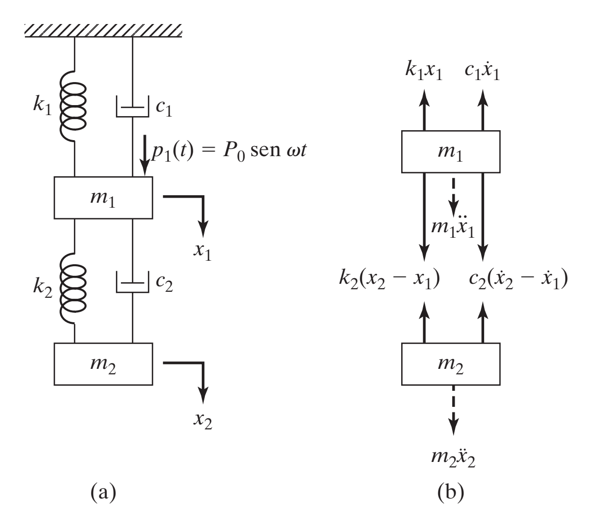


Figura 5.19

Se observa que las ecuaciones (E.1) y (E.2) se pueden obtener a partir de las ecuaciones (5.50) y (5.51) estableciendo $k_3 = c_3 = 0, f_1(t) = p_1(t)$ y $f_2(t) = 0$. Si tomamos las transformadas de Laplace de las ecuaciones (E.1) y (E.2) y suponemos condiciones iniciales cero, obtenemos

$$m_1s^2X_1(s) + c_1sX_1(s) + k_1X_1(s) + c_2s[X_1(s) - X_2(s)] + k_2[X_1(s) - X_2(s)] = P_1(s) \tag{E.3}$$

$$m_2s^2X_2(s) + c_2s[X_2(s) - X_1(s)] + k_2[X_2(s) - X_1(x)] = 0 \tag{E.4}$$

Las expresiones $X_1(s)$ y $X_2(s)$ se pueden encontrar a partir de la solución de las ecuaciones (E.3) y (E.4) [estableciendo $k_3 = c_3 = 0$, $F_1(s) = P_1(s)$, y $F_2(s) = 0$ en las ecuaciones (5.56) a (5.60)]:

$$X_1(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)} \tag{E.5}$$

$$X_2(s) = \frac{D_2(s)}{D(s)} \tag{E.6}$$

donde

$$D_1(s) = (m_2s^2 + c_2s + k_2)P_1(s) \tag{E.7}$$

$$D_2(s) = (c_2s + k_2)P_1(s) \tag{E.8}$$

$$D(s) = (m_1m_2)s^4 + [m_1c_2 + m_2c_1 + m_2c_2]s^3 + [m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2 + c_1c_2]s^2 + [c_1k_2 + c_2k_1]s + (k_1k_2) \tag{E.9}$$

En vista de las ecuaciones (E.7) a (E.9), la función general de transferencia de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se determina a partir de las ecuaciones (E.5) y (E.6) como

$$\frac{X_1(s)}{P_1(s)} = \frac{m_2s^2 + c_2s + k_2}{D(s)} \tag{E.10}$$

$$\frac{X_2(s)}{P_1(s)} = \frac{c_2s + k_2}{D(s)} \tag{E.11}$$

donde la ecuación (E.9) da $D(s)$. Con $s = i\omega$ en las ecuaciones (E.10), (E.11) y (E.9), las funciones de transferencia de frecuencia de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se obtienen como

$$\frac{X_1(i\omega)}{P_1(i\omega)} = \frac{-m_2\omega^2 + i\omega c_2 + k_2}{D(i\omega)} \tag{E.12}$$

$$\frac{X_2(i\omega)}{P_1(i\omega)} = \frac{i\omega c_2 + k_2}{D(i\omega)} \tag{E.13}$$

donde

$$D(i\omega) = \omega^4(m_1m_2)\omega^4 - i\omega^3[m_1\,c_2 + m_2\,c_1 + m_2\,c_2] - \omega^2\,[m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2 + c_1c_2] + i\omega[c_1k_2 + c_2k_1] + (k_1k_2) \tag{E.14}$$

■

Ejemplo 5.14 Respuesta de estado estable de un sistema

Encuentre la respuesta de estado estable del sistema considerado en el ejemplo 5.13 sin amortiguamiento.

Solución: Con $c_1 = c_2 = 0$ en las ecuaciones (E.12) y (E.13) del ejemplo 5.13, obtenemos las funciones de transferencia

$$T_1(i\omega) = \frac{X_1(i\omega)}{P_1(i\omega)} = \frac{k_2 - m_2\omega^2}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\,\omega^2 + k_1 k_2} \tag{E.1}$$

$$T_2(i\omega) = \frac{X_2(i\omega)}{P_1(i\omega)} = \frac{k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2} \tag{E.2}$$

y por consiguiente

$$\frac{X_2(i\omega)}{X_1(i\omega)} = \frac{k_2}{k_2 - m_2\,\omega^2} \tag{E.3}$$

La solución de estado estable $x_1(t)$ se obtiene de la ecuación (E.1) utilizando $P_1(i\omega) = P_0$ sen ωt, como sigue

$$x_1(t) = |X_1(i\omega)| \text{ sen } \omega t = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)P_0}{[m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2]} \text{ sen}(\omega t + \phi_1) \tag{E.4}$$

donde

$$\phi_1 = \frac{X_1(i\,\omega)}{P_1(i\,\omega)} = 0 \text{ o } \pi \tag{E.5}$$

A partir de las ecuaciones (E.3) y (E.4), la solución de estado estable $x_2(t)$ se determina como

$$\begin{aligned} x_2(t) &= |X_2(i\omega)| \text{ sen}(\omega t + \phi_2) = \left|\frac{X_2(i\omega)}{X_1(i\omega)}\right| |X_1(i\omega)| \text{ sen}(\omega t + \phi_2) \\ &= \frac{k_2 \qquad (k_2 - m_2\omega^2)P_0}{(k_2 - m_2\omega^2)[m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2]} \text{ sen}(\omega t + \phi_2) \\ &= \frac{k_2 P_0}{[m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2]} \text{ sen}(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \tag{E.6}$$

donde

$$\phi_2 = \frac{X_2(i\omega)}{P_1(i\omega)} = \frac{X_2(i\omega)}{X_1(i\omega)} \frac{X_1(i\omega)}{P_1(i\omega)} = 0 \text{ o } \pi \tag{E.7}$$

Se ve que ϕ_1 y ϕ_2 son o 0 o π. Por consiguiente, las masas m_1 y m_2 se mueven o en fase ($\phi = 0$) o desfasadas ($\phi = \pi$) con la fuerza aplicada $P_1(i\omega)$. Por lo tanto, las masas m_1 y m_2 se moverán en la misma dirección si

$\omega < \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ y en la dirección opuesta si $\omega > \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$. Si $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, la masa m_1 no se moverá en tanto que la masa m_2 tendrá movimiento senoidal.

■

5.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 5.15 Solución del problema de valor eigen

Utilizando MATLAB determine las frecuencias naturales y formas de modo del siguiente problema:

$$\left[-\omega^2 m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right]\vec{X} = \vec{0} \tag{E.1}$$

Solución: El problema de valor eigen, ecuación (E.1), se reescribe como

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\vec{X} = \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\vec{X} \tag{E.2}$$

donde $\lambda = m\omega^2/k$ es el valor eigen, ω es la frecuencia natural y $\vec{X}$ es el vector eigen o forma de modo. La solución de la ecuación (E.2) se determina utilizando MATLAB como sigue:

```
>> A=[2 -1; -1 2]
A =

     2          -1
    -1           2

>> [V, D] = eig(A)

V =

    -0.7071     -0.7071
     0.7071     -0.7071

D =

     3.0000          0
          0     1.0000
```

Por lo tanto, los valores eigen son $\lambda_1 = 1.0$ y $\lambda_2 = 3.0$, y los vectores eigen correspondientes son

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix}-0.7071\\ -0.7071\end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}_2 = \begin{Bmatrix}-0.7071\\ 0.7071\end{Bmatrix}$$

■

Ejemplo 5.16 Raíces de una ecuación cuártica

Utilizando MATLAB, encuentre las raíces de la ecuación cuártica

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

Solución: Se utiliza el comando MATLAB **roots** para obtener las raíces del polinomio de cuarto grado como

$$x_{1,2} = -1.37091 \pm 1.82709i$$

$$x_{3,4} = 1.37091 \pm 0.648457i$$

```
>> roots ([1 0 0 -8 12])
ans =
  -1.3709 + 1.8271i
  -1.3709 - 1.8271i
   1.3709 + 0.645-i
   1.3709 - 0.645-i
>>
```

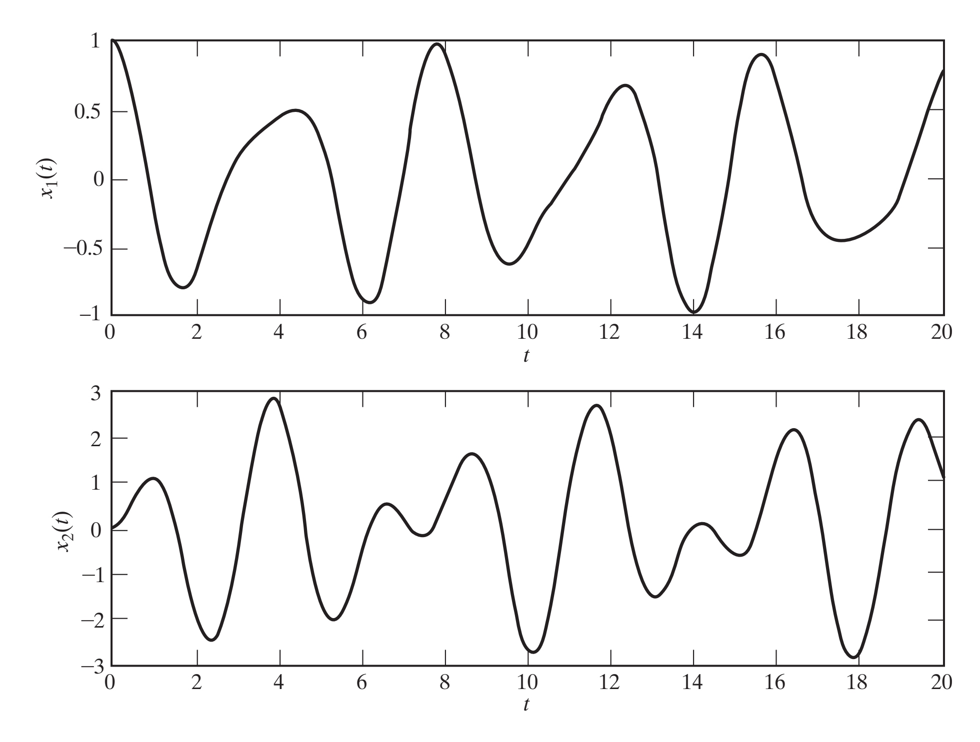
■

Ejemplo 5.17 Trazo de una respuesta de vibración libre

Utilizando MATLAB trace la respuesta de vibración libre de las masas m_1 y m_2 del ejemplo 5.3.

Solución: Las ecuaciones (E.15) y (E.16) proporcionan las respuestas en función del tiempo de las masas m_1 y m_2 del ejemplo 5.3. El programa MATLAB para trazar las respuestas se presenta a continuación.

```
% E-_3.m
for i = 1: 501
    t(i) = 20 * (i-1)/500;
    x1(i) = (5/7) * cos(1.5811*t(i)) + (2/7) * cos(2.4495*t(i));
    x2(i) = (10/7) * cos(1.5811*t(i)) - (10/7) * cos(2.4495*t(i));
end
subplot(211);
plot(t, x1);
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212);
plot(t, x2);
xlabel('t');
ylabel('x2(t)');
```



■

Ejemplo 5.18 Respuesta en función del tiempo de los carros de ferrocarril

Utilizando MATLAB trace las respuestas en función del tiempo de los dos carros de ferrocarril considerados en el ejemplo 5.12 para los datos siguientes: $F_0 = 1\,500$ N, $M = 5\,000$ kg, $m = 2\,500$ kg, $k = 10^4$ N/m.

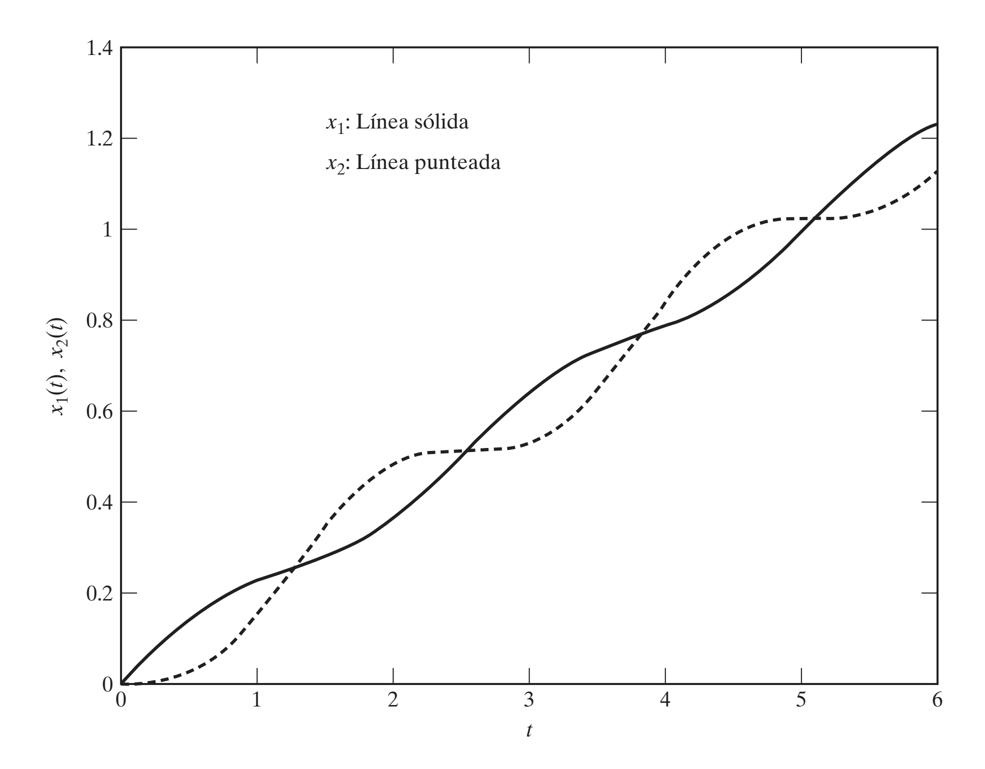
Solución: Con los datos dados, las respuestas de los carros de ferrocarril se expresan como (según las ecuaciones (E.10) y (E.11) del ejemplo 5.12):

$$x_1(t) = 0.2(t + 0.204124 \text{ sen } 2.44949t) \quad \text{(E.1)}$$

$$x_2(t) = 0.2(t - 0.408248 \text{ sen } 2.44949t) \quad \text{(E.2)}$$

donde

$$\omega^2 = 10^4 \; \frac{1}{5000} + \frac{1}{2500} \qquad \text{o} \qquad \omega = 2.44949 \text{ rad/s} \quad \text{(E.3)}$$



El programa MATLAB para trazar las ecuaciones (E.1) y (E.2) se da a continuación

```
% Ex5_18.m
for i=1 : 101
    t(i) = 6* (i - 1) / 100;
    x1(i) = 0.2* (t(i) + 0.204124*sin(2.44949*t(i)));
    x2(i) = 0.2* (t(i) - 0.408248*sin(2.44949*t(i)));
end
plot (t, x1);
xlabel ('t');
ylabel ('x1(t), x2(t)');
hold on;
plot (t, x2, '—');
gtext ('x1: Solid line');
gtext ('x2: Dotted line');
```

■

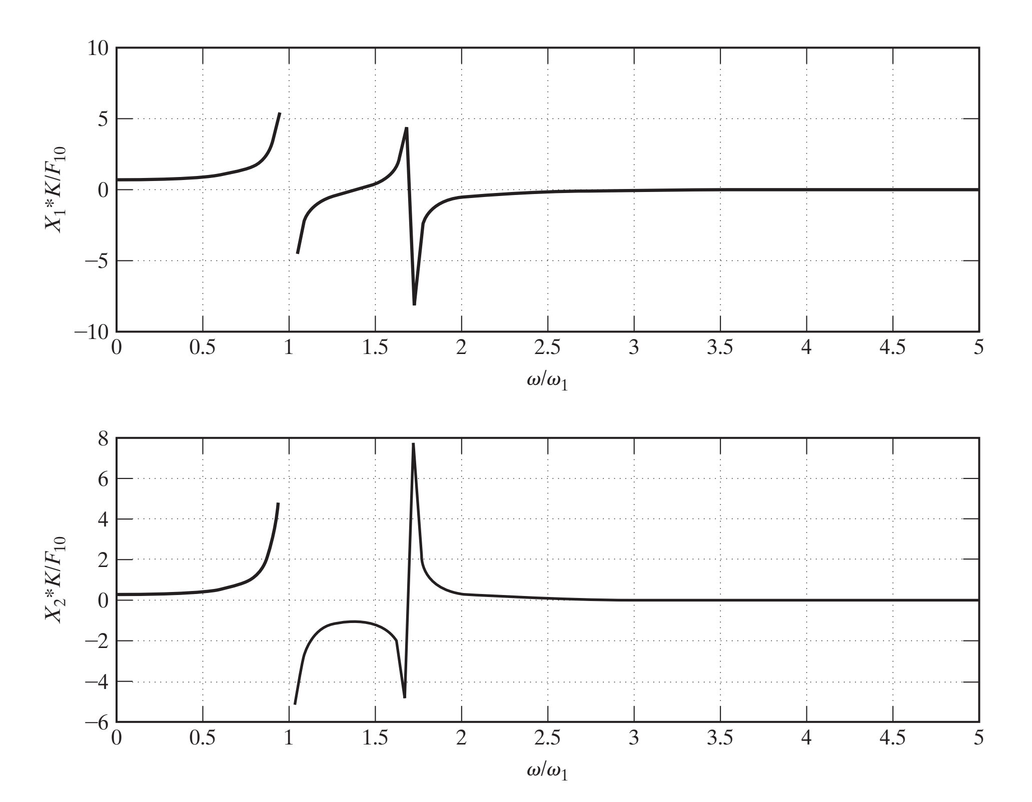
Ejemplo 5.19 Trazo de la respuesta de frecuencia de un sistema de dos grados de libertad

Utilizando MATLAB, trace las funciones de respuesta de frecuencia del sistema considerado en el ejemplo 5.8

Solución: Las funciones de respuesta de frecuencia $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$, dadas por las ecuaciones (E.6) y (E.7) del ejemplo 5.8, son

$$\frac{X_1(\omega)\,k}{F_{10}} = \frac{(2 - \lambda^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \tag{E.1}$$

$$\frac{X_2(\omega)\,k}{F_{10}} = \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \tag{E.2}$$



donde $\lambda = \omega/\omega_1$ y $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1$. De los resultados del ejemplo 5.8 encontramos que $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1 = (3k/m)/(k/m) = 3$. El programa MATLAB para trazar las ecuaciones (E.1) y (E.2) se presenta a continuación.

```
% Ex-514.m
for i = 1: 101
    w_w1 (i) = 5 * (i - 1) / 100; % 0 to 5
    x1 (i) = (2-w_w1 (i) \^2) / ( (3-w_w1 (i) \^2) * (1-w_w1 (i) \^2) );
    x2 (i) = 1 / ( (3-w_w1 (i) \^2) * (1-w_w1 (i) \^2) );
end
subplot (211);
plot (w_w1, x1);
```

```
xlabel ('w/w_1');
ylabel ('X_1*K/F_1_0');
grid on;
subplot (212);
plot (w_w1, x2);
xlabel ('w/w_1');
ylabel ('X_2*K/F_1_0');
grid on
```

■

Ejemplo 5.20 Respuesta forzada de un sistema de dos grados de libertad

Determine y trace la respuesta en función del tiempo de un sistema de dos grados de libertad con ecuaciones de movimiento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos 3t \tag{E.1}$$

con las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 0.2, \qquad \dot{x}_1(0) = 1.0, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{E.2}$$

Solución: Para utilizar el programa MATLAB **`ode23`**, las dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden se tienen que expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. Para esto, introducimos nuevas variables como y_1, y_2, y_3 y y_4 como

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = \dot{x}_1, \qquad y_3 = x_2, \qquad y_4 = \dot{x}_2$$

y expresamos la ecuación (E.1) como

$$\ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 5x_1 - 2x_2 = \cos 3t \tag{E.3}$$

o

$$\dot{y}_2 = \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \tag{E.4}$$

y

$$2\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 2x_1 + 3x_2 = 2 \cos 3t \tag{E.5}$$

o

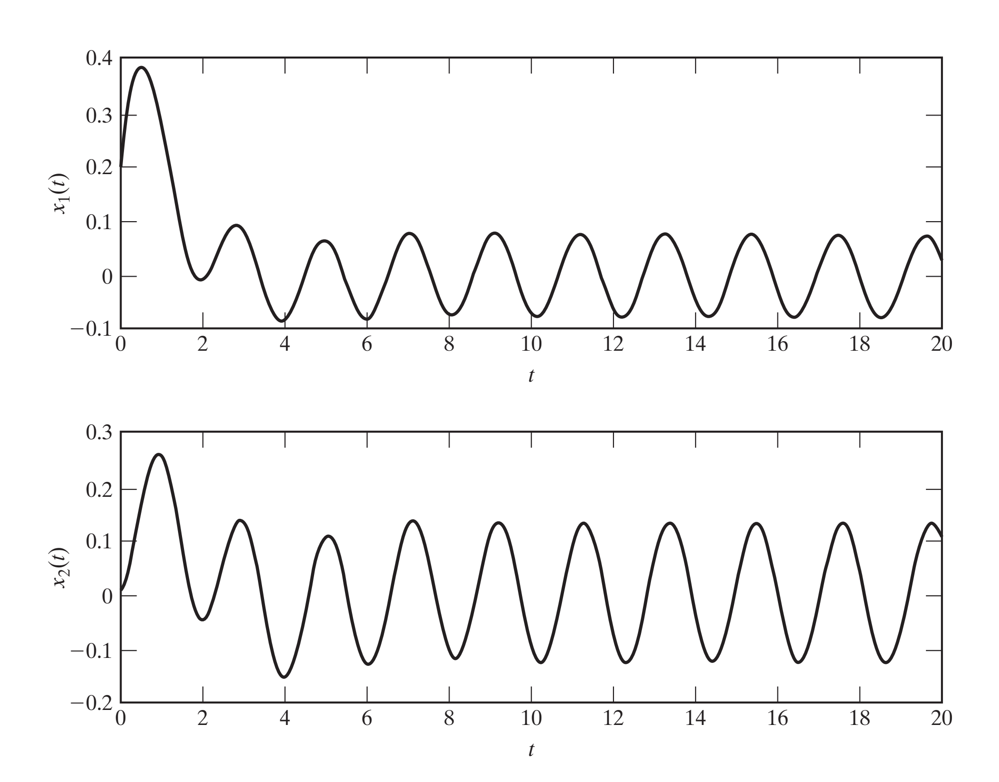
$$\dot{y}_4 = \cos 3t + \frac{1}{2} y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2} y_3 \tag{E.6}$$

Por lo tanto, la ecuación (E.1) se vuelve a expresar como

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \\ y_4 \\ \cos 3t + \frac{1}{2}y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2}y_3 \end{Bmatrix} \tag{E.7}$$

con las condiciones iniciales

$$\vec{y}(0) = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$



El programa MATLAB para resolver las ecuaciones (E.7) con las condiciones iniciales de la ecuación (E.8) se da a continuación.

```
% Ex5_20.m
tspan = [0: 0.01: 20];
y0 = [0.2; 1.0; 0.0; 0.0];
[t,y] = ode23('dfunc5_15', tspan, y0);
subplot (211)
plot (t,y (:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x1 (t)');
subplot (212)
plot (t,y (:, 3));
xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t)');

%dfunc5_15.m
function f = dfunc5_15(t,y)
f = zeros(4, 1);
f(1) = y(2);
f(2) = cos(3*t) - 4*y(2) + y(4) - 5*y(1) + 2*y(3);
f(3) = y(4);
f(4) = cos(3*t) + 0.5*y(2) - y(4) + y(1) - 1.5*y(3);
```

■

Ejemplo 5.21 Programa para determinar las raíces de una ecuación cuártica

Desarrolle un programa general, llamado **Program6.m** para determinar las raíces de una ecuación cuártica. Use el programa para determinar las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

Solución: El programa **Program6.m** se desarrolló para resolver la ecuación a1*(x^4) + a2*(x^3) + a3*(x^2) + a4*x + a5 = 0 con a1, a2, a3, a4, y a5 como datos de entrada. El programa presenta los coeficientes del polinomio y también las raíces de la ecuación como resultados.

```
Solution of a quartic equation

Data:
a(1)      =       1.000000e+000
a(2)      =       0.000000e+000
a(3)      =       0.000000e+000
a(4)      =      -8.000000e+000
a(5)      =       1.200000e+001

 Roots:

 Root No.      Real part       Imaginary part

    1       -1.370907e+000     1.827094e+000
    2       -1.370907e+000    -1.827094e+000
    3        1.370907e+000     6.484572e-001
    4        1.370907e+000    -6.484572e-001
```

■

Resumen del capítulo

Consideramos la determinación de las ecuaciones de movimiento acopladas de sistemas de dos grados de libertad. Determinamos los valores eigen o frecuencias naturales de vibración, los vectores modales y las soluciones de vibración libre. Presentamos los conceptos de acoplamiento de coordenadas, coordenadas generalizadas y coordenadas principales. Estudiamos el análisis de vibración forzada del sistema sometido a una fuerza armónica. Consideramos el método de la función de transferencia, la solución siguiendo el método de la transformada de Laplace y el método de la función de transferencia de frecuencia. Por último, presentamos las soluciones de vibración libre y forzada, de sistemas de dos grados de libertad obtenidas utilizando MATLAB.

Ahora que ya terminó este capítulo, deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación

Referencias

5.1 H. Sato, Y. Kuroda y M. Sagara, “Development of the finite element method for vibration analysis of machine tool structure and its application”, *Proceedings of the Fourteenth International Machine Tool Design and Research Conference*, Macmillan, Londres, 1974, págs. 545-552.

5.2 F. Koenigsberger y J. Tlusty, *Machine Tool Structures,* Pergamon Press, Oxford, 1970.

5.3 C. P. Reddy y S. S. Rao, “Automated optimum design of machine tool structures for static rigidity, natural frequencies and regenerative chatter stability”, *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 100, 1978, págs. 137-146.

5.4 M. S. Hundal, “Effect of damping on impact response of a two degree of freedom system”, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 68, 1980, págs. 407-412.

5.5 J. A. Linnett, “The effect of rotation on the steady-state response of a spring-mass system under harmonic excitation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 35, 1974, págs. 1-11.

5.6 A. Hurwitz, "On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts", en *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover Publications, Nueva York, 1964, págs. 70-82.

5.7 R. C. Dorf, *Modern Control Systems* (6a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

5.8 J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations (*4a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1956.

5.9 R. H. Scanlan y R. Rosenbaum, *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan, Nueva York, 1951.

5.10 L. A. Pipes y L. R. Harvill, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists* (3a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1970.

5.11 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

Preguntas de repaso

5.1 Proporcione respuestas breves a lo siguiente:

1. ¿Cómo se determinan los grados de libertad de un sistema de masa concentrada?
2. Defina estos términos: *acoplamiento de masa*: *acoplamiento de velocidad*, *acoplamiento elástico*.
3. ¿Es la naturaleza del acoplamiento dependiente de las coordenadas utilizadas?
4. ¿Cuántos grados de libertad tiene un avión en vuelo si se trata como (a) un cuerpo rígido, y (b) un cuerpo elástico?
5. ¿Qué son las coordenadas principales? ¿Cómo se utilizan?
6. Por qué las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez son simétricas?
7. ¿Qué es un nodo?
8. ¿Qué queremos decir por acoplamiento estático y dinámico? ¿Cómo se puede eliminar el aco-plamiento de las ecuaciones de movimiento?
9. Defina la matriz de impedancia.
10. ¿Cómo puede hacer que un sistema vibre en uno de sus modos naturales?
11. ¿Qué es un sistema degenerado? Proporcione dos ejemplos de sistemas físicos degenerados.
12. ¿Cuántos modos degenerados puede tener un sistema vibratorio?
13. ¿Cuál es la diferencia entre una función de transferencia general y una función de transferencia de frecuencia?
14. ¿Cuántas frecuencias naturales pueden ser cero para un sistema de dos grados de libertad no restringido?

5.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Los modos normales también se conocen como modos principales.
2. Las coordenadas generalizadas son linealmente dependientes.
3. Las coordenadas principales se pueden considerar como coordenadas generalizadas.
4. La vibración de un sistema depende del sistema de coordenadas.
5. La naturaleza del acoplamiento depende del sistema de coordenadas.
6. Las coordenadas principales evitan tanto el acoplamiento estático como el dinámico.
7. El uso de coordenadas principales ayuda a determinar la respuesta del sistema.
8. Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de un sistema de dos grados de libertad son simétricas.
9. Las características de un sistema de dos grados de libertad se utilizan en el diseño de un amortiguador de vibración dinámica.
10. Los sistemas semidefinidos también se conocen como sistemas degenerados.
11. Un sistema semidefinido no puede tener frecuencias naturales no cero.
12. Las coordenadas generalizadas siempre se miden con respecto a la posición de equilibrio del cuerpo.

13. Durante la vibración libre, los diferentes grados de libertad oscilan con ángulos de fase diferentes.
14. Durante la vibración libre, los diferentes grados de libertad oscilan a diferentes frecuencias.
15. Durante la vibración libre, los diferentes grados de libertad oscilan con amplitudes diferentes.
16. Las amplitudes relativas de grados de libertad diferentes en un sistema de dos grados de libertad dependen de la frecuencia natural.
17. Los vectores modales de un sistema indican los modos normales de vibración.
18. El polinomio característico de un sistema amortiguado de dos grados de libertad será cuadrático en s^2.
19. El polinomio característico de un sistema de dos grados de libertad puede ser cuadrático en s^2.
20. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad pueden expresarse en función del desplazamiento de cualquiera de las dos masas.

5.3 Escriba en los siguientes espacios que aparecen en blanco la palabra correcta:

1. La vibración libre de un sistema de dos grados de libertad sometido a una excitación inicial arbitraria se puede determinar superponiendo los dos modos _______ de vibración.
2. El movimiento de un sistema de dos grados de libertad se describe por medio de dos coordenadas _________________.
3. Cuando la frecuencia forzada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema, ocurre un fenómeno conocido como ________.
4. Las amplitudes y ángulos de fase se determinan a partir de las condiciones ________ del sistema.
5. Para un sistema torsional ________ y ________ son análogos a las masas y resortes lineales, respectivamente, de un sistema de masa-resorte.
6. El uso de coordenadas generalizadas conduce a diferentes tipos de _____________________.
7. Un sistema semidefinido tiene al menos un movimiento de cuerpo ___________________.
8. El acoplamiento elástico también se conoce como acoplamiento _____.
9. El acoplamiento inercial también se conoce como acoplamiento ________________.
10. El acoplamiento de amortiguamiento también se conoce como acoplamiento _________________.
11. Las ecuaciones de movimiento de un sistema serán ________ cuando se utilicen coordenadas principales.
12. El criterio de Routh-Hurwitz se puede utilizar para investigar la ________________ de un sistema.
13. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad están desacopladas sólo cuando las masas no están __________________ conectadas.
14. La vibración de un sistema sólo en condiciones iniciales se llama vibración _________.
15. La vibración de un sistema sometido a fuerzas externas se llama vibración ________.
16. El orden de un sistema es el mismo que el orden del polinomio ___________ del sistema.
17. La respuesta de un sistema no restringido se compone de un movimiento de cuerpo rígido y movimiento ________.

5.4 Seleccione la respuesta más adecuada de entre las opciones dadas:

1. Cuando un sistema de dos grados de libertad se somete a una fuerza armónica, el sistema vibra a
   - **a.** la frecuencia de la fuerza aplicada
   - **b.** a una frecuencia natural menor
   - **c.** a una frecuencia natural mayor
2. Los grados de libertad de un sistema vibratorio dependen
   - **a.** de la cantidad de masas
   - **b.** de la cantidad de masas y los grados de libertad de cada masa
   - **c.** de la cantidad de coordenadas utilizada para describir la posición de cada masa
3. Un sistema de dos grados de libertad tiene
   - **a.** un modo normal
   - **b.** dos modos normales
   - **c.** muchos modos normales

4. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad suelen ser

a. acopladas

b. desacopladas

c. lineales

5. La impedancia mecánica $Z_{rs}(i\omega)$ es

a. $[m_{rs}]\ddot{\vec{x}} + [c_{rs}]\dot{\vec{x}} + [k_{rs}]\vec{x}$

b. $\begin{Bmatrix} X_r(i\omega) \\ X_s(i\omega) \end{Bmatrix}$

c. $-\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$

6. La matriz de impedancia, que es $[Z(i\omega)]$, se puede utilizar para determinar la solución como

a. $\vec{X} = [Z(i\omega)]^{-1}\vec{F}_0$

b. $\vec{X} = [Z(i\omega)]\vec{F}_0$

c. $\vec{X} = [Z(i\omega)]\vec{X}_0$

7. La configuración de un sistema que vibra a una de sus frecuencias naturales se llama

a. modo natural **b.** frecuencia natural **c.** solución

8. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad suelen aparecer como

a. ecuaciones algebraicas acopladas

b. ecuaciones diferenciales acopladas

c. ecuaciones desacopladas

5.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. Acoplamiento estático.	**a.** Sólo la matriz de masa es no diagonal
2. Acoplamiento inercial	**b.** Las matrices de masa y amortiguamiento son no diagonales
3. Acoplamiento de velocidad	**c.** Sólo la matriz de rigidez es no diagonal
4. Acoplamiento dinámico	**d.** Sólo la matriz de amortiguamiento es no diagonal

5.6 Correlacione los datos de la columna izquierda con las ecuaciones de frecuencia de la columna derecha para un sistema de dos grados de libertad regido por las ecuaciones de movimiento:

$$J_0\ddot{\theta}_1 - 2k_t\theta_1 - k_t\theta_2 = 0$$
$$2J_0\ddot{\theta}_2 - k_t\theta_1 + k_t\theta_2 = 0$$

1. $J_0 = 1, k_t = 2$	**a.** $32\omega^4 - 20\omega^2 + 1 = 0$
2. $J_0 = 2, k_t = 1$	**b.** $\omega^4 - 5\omega^2 + 2 = 0$
3. $J_0 = 2, k_t = 2$	**c.** $\omega^4 - 10\omega^2 + 8 = 0$
4. $J_0 = 1, k_t = 4$	**d.** $8\omega^4 - 10\omega^2 + 1 = 0$
5. $J_0 = 4, k_t = 1$	**e.** $2\omega^4 - 5\omega^2 + 1 = 0$

Problemas

Sección 5.2 Ecuaciones de movimiento para vibración forzada

5.1 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 5.20.

5.2 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 5.21.

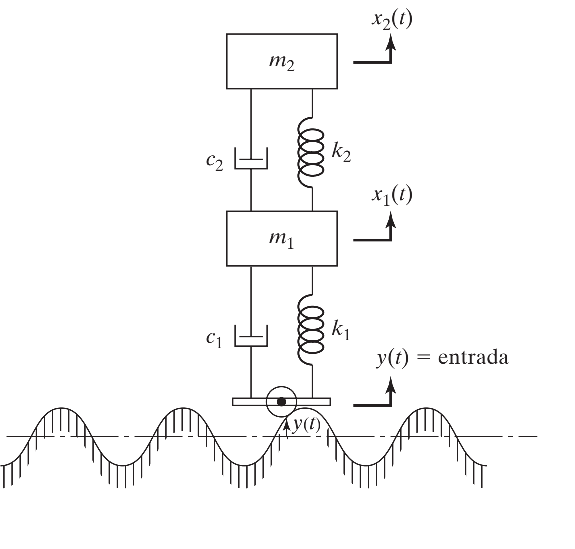


Figura 5.20

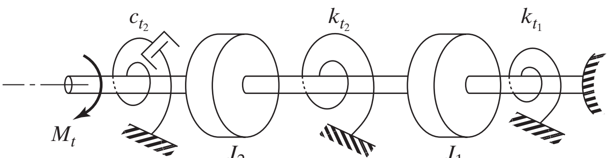


Figura 5.21

5.3 Dos masas m_1 y m_2, cada una enlazada por dos resortes de rigidez k, están conectadas por una barra horizontal rígida sin masa de longitud l como se muestra en la figura 5.22. (a) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema en función del desplazamiento vertical del C.G. del sistema, $x(t)$, y la rotación alrededor del C.G. del sistema, $\theta(t)$. (b) Halle las frecuencias naturales de vibración del sistema para $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 200$ kg y $k = 1\,000$ N/m.

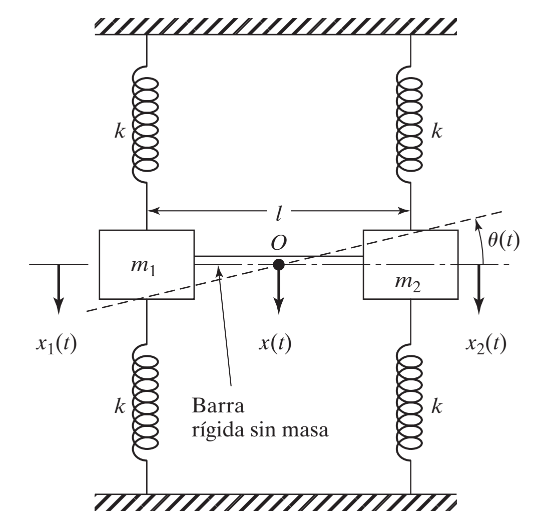


Figura 5.22

5.4 Un sistema de dos masas se compone de un pistón de masa m_1, conectado por dos resortes elásticos, que se mueven dentro de un tubo como se muestra en la figura 5.23. Un péndulo de longitud l y masa m_2 en el extremo se conecta al pistón como se muestra en la figura 5.23. (a) Derive las ecuaciones de

movimiento del sistema en función de $x_1(t)$ y $\theta(t)$. (b) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema en función de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. (c) Encuentre las frecuencias naturales de vibración del sistema.

Sección 5.3 Análisis de vibración libre de un sistema no amortiguado

5.5 Encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 5.24, con $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $k_1 = k$, y $k_2 = 2k$. Determine la respuesta del sistema cuando $k = 1000$ N/m, $m = 20$ kg, y los valores iniciales de los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 son 1 y $-$ 1, respectivamente.

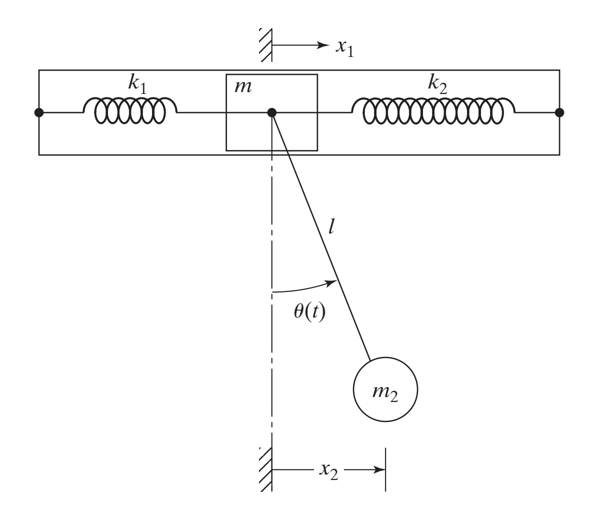


Figura 5.23

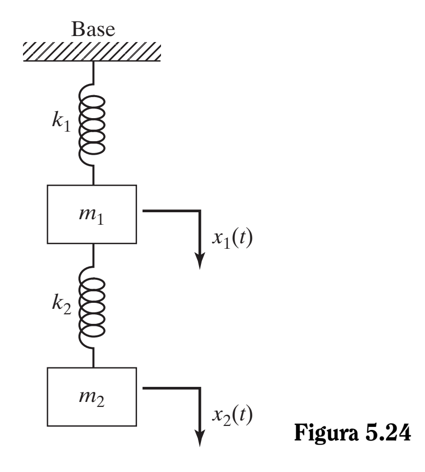


Figura 5.24

5.6 Formule las ecuaciones diferenciales de movimiento para el doble péndulo de la figura 5.25, utilizando coordenadas x_1 y x_2 y suponiendo amplitudes pequeñas. Encuentre las frecuencias naturales, las relaciones de amplitudes y las ubicaciones de los nodos para los dos modos de vibración cuando $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$.

5.7 Determine los modos naturales del sistema que se muestra en la figura 5.26 cuando $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

5.8 Una máquina herramienta de masa $m = 1000$ kg y momento de inercia de masa $J_0 = 300$ kg-m^2 está montada sobre dos soportes elásticos, como se muestra en la figura 5.27. Si las rigideces de los soportes las proporcionan $k_1 = 3000$ N/mm y $k_2 = 2000$ N/mm, y los soportes están localizados en $l_1 = 0.5$ m y $l_2 = 0.8$ m, encuentre las frecuencias naturales y formas de modo de la máquina herramienta.

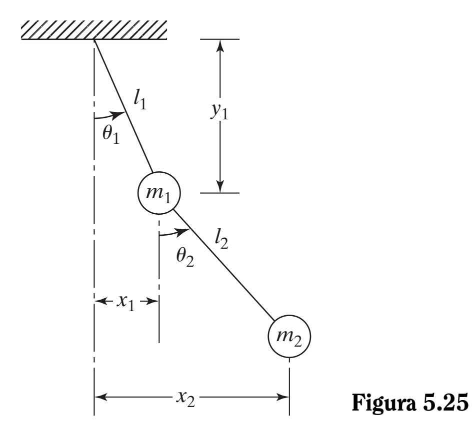


Figura 5.25

Figura 5.26

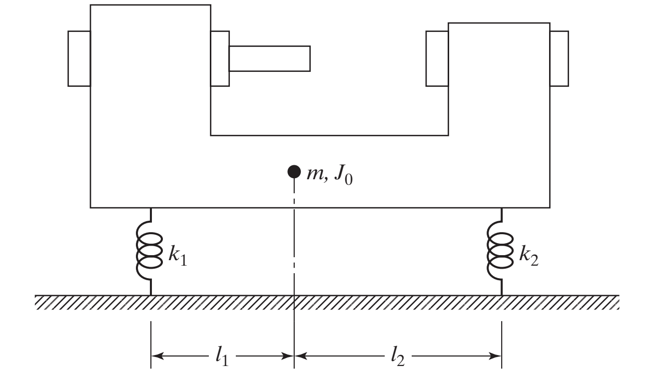


Figura 5.27

5.9 En la figura 5.28 se muestra una grúa viajera eléctrica elevada, compuesta de una viga, una carretilla y un cable. La viga tiene una rigidez flexional (EI) de 6×10^{12} lb-pulg^2 y un claro (L) de 30 pies. El cable es de acero y su longitud (l) es de 20 pies. Los pesos de la carretilla y la carga levantada son de 8 000 lb y 2 000 lb, respectivamente. Encuentre el área de sección transversal del cable de modo que la frecuencia natural fundamental sea mayor que 20 Hz.

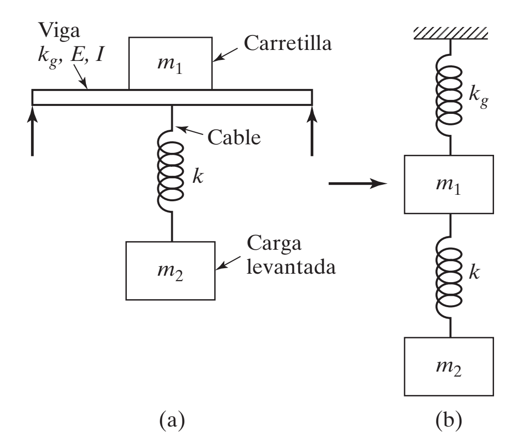


Figura 5.28

5.10 Una grúa viajera elevada se modela como se indica en la figura 5.28. Suponiendo que la viga tiene un claro de 40 m, un momento de inercia de área (I) de 0.02 m^4, y un módulo de elasticidad (E) de 2.06×10^{11} N/m^2, la carretilla tiene una masa (m_1) de 1000 kg, la masa de la carga que se va a levantar (m_2) es de 5 000 kg y el cable con el cual se levanta la masa (m_2) tiene una rigidez (k) de 3.0×10^5 N/m, determine las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema.

5.11 La máquina para taladrar que se muestra en la figura 5.29(a) se puede modelar como un sistema de dos grados de libertad como se indica en la figura 5.29(b). Dado que una fuerza transversal aplicada a la masa m_1 o masa m_2 hace que ambas masas se deformen, el sistema presenta acoplamiento elástico. Las rigideces a flexión de las columnas están dadas (consulte la sección 6.4 para la definición de coeficientes de influencia de rigidez) por

$$k_{11} = \frac{768}{7}\frac{EI}{l^3}, \qquad k_{12} = k_{21} = -\frac{240}{7}\frac{EI}{l^3}, \qquad k_{22} = \frac{96}{7}\frac{EI}{l^3}$$

Determine las frecuencias naturales de la máquina para taladrar.

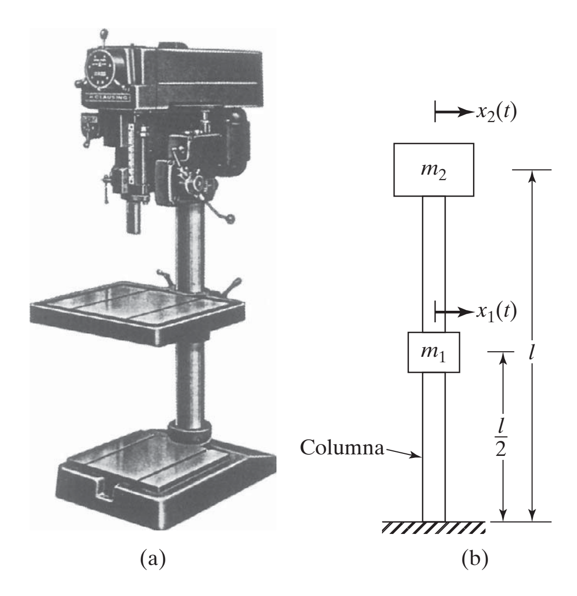


Figura 5.29 (Fotografía cortesía de la división Atlas-Clausing).

5.12 En la figura 5.30 se muestran una de las ruedas y las muelles de un automóvil que viaja por una carretera con baches. Para simplificar, se supone que todas las ruedas son idénticas y que el sistema puede idealizarse como se muestra en la figura 5.31. El automóvil tiene una masa $m_1 = 1000$ kg y las muelles tienen una rigidez total de $k_1 = 400$ kN/m. Las ruedas y los ejes tienen una masa de $m_2 = 300$ kg y las llantas tienen una rigidez de $k_2 = 500$ kN/m. Si la superficie de la carretera varía senoidalmente con una amplitud de $Y = 0.1$ m y un periodo de $l = 6$ m, encuentre las velocidades críticas del automóvil.

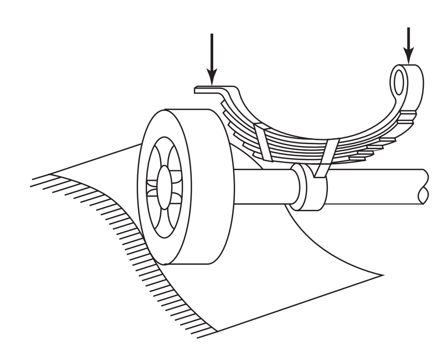


Figura 5.30

5.13 Derive la ecuación de movimiento del péndulo doble de la figura 5.25 utilizando las coordenadas θ_1 y θ_2. Halle también las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema para $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$.

5.14 Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema de la figura 5.24 para $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.

5.15 Los modos normales de un sistema de dos grados de libertad son ortogonales si $X^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(2)} = 0$. Demuestre que las formas de modo del sistema que se muestra en la figura 5.5(a) son ortogonales.

5.16 Encuentre las frecuencias naturales del sistema de la figura 5.6 para $k_1 = 300$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $k_3 = 200$ N/m, $m_1 = 2$kg, y $m_2 = 1$ kg.

5.17 Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema que se muestra en la figura 5.24 para $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = 2000$ N/m y $k_2 = 6000$ N/m.

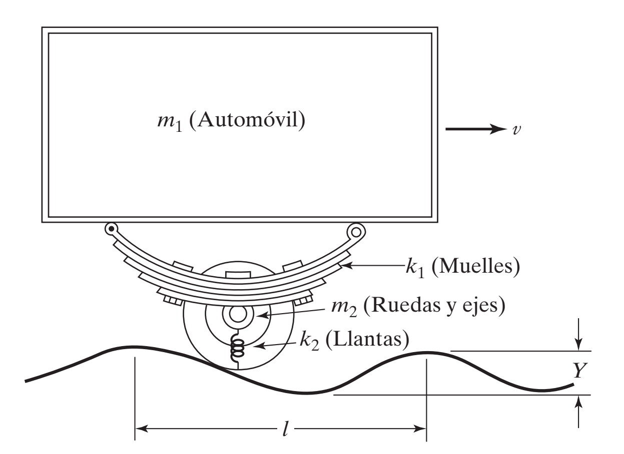


Figura 5.31

5.18 Derive expresiones para los desplazamientos de las masas que aparecen en la figura 5.6 cuando $m_i =$ 25 lb-s²/pulg, $i = 1, 2$, y $k_i = 50\,000$ lb/pulg, $i = 1, 2, 3$.

5.19 Para el sistema que se muestra en la figura 5.6, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 2000$ N/m, $k_2 = 1000$ N/m, $k_3 = 3000$ N/m, y a la masa m_1 se le imparte una velocidad inicial de 20 m/s. Encuentre el movimiento resultante de las dos masas.

5.20 Para el problema 5.17, calcule $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para las siguientes condiciones iniciales:

a. $x_1(0) = 0.2, \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$
b. $x_1(0) = 0.2, \dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 5.0.$

5.21 La estructura de un edificio de dos pisos se modela como se muestra en la figura 5.32. Se supone que las vigas son rígidas y que las columnas tienen rigideces flexionales EI_1 y EI_2 con masas insignificantes. La rigidez de cada columna se calcula como

$$\frac{24EI_i}{h_i^3}, \qquad i = 1, 2$$

Para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, y $EI_1 = EI_2 = EI$, determine las frecuencias naturales y formas de modo de la estructura.

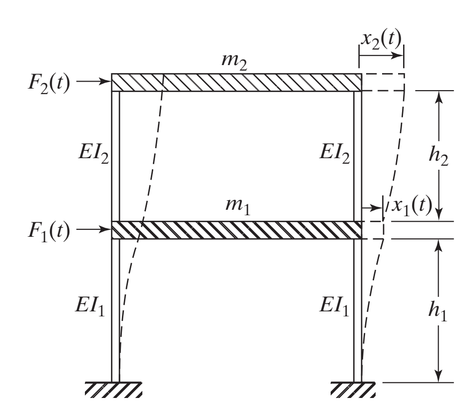


Figura 5.32

5.22 La figura 5.33 muestra un sistema de dos masas sujetas a una cuerda firmemente estirada, fija por ambos extremos. Determine las frecuencias naturales y formas de modo del sistema para $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

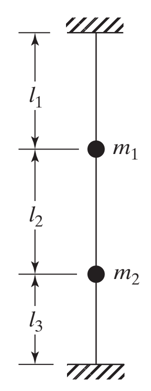


Figura 5.33

5.23 Encuentre los modos normales del edificio de dos pisos que se muestra en la figura 5.32 cuando $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $k_1 = 3k$, y $k_2 = k$, donde k_1 y k_2 representan las rigideces equivalentes de las columnas superior e inferior, respectivamente.

5.24 Un polipasto, que tiene un peso W_1, está montado en el extremo de una viga de acero en voladizo de espesor t, ancho a y longitud b, como se muestra en la figura 5.34. El cable es de acero y tiene un diámetro d y una longitud suspendida de l. Si la carga que pende del extremo del cable es W_2, derive las expresiones para las frecuencias naturales del sistema.

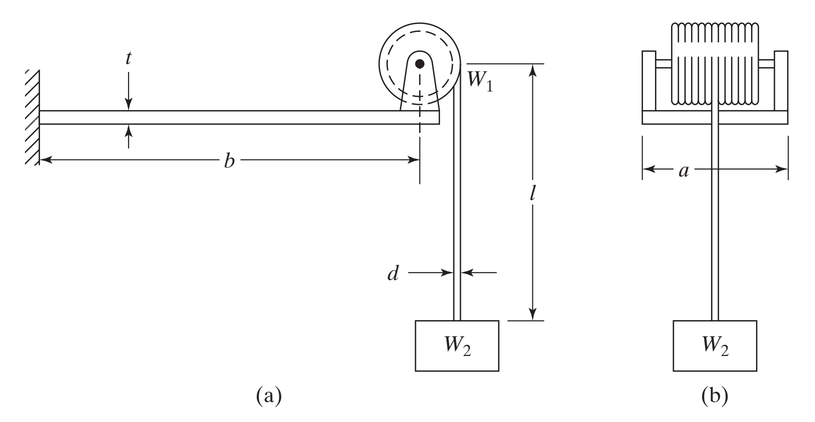


Figura 5.34

5.25. Determine las condiciones iniciales del sistema que se muestra en la figura 5.24 por las cuales el sistema vibra sólo a su frecuencia natural más baja para los datos siguientes: $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$.

5.26 Al principio, el sistema que se muestra en la figura 5.24 se altera al mantener estacionaria la masa m_1 y desplaza 0.1 m hacia abajo a la masa m_2. Analice la naturaleza del movimiento resultante del sistema.

5.27 Diseñe la viga en voladizo que soporta el polipasto y el cable que soporta la carga en el problema 5.24 para tener las frecuencias naturales del sistema mayores de 10 Hz cuando $W_1 = 1\,000$ lb y $W_2 = 500$ lb, $b = 30$ pulg y $l = 60$ pulg.

5.28 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.6 con $n = 1$, $k = 8$, y $m = 2$ para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, y $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ y $\dot{x}_2(0) = 1$.

5.29 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.6 con $n = 1$, $k = 8$ y $m = 2$ en las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

5.30 Utilizando los resultados del ejemplo 5.1, compruebe que las formas de modo satisfacen las siguientes relaciones conocidas como relaciones de ortogonalidad:

$$\vec{X}^{(1)^T}\vec{X}^{(2)} = 0, \qquad \vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(2)} = 0, \qquad \vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} = c_1 = \text{constante}$$

$$\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} = c_2 = \text{constante}$$

$$\vec{X}^{(1)^T}[k]\vec{X}^{(1)} = c_1\omega_1^2, \qquad \vec{X}^{(2)^T}[k]\vec{X}^{(2)} = c_2\omega_2^2$$

5.31 Dos péndulos idénticos, cada uno con masa m y longitud l, están conectados por un resorte de rigidez k a una distancia d del extremo fijo, como se muestra en la figura 5.35.

a. Derive las ecuaciones de movimiento de las dos masas.
b. Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema.
c. Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema en las condiciones iniciales $\theta_1(0) = a$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$ y $\dot{\theta}_2(0) = 0$.
d. Determine las condiciones (s) en las cuales el sistema presenta un fenómeno de pulsación.

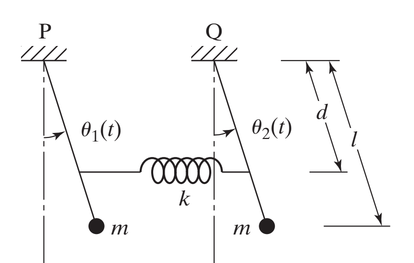


Figura 5.35

5.32 El sistema motor-bomba de la figura 5.36(a) se modela como una barra rígida de *masa* $m = 50$ kg y momento de inercia de masa $J_0 = 100$ kg-m^2. La cimentación del sistema puede ser reemplazada por dos resortes de rigidez $k_1 = 500$ N/m y $k_2 = 200$ N/m. Determine la frecuencia natural del sistema.

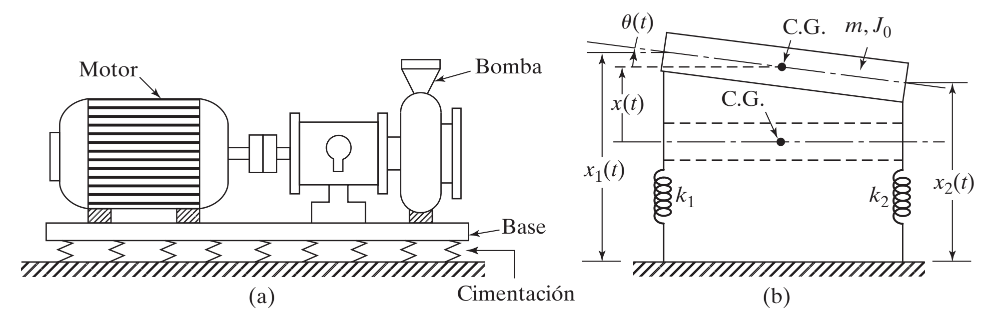


Figura 5.36 Sistema de motor-bomba sobre resortes.

5.33 En la figura 5.37 se muestra un avión estacionado en la pista de aterrizaje. El avión tiene una masa $m = 20000$ kg y un momento de inercia de masa $J_0 = 50 \times 10^6$ kg-m^2. Si los valores de rigidez y constante de amortiguamiento son $k_1 = 10$ kN/m y $c_1 = 2$ kN-s/m para el tren de aterrizaje principal y $k_2 = 5$ kN/m y $c_2 = 5$ kN-s/m para el tren de aterrizaje de nariz o delantero (a) derive las ecuaciones de movimiento del avión, y (b) encuentre las frecuencias naturales no amortiguadas del sistema.

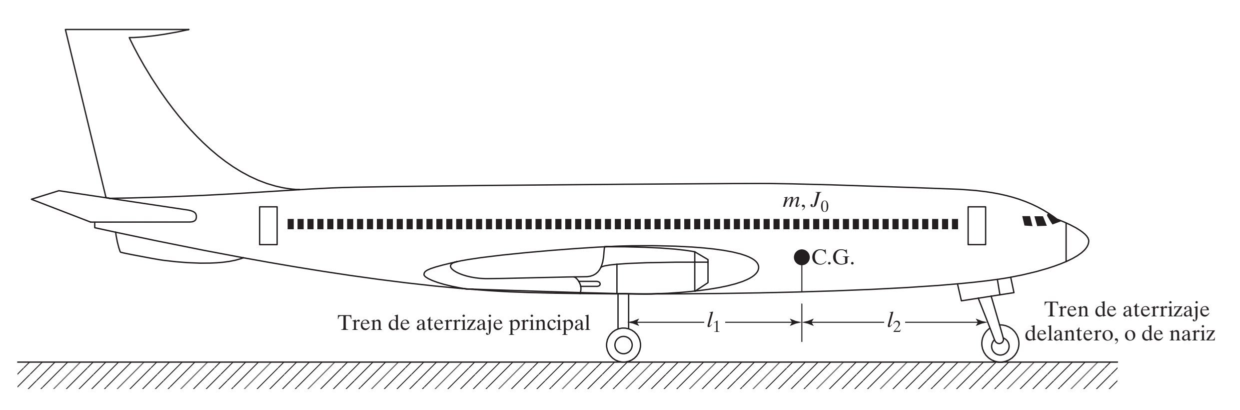


Figura 5.37

5.34 Las matrices de masa y rigidez, y las formas de modo de un sistema de dos grados de libertad están dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [k] = \begin{bmatrix} 12 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}, \qquad \overline{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 9.1109 \end{Bmatrix}, \qquad \overline{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -9.1109 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Si la primera frecuencia natural la proporciona $\omega_1 = 1.7000$, determine los coeficientes de rigidez k_{12} y k_{22} y la segunda frecuencia natural de vibración, ω_2.

5.35 Las matrices de masa y rigidez y las formas de modo de un sistema de dos grados de libertad son

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \qquad [k] = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \overline{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \overline{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Si la primera frecuencia natural la proporciona $\omega_1 = 1.4142$, determine las masas m_1 y m_2 y la segunda frecuencia natural del sistema.

Sección 5.4 Sistema torsional

5.36 Determine las frecuencias naturales y los modos normales del sistema torsional que se muestra en la figura 5.38 para $k_{t2} = 2k_{t1}$ y $J_2 = 2J_1$.

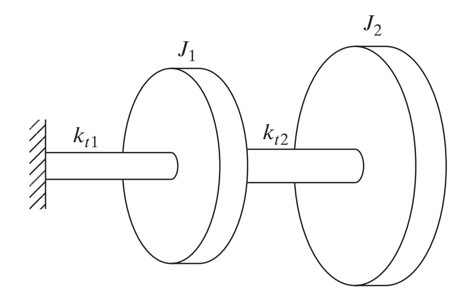


Figura 5.38

5.37 Determine las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 5.39 suponiendo que la cuerda que pasa sobre el cilindro no se resbala.

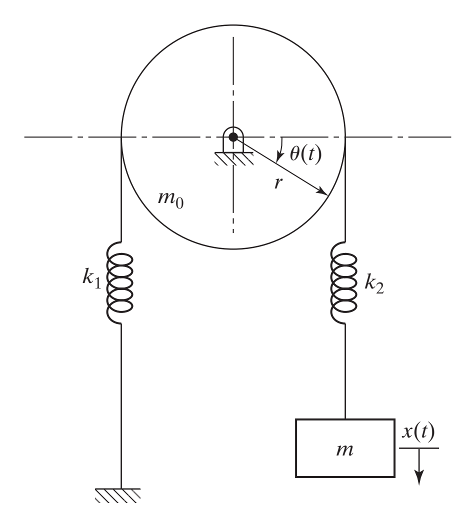


Figura 5.39

5.38 Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema que se muestra en la figura 5.8(a) suponiendo que $J_1 = J_0$, $J_2 = 2I_0$ y $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$.

5.39 Determine los modos normales del sistema torsional que se muestra en la figura 5.9 cuando $k_{t1} = k_t$, $k_{t2} = 5k_t$, $J_1 = J_0$ y $J_2 = 5J_0$.

Sección 5.5 Acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales

5.40 Un modelo simplificado del vehículo militar de la figura 5.40(a) se muestra en la figura 5.40(b). Este modelo se puede utilizar para obtener información sobre el rebote y cabeceo del vehículo. Si la masa total del vehículo es m y el momento de inercia de masa con respecto a su C.G. es J_0, derive las ecuaciones de movimiento del vehículo mediante dos sistemas de coordenadas diferentes, como se indica en la sección 5.5.

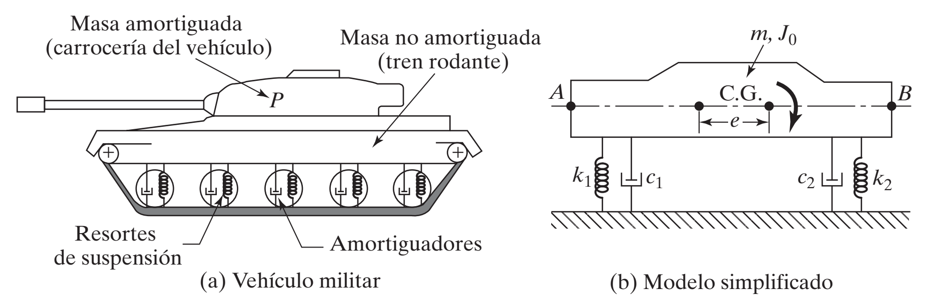


Figura 5.40

5.41 Encuentre las frecuencias naturales y las relaciones de amplitud del sistema que se muestra en la figura 5.41.

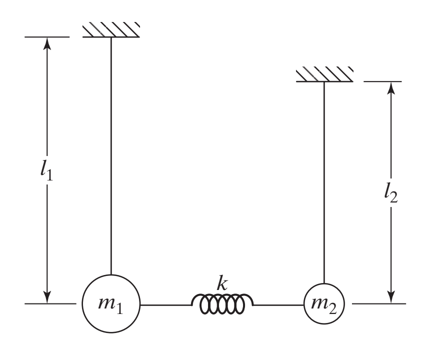


Figura 5.41

5.42 Un cuerpo rígido de masa insignificante y longitud $2l$ gira alrededor del punto medio y está restringido para moverse en el plano vertical por resortes y masas, como se muestra en la figura 5.42. Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema.

5.43 Un perfil aerodinámico de masa m pende de un resorte lineal de rigidez k y un resorte torsional de rigidez k_t en un túnel de viento, como se muestra en la figura 5.43. El C.G. se encuentra a una distancia de e a partir del punto O. El momento de inercia de masa del perfil aerodinámico con respecto a un eje que pasa por el punto O es J_0. Encuentre las frecuencias naturales del perfil aerodinámico.

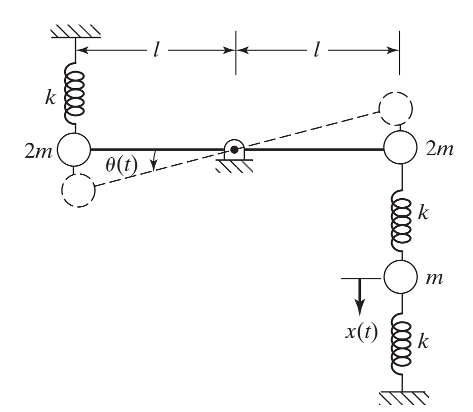


Figura 5.42

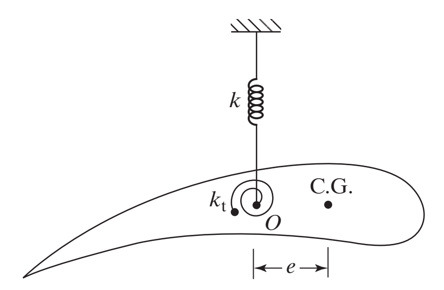


Figura 5.43

5.44 Las juntas de expansión de una carretera de concreto, las cuales se ubican a intervalos de 15 m, generan una serie de impulsos que afectan a los automóviles que viajan a una velocidad constante. Determine las velocidades a las cuales es más probable que se presenten un movimiento de rebote y un movimiento de cabeceo para el automóvil del ejemplo 5.7.

5.45 Considere la grúa viajera elevada descrita en el problema 5.9 (figura 5.28). Si los rieles a ambos lados de la viga tienen una superficie senoidalmente variable en la dirección z (perpendicular a la página), como se muestra en la figura 5.44, formule las ecuaciones y las condiciones iniciales para determinar la respuesta de vibración de la carga levantada (m) en la dirección vertical. Suponga que la velocidad de la grúa es de 30 pies/min en la dirección z.

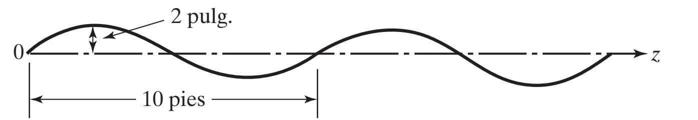


Figura 5.44

5.46 Se modela un automóvil con una capacidad de movimientos de cabeceo y rebote, como se muestra en la figura 5.45. Viaja por una carretera con baches cuya superficie varía senoidalmente con una amplitud de 0.05 m y una longitud de onda de 10 m. Derive las ecuaciones de movimiento del automóvil para los siguientes datos: masa = 1000 kg, radio de giro = 0.9 m, l_1 = 1.0 m, l_2 = 1.5 m, k_f = 18 kN/m, k_t = 22 kN/m, velocidad = 50 km/h.

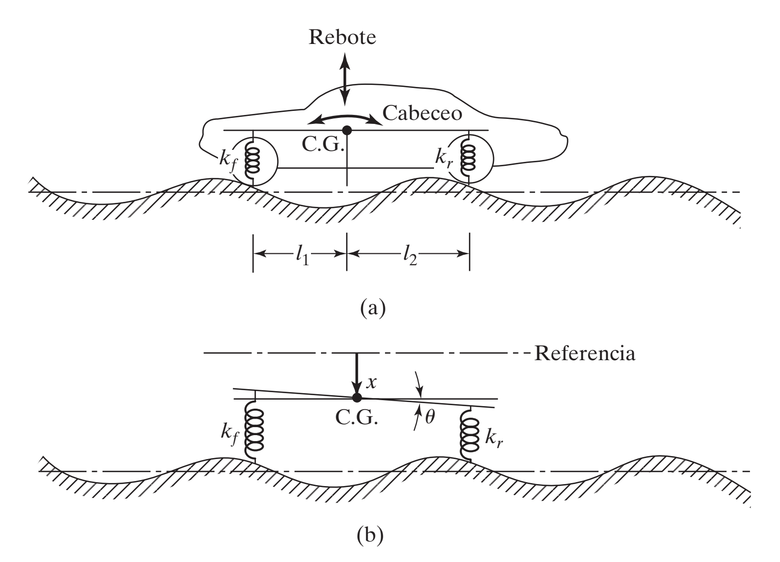


Figura 5.45

5.47 Una flecha de acero, de 2 pulg de diámetro, está soportada por dos cojinetes y porta una polea y un motor, como se muestra en la figura 5.46. Los pesos de la polea y el motor son de 200 lb y 500 lb, respectivamente. Una carga transversal aplicada en cualquier punto a lo largo de la flecha produce la deformación de todos los puntos en la flecha, por consiguiente el sistema presenta acoplamiento elástico. Los coeficientes de rigidez son (vea la sección 6.4 para la definición de coeficientes de influencia de rigidez)

$$k_{11} = \frac{1296}{5}\frac{EI}{l^3}, \qquad k_{12} = k_{21} = \frac{324}{5}\frac{EI}{l^3}, \qquad k_{22} = \frac{216}{5}\frac{EI}{l^3}$$

Determine las frecuencias naturales del sistema sometido a vibración de flexión para $l = 90$ pulgadas.

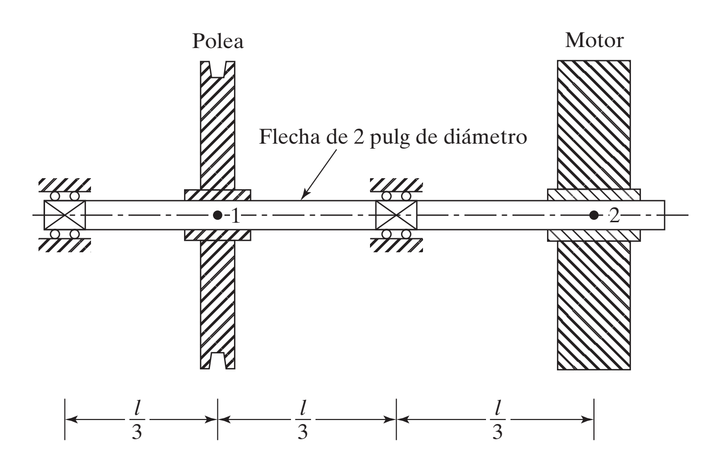


Figura 5.46

5.48 En la figura 5.47 se muestra un modelo simplificado de una bicicleta de montaña junto con el ciclista. Plantee métodos para hallar la respuesta vibratoria de la bicicleta debido a las irregularidades del terreno aplicando un modelo de dos grados de libertad.

5.49 Una barra rígida uniforme de longitud l y masa m está soportada por dos resortes y sometida a una fuerza $F(t) = F_0$ sen ωt, como se muestra en la figura 5.48(a). Derive las ecuaciones de movimiento de la barra para desplazamientos pequeños. (b) Analice la naturaleza del acoplamiento en el sistema.

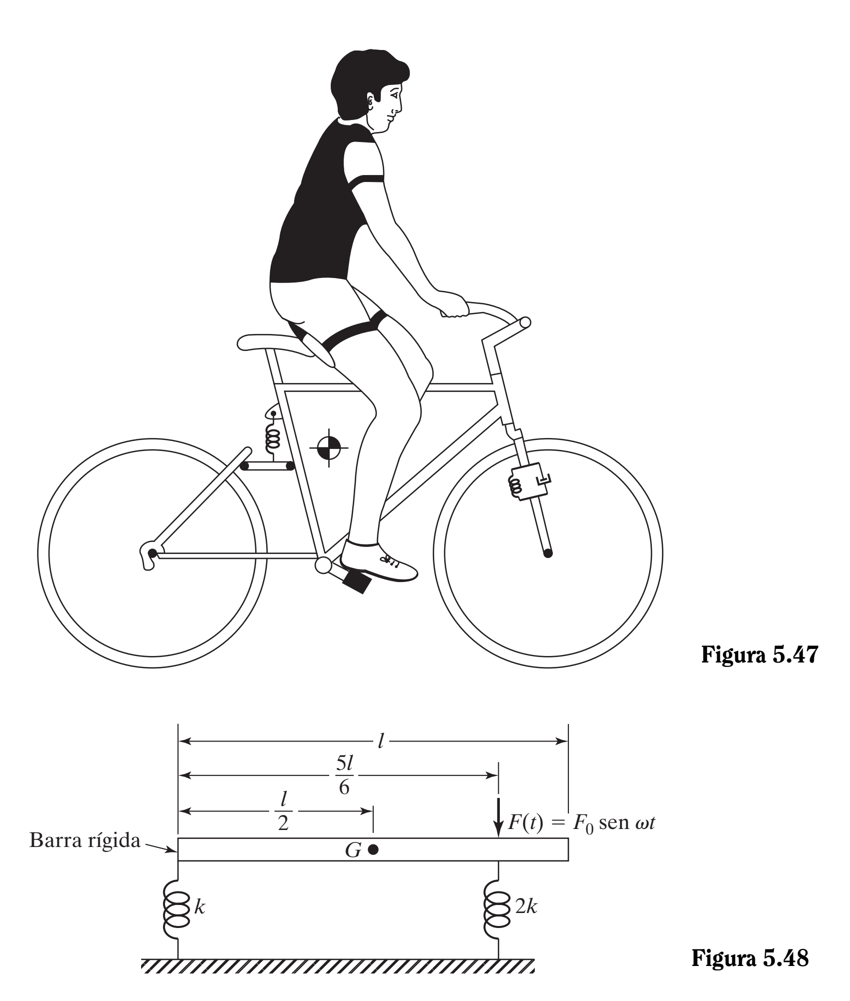


Figura 5.47

Figura 5.48

5.50 Un remolque de masa M, conectado a un muro por medio de un resorte de rigidez k y un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento c, se desliza sobre una superficie libre de fricción, como se muestra en la figura 5.49. Una barra rígida, conectada por medio de un pasador al remolque, puede oscilar en torno al pivote O. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema sometido a las fuerzas aplicadas $F(t)$ y $M_t(t)$ indicadas en la figura 5.49.

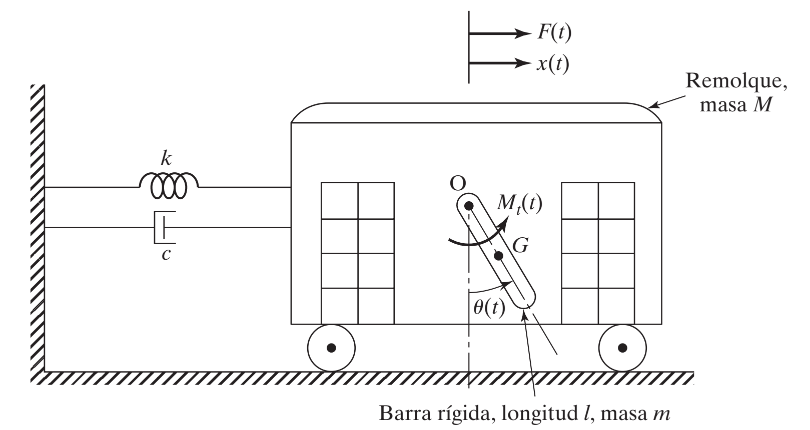


Figura 5.49

5.51 Un remolque de masa M conectado a un muro por medio de un resorte de rigidez k_1 puede moverse sobre una superficie horizontal libre de fricción, como se muestra en la figura 5.50. Un cilindro uniforme de masa m, conectado a la pared del remolque por medio de un resorte de rigidez k_2, puede rodar sobre el piso del remolque sin resbalarse. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema y analice la naturaleza del acoplamiento presente en el sistema.

Sección 5.6 Análisis de vibración forzada

5.52 Los pesos del mazo, marco, yunque (junto con la pieza de trabajo) y bloque de cimentación en una prensa de forja (figura 5.51) son 5000 lb, 40 000 lb, 60 000 lb y 140 000 lb, respectivamente.

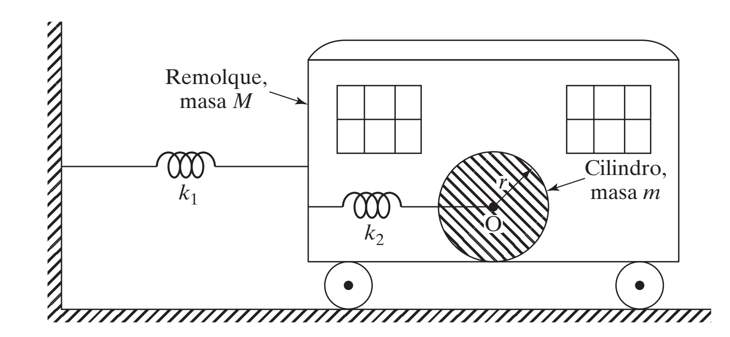


Figura 5.50

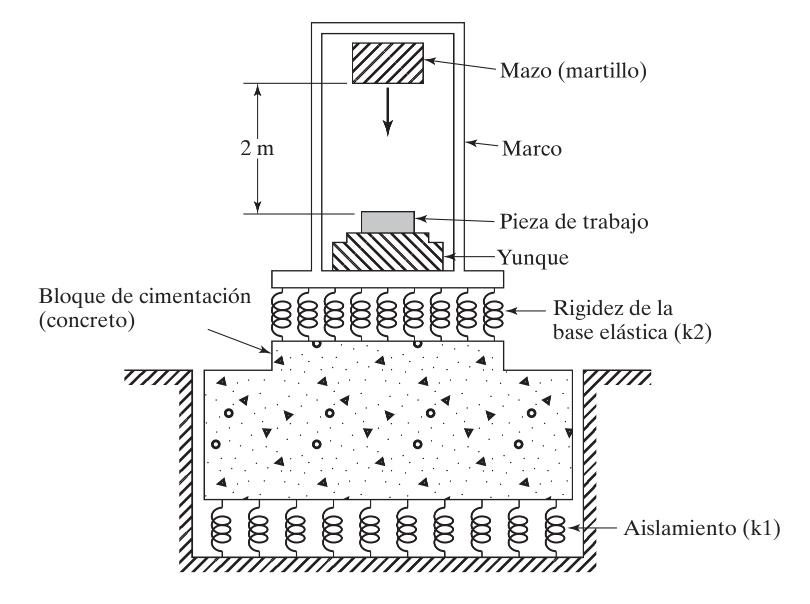


Figura 5.51

Las rigideces de la base elástica colocada entre el yunque y el bloque de cimentación y el aislamiento colocado debajo de la cimentación (incluida la elasticidad del suelo) con 6×10^6 lb/pulg y 3×10^5 lb/pulg, respectivamente. Si la velocidad del mazo antes de que golpee el yunque es de 15 pies/seg, encuentre (a) las frecuencias naturales del sistema, y (b) las magnitudes del desplazamiento del yunque y el bloque de cimentación. Considere el coeficiente de restitución como 0.5 y el amortiguamiento insignificante en el sistema.

5.53 Encuentre (a) las frecuencias naturales del sistema, y (b) las respuestas del yunque y del bloque de cimentación del martillo de forja de la figura 5.51 cuando el cronograma de la fuerza aplicada al yunque es como se muestra en la figura 5.52. Suponga los siguientes datos:

Masa del yunque y el marco = 200 Mg

Masa del bloque de cimentación = 250 Mg

Rigidez de la base elástica 150 MN/m

Rigidez del suelo = 75 MN/m

$F_0 = 10^5$ N y $T = 0.5$ s

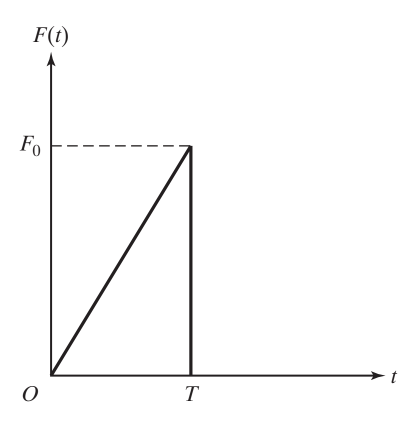


Figura 5.52

5.54 Derive las ecuaciones de movimiento para la vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.53. Suponiendo la solución como $x_i(t) = C_i e^{st}$, $i = 1, 2$, exprese la ecuación característica en la forma

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

Analice la naturaleza de las posibles soluciones, $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

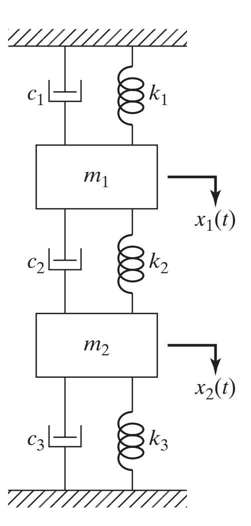


Figura 5.53

5.55 Encuentre los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en la figura 5.53 para $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = k_2 = k_3 = 10000$ N/m, y $c_1 = c_2 = c_3 = 2000$ N-s/m utilizando las condiciones iniciales $x_1(0) = 0.2$ m, $x_2(0) = 0.1$ m, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

5.56 Una bomba centrífuga, que tiene un desbalance de *me*, está apoyada en una cimentación rígida de masa m_2 mediante resortes aisladores de rigidez k_1, como se muestra en la figura 5.54. Si la rigidez del suelo y el amortiguamiento son k_2 y c_2, encuentre los desplazamientos de la bomba y la cimentación con los siguientes datos: $mg = 0.5$ lb, $e = 6$ pulg, $m_1 g = 800$ lb, $k_1 = 2000$ lb/pulg, $m_2 g = 2000$ lb, $k_2 = 1000$ lb/pulg, $c_2 = 200$ lb-s/pulg y velocidad de la bomba = 1200 rpm.

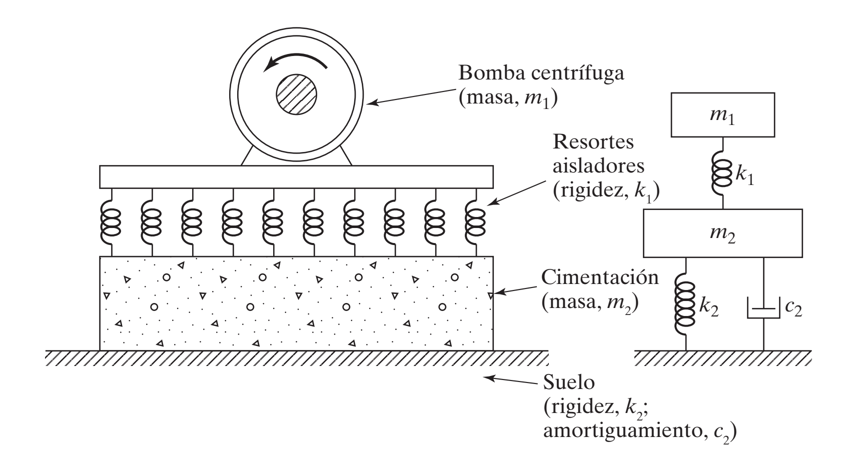


Figura 5.54

5.57 Un motor reciprocante de masa m_1 está montado sobre un viga doblemente empotrada de longitud *l*, ancho *a*, espesor *t* y módulo de Young *E*, como se muestra en la figura 5.55. Un sistema de resorte-masa (k_2, m_2) está suspendido de la viga como se indica en la figura. Encuentre la relación entre m_2 y k_2 que conduzca a una vibración de estado no estable de la viga cuando se desarrolla una fuerza armónica $F_1(t) = F_0 \cos \omega t$ en el motor durante su operación.[3]

5.58 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 5.24 por medio del método de impedancia mecánica, cuando la masa m_1 se somete a la fuerza $F(t) = F_0$ sen ωt en la dirección de $x_1(t)$.

5.59 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 5.24 cuando la base se somete a un desplazamiento $y(t) = Y_0 \cos \omega t$.

5.60 La masa m_1 del sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 5.24 se somete a una fuerza $F_0 \cos \omega t$. Suponiendo que el amortiguamiento producido por el aire circundante es equivalente a $c = 200$ N-s/m, encuentre la respuesta de estado estable de las dos masas. Considere $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = k_2 = 500$ N/m y $\omega = 1$ rad/s.

5.61 Determine la vibración de estado estable del sistema que se muestra en la figura 5.5(a), suponiendo que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$ y $F_2(t) = F_{20} \cos \omega t$.

5.62 En el sistema de la figura 5.24, a la masa m_1 la excita una fuerza armónica que tiene un valor máximo de 50 N y una frecuencia de 2 Hz. Encuentre la amplitud forzada de cada masa para $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 5$ kg, $k_1 = 8000$ N/m y $k_2 = 2000$ N/m.

---

[3] El sistema de resorte-masa (k_2, m_2) agregado para que la amplitud de la primera masa sea cero se conoce como "absorbedor de vibración". En la sección 8.11, se analizan en detalle los absorbedores de vibración.

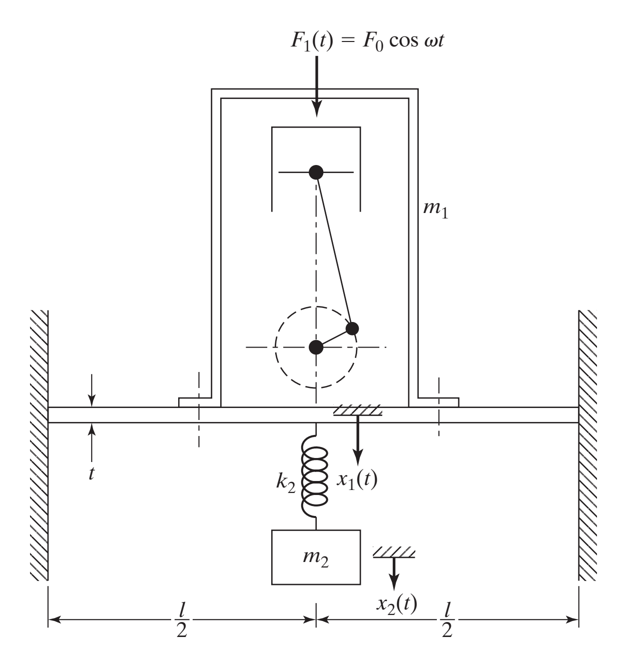


Figura 5.55

5.63 Encuentre la respuesta de las dos masas de la estructura del edificio de dos pisos que se muestra en la figura 5.32 por el desplazamiento del suelo $y(t) = 0.2$ sen πt m. Suponga que las rigideces equivalentes de las columnas inferior y superior son de 800 N/m y 600 N/m, respectivamente, y $m_1 = m_2 = 50$ kg.

5.64 Encuentre la respuesta de vibración forzada del sistema que se muestra en la figura 5.15 cuando $F_1(t)$ es una fuerza escalonada de 5 N utilizando el método de la transformada de Laplace. Suponga que $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $m = 1$ kg y $k = 100$ N/m.

Sección 5.7 Sistemas semidefinidos

5.65 Determine las ecuaciones de movimiento y las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 5.56.

5.66 Dos cilindros circulares idénticos de radio r y masa m cada uno están conectados por un resorte, como se muestra en la figura 5.57. Determine las frecuencias naturales de oscilación del sistema.

5.67 Las ecuaciones diferenciales de movimiento para un sistema de dos grados de libertad están dadas por

$$a_1\ddot{x}_1 + b_1x_1 + c_1x_2 = 0$$

$$a_2\ddot{x}_2 + b_2x_1 + c_2x_2 = 0$$

Derive la condición que deberá satisfacerse para que el sistema sea degenerado.

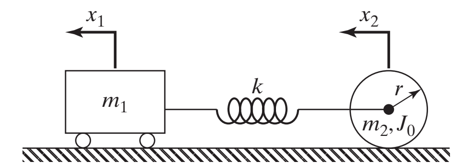


Figura 5.56

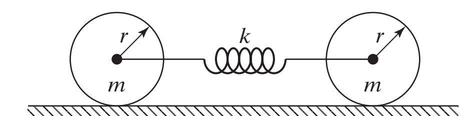


Figura 5.57

5.68 Encuentre los desplazamientos angulares $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ del sistema que se muestra en la figura 5.58 para las condiciones iniciales $\theta_1(t = 0) = \theta_1(0)$, $\theta_2(t = 0) = \theta_2(0)$ y $\dot{\theta}_1\ (t = 0) = \dot{\theta}_2\ (t = 0) = 0$.

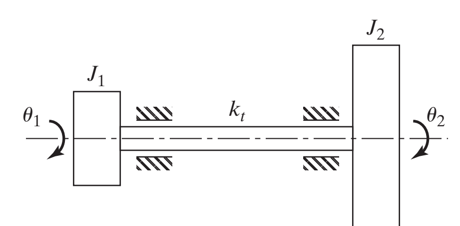


Figura 5.58

5.69 Determine los modos normales del sistema que se muestra en la figura 5.9 para $k_{t1} = 0$. Demuestre que el sistema con $k_{t1} = 0$ se puede tratar como un sistema de un solo grado de libertad si se utiliza la coordenada $\alpha = \theta_1 - \theta_2$.

5.70 Una turbina está conectada a un generador eléctrico por medio de engranes, como se muestra en la figura 5.59. Los momentos de inercia de masa de la turbina, generador, engrane 1 y engrane 2 son, respectivamente, 3 000, 2 000, 500 y 1 000 kg-m^2. Las flechas 1 y 2 son de acero con diámetros de 30 cm y 10 cm y longitudes de 2 cm y 1.0, respectivamente. Encuentre las frecuencias naturales del sistema.

5.71 Un globo de aire caliente de masa m se utiliza para levantar una carga, Mg, por medio de 12 cuerdas elásticas equidistantes, cada una de rigidez k (vea la figura 5.60). Encuentre las frecuencias naturales de vibración del globo en la dirección vertical. Mencione las suposiciones hechas en su solución y analice su validez.

5.72 Una turbina de momento de inercia de masa de 4 lb-pulg-seg^2 está conectada a un generador de momento de inercia de masa de lb-pulg-seg^2 por medio de una flecha de acero hueca de 1 pulg de diámetro interno, 2 pulg de diámetro externo y 15 pulg de longitud (semejante al sistema que se muestra en la figura 5.17(c)). Si la turbina se detiene de repente mientras suministra 10 caballos de fuerza a una velocidad de 6 000 rpm, el par de torsión transmitido se reduce a cero. Encuentre los desplazamientos angulares resultantes de la turbina y el generador. Suponga que el amortiguamiento es insignificante en el sistema.

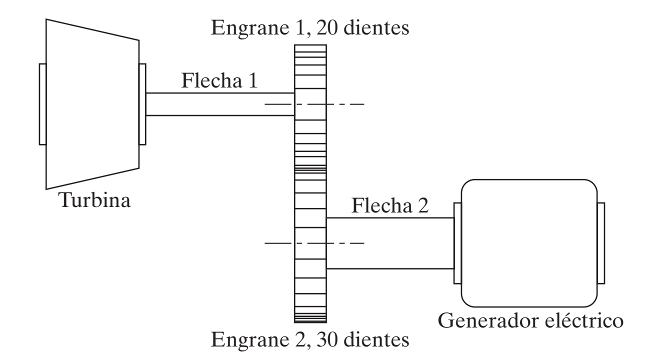


Figura 5.59

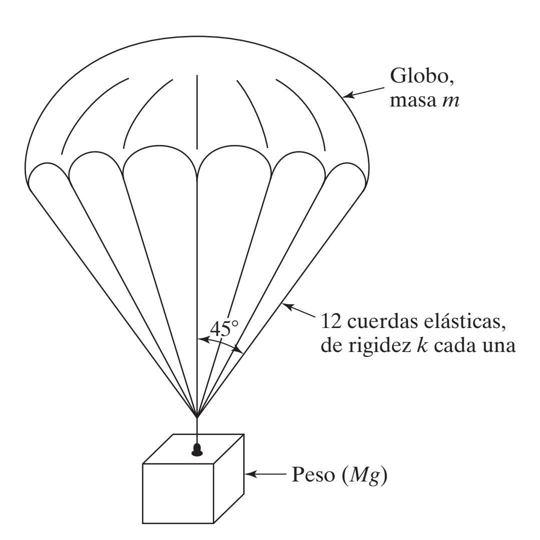


Figura 5.60

5.73 La figura 5.61 muestra un automóvil de 3 000 lb acoplado a un remolque por medio de un enganche flexible con rigidez de 1 000 lb/pulg. Suponiendo que tanto el automóvil como el remolque pueden moverse libremente en la carretera, determine las frecuencias naturales y las formas de modo de vibración del sistema.

5.74 Encuentre la respuesta del sistema automóvil-remolque descrito en el problema 5.73 si los valores de desplazamiento y velocidad iniciales son 6 pulg y 0 pulg/seg para el automóvil y de −3 pulg y 0 pulg/seg para el remolque.

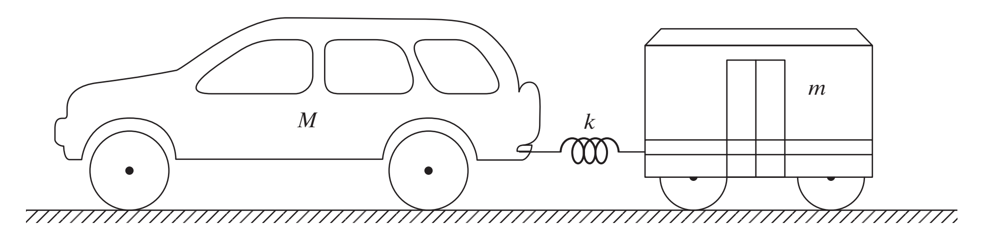


Figura 5.61

5.75 Dos poleas son propulsadas por una banda como se muestra en la figura 5.62. Si los radios de las poleas son r_1 y r_2 y sus momentos de inercia de masa son J_1 y J_2, respectivamente, determine las frecuencias naturales del sistema de propulsión de las poleas. Suponga la rigidez de la banda en cada lado como k como se indica en la figura 5.62.

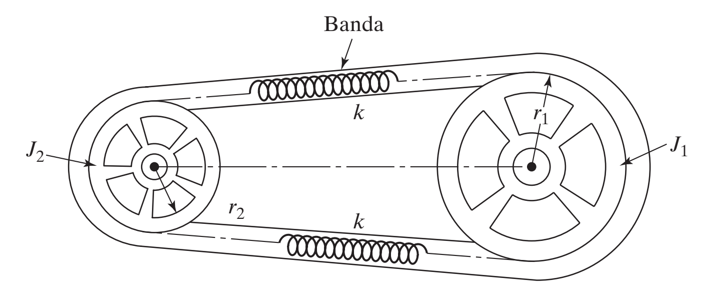


Figura 5.62

Sección 5.8 Autoexcitación y análisis de estabilidad

5.76 Las vibraciones transitorias de la línea de transmisión desarrolladas durante la aplicación de un embrague cónico (de fricción) producen un ruido desagradable. Para reducir el ruido se conecta un volante con momento de inercia de masa J_2 a la línea de transmisión por medio de un resorte torsional k_{t2} y un amortiguador viscoso torsional c_{t2}, como se muestra en la figura 5.63. Si el momento de inercia de masa del embrague cónico es J_1 y la rigidez y constante de amortiguamiento de la línea de transmisión los proporcionan k_{t1} y c_{t1}, respectivamente, derive las relaciones que deben satisfacerse para la operación estable del sistema.

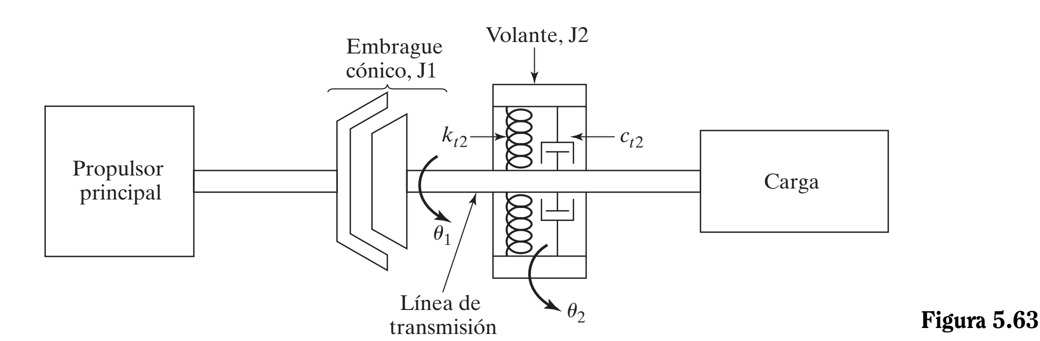


Figura 5.63

5.77 Una barra rígida uniforme de masa m está conectada a la pared de un remolque por medio de un resorte de rigidez k (vea la figura 5.64). El remolque tiene una masa de $5m$ y está conectado a un resorte de rigidez $2k$, y se mueve sobre una superficie libre de fricción. Derive las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.

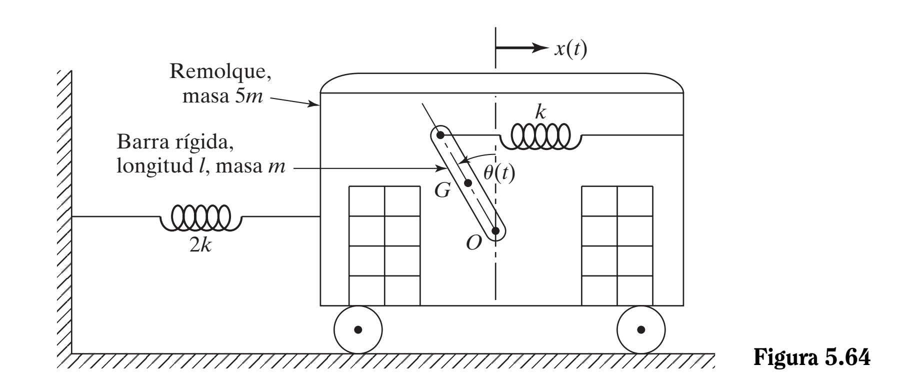


Figura 5.64

5.78 Un sistema de dos grados de libertad se compone de las masas m_1 y m_2 conectadas a un amortiguador y a un resorte como se muestra en la figura 5.65. Si la masa m_1 se somete a una fuerza proporcional a su velocidad, $f_1(t) = a\dot{x}_1(t)$, determine las condiciones para la estabilidad del sistema.

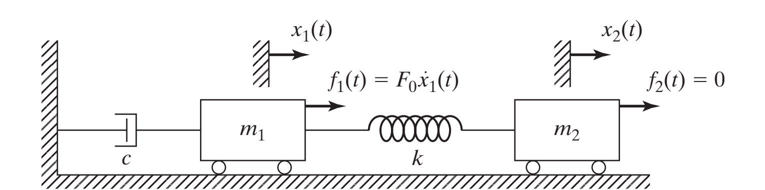


Figura 5.65

Sección 5.9 Método de la función de transferencia

5.79 Derive las ecuaciones diferenciales de movimiento de cuarto orden del sistema de dos grados de libertad de la figura 5.7 (a) en función de $x_1(t)$ o $x_2(t)$ por separado.

Sugerencia: Tome las transformadas inversas de Laplace de las ecuaciones (5.56) y (5.57).

5.80 **a.** Sugiera un método de resolver las ecuaciones diferenciales de cuarto orden derivadas en el problema 5.79 (en función de $x_1(t)$ y $x_2(t)$).
b. ¿Cómo podemos aplicar las condiciones iniciales conocidas $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$ mientras se resuelve la ecuación diferencial de cuarto orden en función de $x_1(t)$?

5.81 Derive expresiones para la transformada de Laplace de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para el sistema que se muestra en la figura 5.5(a) para los siguientes datos: $m_1 = 1, m_2 = 2, k_t = 4, k_2 = 2, k_3 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 0$, $f_1(t) = F_0u(t) =$ función escalonada, y $f_2(t) = 0$. Suponga las condiciones iniciales de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como cero.

5.82 Derive expresiones para la transformada de Laplace de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para el sistema que se muestra en la figura 5.5(a) para los datos siguientes: $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 0$, $f_1(t) = 0, f_2(t) = F_0u(t) =$ función escalonada. Suponga las condiciones iniciales de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como cero.

Sección 5.10 Soluciones obtenidas aplicando la transformada de Laplace

5.83 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de la figura 5.5(a) siguiendo el método de la transformada de Laplace para los datos siguientes: $m_1 = 2, m_2 = 4, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Suponga las condiciones iniciales como $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Trace las respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

5.84 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de la figura 5.5(a) siguiendo el método de la transformada de Laplace para los datos siguientes: $m_1 = 2, m_2 = 4, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0, c_1 = 0$, $c_2 = 2, c_3 = 0$. Suponga las condiciones iniciales como $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Trace las respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

5.85 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de la figura 5.5(a) siguiendo el método de la transformada de Laplace para los datos siguientes: $m_1 = 2, m_2 = 8, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Suponga las condiciones iniciales como $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Trace las respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

5.86 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de la figura 5.5(a) con el método de la transformada de Laplace con los datos siguientes: $m_1 = 2, m_2 = 8, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Suponga las condiciones iniciales como $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Trace las respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

5.87 Encuentre la respuesta del sistema que se muestra en la figura 5.66 con $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 40$ y $k_2 = 20$ para las siguientes condiciones iniciales por medio de la transformada de Laplace:

i. $x_1(0) = 0.05, x_2(0) = 0.10, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$

ii. $x_1(0) = 0.10, x_2(0) = -0.05, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$

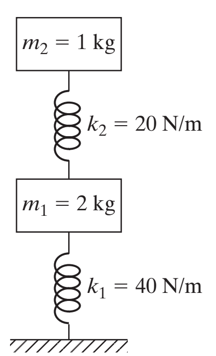


Figura 5.66

Sección 5.11 Soluciones obtenidas utilizando funciones de transferencia de frecuencia

5.88 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema considerado en el ejemplo 5.13 suponiendo $p_1(t)$ y $p_2(t) = P_0$ sen ωt y pasando por alto el amortiguamiento.

5.89 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema considerado en el ejemplo 5.13 suponiendo que $p_1(t) = P_{01}$ sen ωt e y $p_2(t) = P_{02}$ sen ωt y pasando por alto el amortiguamiento.

Sección 5.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

5.90 Encuentre la respuesta del sistema que se muestra en la figura 5.5(a) por medio de un procedimiento numérico cuando $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = k$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $F_2(t) = 0$, y $F_1(t)$ es un pulso rectangular de 500 N de magnitud y 0.5 seg de duración. Suponga que $m = 10$ kg, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, y $k = 2000$ N/m y condiciones iniciales cero.

5.91 (a) Determine las raíces de la ecuación de frecuencia del sistema que se muestra en la figura 5.5 con los siguientes datos: $m_1 = m_2 = 0.2$ lb-s^2/pulg, $k_1 = k_2 = 18$ lb/pulg, $k_3 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. (b) Si las condiciones iniciales son $x_1(0) = x_2(0) = 2$ pulg, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, determine los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de las masas.

5.92 Escriba un programa de computadora para hallar la respuesta de estado estable de un sistema de dos grados de libertad sometido a la excitación armónica $Fj(t) = F_{j0}e^{i\omega t}$ y $j = 1, 2$ por medio de las ecuaciones (5.29) y (5.35). Use este programa para determinar la respuesta de un sistema con $m_{11} = m_{22} = 0.1$ lb-s^2/pulg, $m_{12} = 0$, $c_{11} = 1.0$ lb-s/pulg, $c_{12} = c_{22} = 0$, $k_{11} = 40$ lb/pulg, $k_{22} = -20$ lb/pulg, $k_{12} = 20$ lb/pulg, $F_{10} = 1$ lb, $F_{20} = 2$ lb y $\omega = 5$ rad/s.

5.93 Encuentre y trace las respuestas de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.24 para los siguientes datos: $k_1 = 1000$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.

5.94 Encuentre y trace las respuestas de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 5.24 para los siguientes datos: $k_1 = 1000$ N/m, $k_2 = 500$ N/m, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = -2$.

5.95 Resuelva el siguiente problema de valor eigen utilizando MATLAB:

$$\begin{bmatrix} 25 \times 10^6 & -5 \times 10^6 \\ -5 \times 10^6 & 5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

5.96 Encuentre y trace la respuesta del siguiente sistema de dos grados de libertad utilizando MATLAB:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \text{ sen} 3t \\ 5 \cos 5t \end{Bmatrix}$$

Las condiciones iniciales son $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ y $\dot{x}_2(0) = 0$.

5.97 Resuelva el problema 5.90 utilizando MATLAB. Use la función stepfun de MATLAB para el pulso rectangular.

5.98 Resuelva el problema 5.91(a) utilizando MATLAB.

5.99 Resuelva el problema 5.92 utilizando MATLAB. Trace las respuestas de estado estable de las masas m_{11} y m_{22}.

5.100 Utilizando MATLAB, encuentre las raíces de la ecuación $x^4 - 32x^3 + 244x^3 - 20x - 1200 = 0$.

Proyectos de diseño

5.101 Se utiliza una polea cónica escalonada con propulsión de banda (figura 5.67) para cambiar las velocidades de corte en un torno. La velocidad de la flecha motriz es de 350 rpm y las velocidades de la flecha de salida son 150, 250, 450 y 750 rpm. Los diámetros de las poleas propulsora y propulsada, correspondientes a una velocidad de salida de 150 rpm es de 250 mm y 1 000 mm, respectivamente. La distancia centro a centro entre las flechas es de 5 m. Los momentos de inercia de masa de los conos escalonados propulsor y propulsado son de 0.2 kg-m^2, respectivamente. Encuentre el área de sección transversal de la banda para evitar resonancia a cualquiera de las velocidades de entrada/salida del sistema. Suponga el módulo de Young del material de la banda como 10^{10} N/m^2.

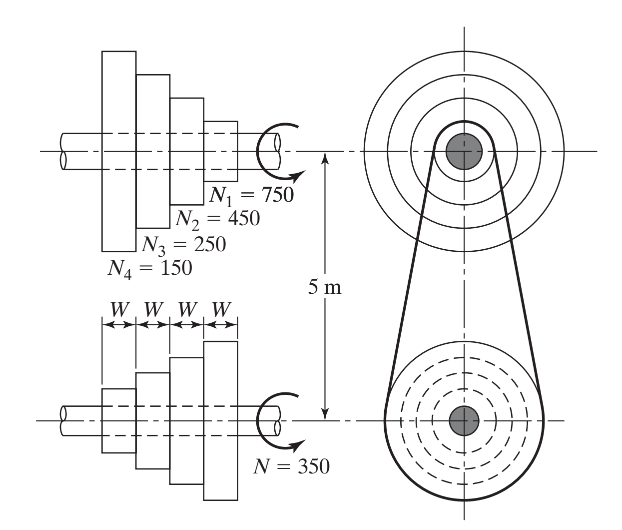


Figura 5.67

5.102 Las masas del mazo, marco (junto con el yunque y la pieza de trabajo) y el bloque de concreto en la prensa de forja que se muestran en la figura 5.51 son de 1000 kg, 5 000 kg y 25 000 kg, respectivamente. El mazo cae sobre la pieza de trabajo desde una altura de 2 m. Diseñe resortes adecuados k_1 y k_2 para las siguientes condiciones: (a) El impacto es no elástico, es decir, el mazo no rebota después de golpear la pieza de trabajo. (b) Las frecuencias naturales de vibración de la prensa de forja no deben ser mayores que 5 Hz. (c) Los esfuerzos en los resortes deben ser menores que el esfuerzo de cedencia del material con un factor de seguridad de al menos 1.5. Suponga que la elasticidad del suelo es insignificante.

CAPÍTULO 6

Sistemas de varios grados de libertad

Joseph Louis Lagrange
(1735-1813)

Matemático italiano de origen francés, famoso por su trabajo sobre mecánica teórica. Fue nombrado profesor de matemáticas en 1955 en la Escuela de Artillería de Turín. Su obra maestra *Mécanique analytique* contiene lo que hoy se conoce como "ecuaciones de Lagrange", las cuales son muy útiles en el estudio de las vibraciones. Su trabajo sobre elasticidad y resistencia de materiales, donde consideró la resistencia y deflexión de los puntales, es menos conocido. (Cortesía de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

Esquema del capítulo

El tema de este capítulo son los sistemas de varios grados de libertad. El modelado de sistemas continuos se presenta como sistemas de varios grados de libertad y se derivan las ecuaciones de un sistema general de n grados de libertad por medio de la segunda ley del movimiento de Newton. Debido a que la solución de las ecuaciones de movimiento en forma escalar implica manejos algebraicos complicados, utilizamos la representación matricial para sistemas de varios grados de libertad. Al expresar el sistema acoplado de n ecuaciones en forma matricial, se identifican las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez. También se presenta la derivación de ecuaciones por medio de coeficientes de influencia. La rigidez, la flexibilidad y los coeficientes de influencia inercial se presentan a partir de los primeros principios. Se inicia el estudio de las expresiones para las energías potencial y cinética y su uso al derivar las ecuaciones de movimiento basado en ecuaciones de Lagrange. Asimismo, se presentan los conceptos generalizados de coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas. Después de expresar las ecuaciones de vibración libre en forma matricial, se deriva el problema de valor eigen en forma matricial. Se describe la solución del problema eigen por medio de la solución de la ecuación característica (polinomial) para determinar las frecuencias naturales y formas de modo (o modos normales) del sistema. Se introducen los conceptos de ortogonalidad de modos normales, matriz modal y ortonormalización de las matrices de masa y rigidez. También se presentan el teorema de expansión y los sistemas no restringidos o semidefinidos. Se considera la vibración libre de sistemas no amortiguados por medio de vectores nodales y la vibración forzada de sistemas no amortiguados por medio de análisis modal junto con ejemplos ilustrativos. Se analizan las ecuaciones de movimiento para la vibración forzada de sistemas viscosamente amortiguados mediante la introducción de la función de disipación de Rayleigh. Se desacoplan las ecuaciones de movimiento para sistemas proporcionalmente amortiguados y se describe la solución de cada una de las ecuaciones desacopladas aplicando la integral de Duhamel. Punto importante es la autoexcitación y el análisis de estabilidad de sistemas de varios grados de libertad siguiendo el criterio de Routh-Hurwitz. Por último, se presentan las soluciones obtenidas utilizando MATLAB para la vibración libre y forzada de sistemas de varios grados de libertad.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Formular las ecuaciones de movimiento de sistemas de varios grados de libertad mediante la segunda ley de Newton, coeficientes de influencia o ecuaciones de Lagrange.
- Expresar la ecuación de movimiento en forma matricial.
- Encontrar las frecuencias naturales de vibración y los vectores modales con la solución del problema de valor eigen.
- Determinar la respuesta de vibración libre y forzada de sistemas no amortiguados mediante el análisis modal.
- Utilizar amortiguamiento proporcional para hallar la respuesta de sistemas amortiguados.
- Analizar las características de estabilidad de sistemas de varios grados de libertad con el criterio de Routh-Hurwitz.
- Resolver problemas de vibración libre y forzada utilizando MATLAB.

Como se mencionó en el capítulo 1, la mayoría de los sistemas de ingeniería son continuos y tie-

6.1 Introducción

nen una infinidad de grados de libertad. El análisis de vibración de sistemas continuos requiere la solución de ecuaciones diferenciales parciales, la cual es bastante difícil. Para muchas ecuaciones diferenciales parciales, de hecho, no existen soluciones analíticas. Por otra parte, el análisis de un sistema de varios grados de libertad, requiere la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la cual es relativamente simple. Por consiguiente, por sencillez del análisis, a menudo los sistemas continuos se representan como sistemas de varios grados de libertad.

Todos los conceptos presentados en el capítulo anterior se pueden extender directamente al caso de sistemas de varios grados de libertad. Por ejemplo, hay una ecuación de movimiento por cada grado de libertad; si se utilizan coordenadas generalizadas, hay una coordenada generalizada por cada grado de libertad. Las ecuaciones de movimiento se obtienen por la segunda ley del movimiento de Newton o aplicando los coeficientes de influencia definidos en la sección 6.4. Sin embargo, con frecuencia es más conveniente derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad por medio de ecuaciones de Lagrange.

Hay n frecuencias naturales, cada una asociada con su propia forma de modo, para un sistema de n grados de libertad. El método de determinar las frecuencias naturales con la ecuación característica obtenida igualando el determinante a cero también se aplica a estos sistemas. Sin embargo, a medida que crece la cantidad de grados de libertad, la solución de la ecuación característica se hace más compleja. Las formas de modo presentan una propiedad conocida como *ortogonalidad*, la cual puede utilizarse para solucionar problemas de vibración forzada no amortiguada con un procedimiento conocido como análisis modal. La solución de problemas de vibración forzada asociados con sistemas viscosamente amortiguados también se determina de manera conveniente con un concepto llamado *amortiguamiento proporcional*.

Se pueden usar diferentes métodos para representar un sistema continuo como un sistema de varios

6.2 Modelado de sistemas continuos como sistemas de varios grados de libertad

grados de libertad. Un método sencillo implica reemplazar la masa distribuida o inercia del sistema por un número finito de masas concentradas o cuerpos rígidos. Se supone que las masas concentradas están conectadas por miembros amortiguadores elásticos sin masa. Se utilizan coordenadas lineales (o angulares) para describir el movimiento de las masas concentradas (o cuerpos rígidos). Tales modelos se conocen como sistemas de *parámetro concentrado* o de *masa concentrada* o de *masa discreta*. El mínimo de coordenadas necesario para describir el movimiento de las masas concentradas y cuerpos rígidos define la cantidad de grados de libertad del sistema. Naturalmente, cuanto mayor sea la cantidad de masas concentradas utilizadas en el modelo, mayor será la precisión del análisis resultante.

Algunos problemas indican automáticamente el tipo de modelo de parámetro concentrado que se va a utilizar. Por ejemplo, el edificio de tres pisos que se muestra en la figura 6.1(a) sugiere al instante el uso de un modelo de tres masas concentradas, como se indica en la figura 6.1(b). En este modelo, se supone que la inercia del sistema está concentrada como tres masas puntuales situadas en los pisos, y las elasticidades de las columnas son reemplazadas por los resortes. Asimismo, la máquina de perforación radial que se muestra en la figura 6.2(a) se puede modelar con cuatro masas concentradas y cuatro elementos elásticos (vigas elásticas), como se muestra en la figura 6.2(b).

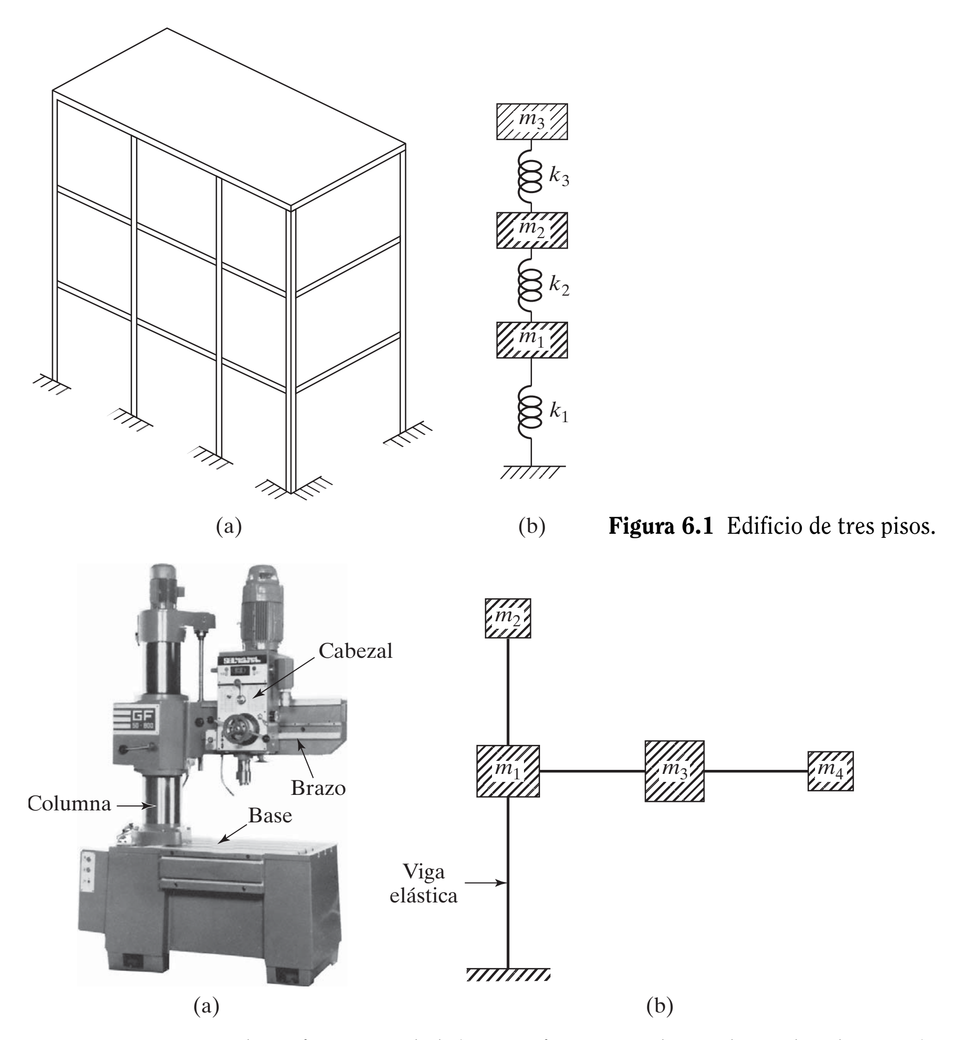


Figura 6.1 Edificio de tres pisos.

Figura 6.2 Máquina de perforación radial. (Fotografía cortesía de South Bend Lathe Corp.).

Otro método popular de representar un sistema continuo como un sistema de varios grados de libertad implica reemplazar la geometría del sistema por una gran cantidad de elementos pequeños. Suponiendo una solución simple dentro de cada elemento, se utilizan los principios de compatibilidad y equilibrio para determinar una solución aproximada para el sistema original. (Este método, conocido como *método del elemento finito*, puede revisarlo con detalle en el capítulo 12, en el sitio web de este libro).

6.3 Uso de la segunda ley de Newton para derivar ecuaciones de movimiento

Se puede adoptar el siguiente procedimiento para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad aplicando la segunda ley del movimiento de Newton:

1. Establezca coordenadas adecuadas para describir las posiciones de las varias masas puntuales y cuerpos rígidos en el sistema. Suponga direcciones positivas adecuadas para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de las masas y cuerpos rígidos.

2. Determine la configuración de equilibrio estático del sistema y mida los desplazamientos de las masas y cuerpos rígidos con respecto a sus posiciones de equilibrio estático respectivas.
3. Trace el diagrama de cuerpo libre de cada masa o cuerpo rígido. Indique las fuerzas de resorte, amortiguamiento y externas que actúan en cada masa o cuerpo rígido cuando se imparte un desplazamiento y velocidad positivos a dicha masa o cuerpo rígido.
4. Aplique la segunda ley del movimiento de Newton a cada masa o cuerpo rígido que muestra el diagrama de frecuencia de cuerpo como sigue

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \text{ (para masa } m_i\text{)} \tag{6.1}$$

o

$$J_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \text{ (para cuerpo rígido de inercia } J_i\text{)} \tag{6.2}$$

donde $\sum_j F_{ij}$ indica la suma de todas las fuerzas que actúan en la masa m_i y $\sum_j M_{ij}$ indica la suma de momentos de todas las fuerzas (con respecto a un eje adecuado) que actúan en el cuerpo rígido del momento de inercia de masa J_i.

El procedimiento se ilustra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 6.1 Ecuaciones de movimiento de un sistema de resorte-masa

Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de resorte-masa-amortiguador que se muestra en la figura 6.3(a).

Solución:

Método: Trace diagramas de cuerpo libre de las masas y aplique las segunda ley del movimiento de Newton. Las coordenadas que describen las posiciones de las masas, $x_i(t)$, se miden desde sus respectivas posiciones de equilibrio estático, como se indica en la figura 6.3(a). El diagrama de cuerpo libre de una masa interior típica m_i se muestra en la figura 6.3(b) junto con las direcciones positivas supuestas para su desplazamiento, velocidad y aceleración. La aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton a la masa m_i resulta

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i = &-k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \\ &+ c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i; \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &- c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1})\dot{x}_i - c_{i+1}\dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} \\ &+ (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} = F_i; \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Las ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_n se derivan de la ecuación (E.1) al establecer que $i = 1$ junto con $x_0 = 0$ e $i = n$ junto con $x_{n+1} = 0$, respectivamente:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \tag{E.2}$$

$$m_n \ddot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (c_n + c_{n+1})\dot{x}_n - k_n x_{n-1} + (k_n + k_{n+1})x_n = F_n \tag{E.3}$$

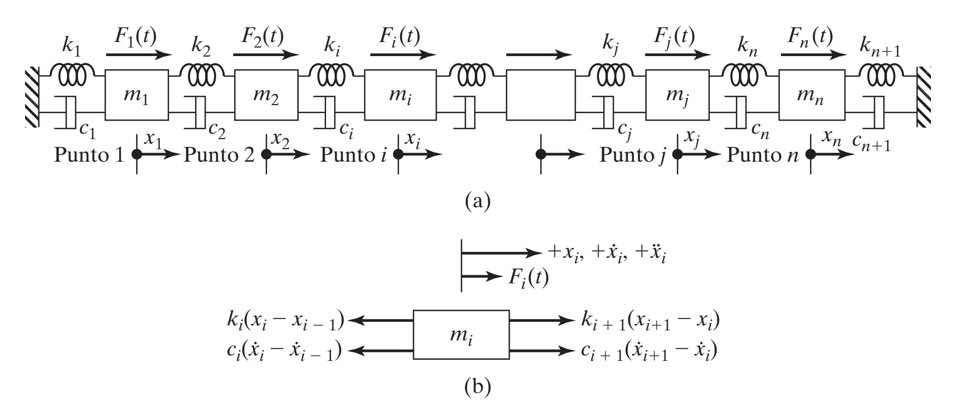


Figura 6.3 Sistema de resorte-masa-amortiguador.

Notas:

1. Las ecuaciones de movimiento, (E.1) a (E.3), del ejemplo 6.1 se expresan en forma matricial como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.3}$$

donde $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, y se expresan como sigue

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

y $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$, y $\vec{F}$ son los vectores de desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza, dados por

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix},$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

2. Para un sistema no amortiguado (con todas las $c_i = 0$, $i = 1, 2,..., n+1$), las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.8}$$

3. El sistema de resorte-masa-amortiguador arriba considerado es un caso particular de un sistema de resorte-masa-amortiguador de n grados de libertad. En su forma más general, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez se escriben como

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

y

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Como se estableció en la sección 5.5, si la matriz de masa no es diagonal, se dice que el sistema debe contar con acoplamiento de amortiguamiento o velocidad. Finalmente, si la matriz de rigidez no es diagonal, se dice que el sistema debe tener acoplamiento elástico o estático. El acoplamiento tanto de masa como de amortiguamiento también se conoce como acoplamiento dinámico.

4. Se ve que las ecuaciones diferenciales del sistema de resorte-masa considerado en el ejemplo 6.1 (figura 6.3(a)) están acopladas; cada ecuación implica más de una coordenada. Esto significa que las ecuaciones no se pueden resolver de manera individual una a la vez, sólo pueden resolverse simultáneamente. Además, se ve que el sistema está estáticamente acoplado, puesto que sus rigideces están acopladas, es decir, la matriz de rigidez tiene al menos un término diagonal fuera de la diagonal. Por otra parte, si la matriz de masa tiene al menos un término no cero fuera de la diagonal, se dice que el sistema está dinámicamente acoplado. Además, si las matrices tanto de rigidez como de masa tienen términos no cero fuera de la diagonal, se dice que el sistema está tanto estática como dinámicamente acoplado.

■

Ejemplo 6.2 Ecuaciones de movimiento de un sistema de remolque y péndulo compuesto

Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de remolque y péndulo compuesto que se muestra en la figura 6.4(a).

Solución:

Método: Trace los diagramas de cuerpo libre y aplique la segunda ley del movimiento de Newton.

Las coordenadas $x(t)$ y $\theta(t)$ se utilizan para describir, respectivamente, el desplazamiento lineal del remolque y el desplazamiento angular del péndulo compuesto desde sus correspondientes posiciones de equilibrio estático. Cuando se suponen valores positivos para los desplazamientos $x(t)$ y $\theta(t)$, velocidad $\dot{x}(t)$ y $\dot{\theta}(t)$, así como las aceleraciones $\ddot{x}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$, las fuerzas externas que actúan en el remolque serán la fuerza aplicada $F(t)$, las fuerzas de resorte k_1x y k_2x y las fuerzas de amortiguamiento $c_1\dot{x}$ y $c_2\dot{x}$, como se muestra en la figura 6.4(b). Las fuerzas externas que actúan en el péndulo compuesto serán el par de torsión aplicado $M_1(t)$ y la fuerza de la gravedad mg, como se muestra en la figura 6.4(b). Las fuerzas de inercia que actúan en el remolque y el péndulo compuesto se indican por medio de las líneas de rayas en la figura 6.4(b). Observe que el movimiento rotacional del péndulo compuesto alrededor del punto O conectado a la bisagra induce una fuerza radialmente dirigida hacia adentro (hacia O) $m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2$ y una fuerza normal (perpendicular a OC) $m\frac{l}{2}\ddot{\theta}$ como se muestra en la figura 6.4(b). La aplicación de la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación en la dirección horizontal resulta

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta = -k_1x - k_2x - c_1\dot{x} - c_2\dot{x} + F(t) \tag{E.1}$$

Asimismo, la aplicación de la segunda ley de Newton para movimiento de rotación alrededor de O produce

$$\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{l}{2} + \left(m\frac{l^2}{12}\right)\ddot{\theta} + (m\ddot{x})\frac{l}{2}\cos\theta = -(mg)\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta + M_t(t) \tag{E.2}$$

Notas:

1. Se ve que las ecuaciones de movimiento, ecuaciones (E.1) y (E.2) son no lineales por la presencia de los términos que implican sen θ, cos θ, y $(\dot{\theta})^2$ sen θ.

2. Las ecuaciones (E.1) y (E.2) se pueden linealizar si se supone que el término que implica $(\dot{\theta})^2$ sen θ es insignificantemente pequeño y que los desplazamientos son pequeños de modo que cos $\theta \approx 1$ y sen $\theta \approx \theta$. Las ecuaciones linealizadas se derivan como

$$(M + m)\ddot{x} + \left(m\frac{l}{2}\right)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (c_1 + c_2)\dot{x} = F(t) \tag{E.3}$$

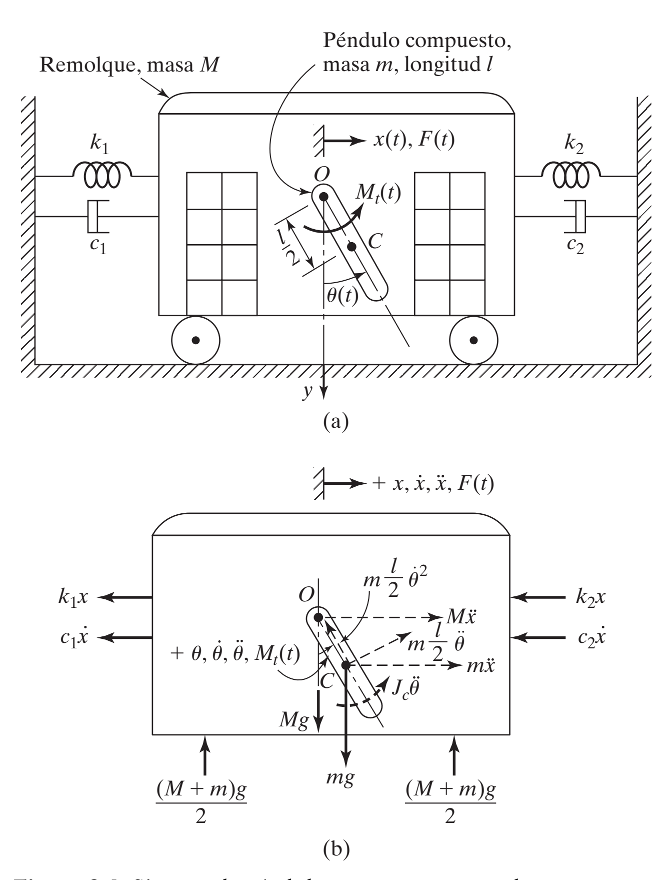


Figura 6.4 Sistema de péndulo compuesto y remolque.

y

$$\left(\frac{ml}{2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{ml^2}{3}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{mgl}{2}\right)\theta = M_t(t) \tag{E.4}$$

■

6.4 Coeficientes de influencia

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad también se pueden escribir en función de coeficientes de influencia, los cuales se utilizan extensamente en ingeniería estructural. Básicamente, se puede asociar un conjunto de coeficientes de influencia con cada una de las matrices implicadas en las ecuaciones de movimiento. Los coeficientes de influencia asociados con las matrices de rigidez y masa, se conocen, respectivamente, como coeficientes de influencia de rigidez e inercia. En algunos casos, es más conveniente reescribir las ecuaciones de movimiento utilizando la inversa de la matriz de rigidez (conocida como matriz de flexibilidad) o la inversa de la matriz de masa. Los coeficientes de influencia correspondientes a la matriz de rigidez inversa se conocen como *coeficientes de influencia de flexibilidad* y los correspondientes a la matriz de masa inversa se conocen como *coeficientes de inercia inversos*.

6.4.1 Coeficientes de influencia de rigidez

En un resorte lineal simple, la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario se conoce como rigidez del resorte. En sistemas más complejos podemos expresar la relación entre el desplazamiento en un punto y las fuerzas que actúan en varios otros puntos del sistema por medio de coeficientes de influencia de rigidez. El coeficiente de influencia de rigidez, denotado como k_{ij}, se define como la fuerza en el punto i a consecuencia de un desplazamiento unitario en el punto j cuando todos los puntos aparte del punto j están fijos. Utilizando esta definición, para el sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.5, la fuerza total en el punto i, F_i, se determina sumando las fuerzas producidas por todos los desplazamientos x_j ($j = 1, 2, ..., n$) como

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.12}$$

La ecuación (6.12) se puede expresar en forma matricial como

$$\vec{F} = [k]\vec{x} \tag{6.13}$$

donde $\vec{x}$ y $\vec{F}$ son los vectores de desplazamiento y fuerza definidos en la ecuación (6.7) y $[k]$ es la matriz de rigidez dada por

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

Son de hacerse notar los siguientes aspectos de los coeficientes de influencia de rigidez:

1. Dado que la fuerza requerida en el punto i para producir una deflexión unitaria en el punto j y una deflexión cero en todos los demás puntos es la misma que la fuerza requerida en el punto j para producir una deflexión unitaria en el punto i y una deflexión cero en todos los demás puntos (teorema de reciprocidad de Maxwell, [6.1]), tenemos $k_{ij} = k_{ji}$.
2. Los coeficientes de influencia de rigidez se pueden calcular aplicando los principios de estática y mecánica de sólidos.

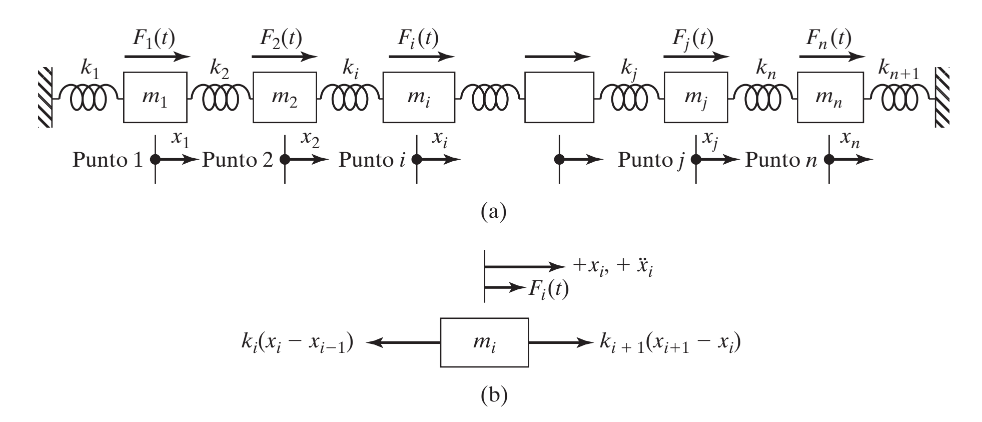


Figura 6.5 Sistema de resorte-masa de varios grados de libertad.

3. Los coeficientes de influencia de rigidez para sistemas torsionales se pueden definir en función del desplazamiento angular unitario y el par de torsión que produce el desplazamiento angular. Por ejemplo, un sistema torsional de varios rotores, k_{ij} se puede definir como el par de torsión en el punto i (rotor i) debido a un desplazamiento angular unitario en el punto j y un desplazamiento angular cero en todos los demás puntos.

Los coeficientes de influencia de rigidez de un sistema de varios grados de libertad se pueden determinar como sigue:

1. Suponga un valor de uno para el desplazamiento x_j ($j = 1$ para comenzar) y un valor de cero para todos los demás desplazamientos $x_1, x_2, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n$. Por definición, el conjunto de fuerzas k_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$) mantendrá el sistema en la configuración supuesta ($x_j = 1, x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} \cdots = x_n = 0$). Entonces las ecuaciones de equilibrio estático se escriben para cada masa y el conjunto de n ecuaciones resultante se resuelve para hallar los n coeficientes de influencia, k_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$).

2. Después de completar el paso 1 para $j = 1$, el procedimiento se repite con $j = 2, 3, ..., n$.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

Ejemplo 6.3 Coeficientes de influencia de rigidez

Encuentre los coeficientes de influencia de rigidez del sistema que se muestra en la figura 6.6(a).

Solución:

Método: Use la definición de k_{ij} y las ecuaciones de equilibrio estático.

Sean x_1, x_2 y x_3 los desplazamientos de las masas m_1, m_2 y m_3, respectivamente. Los coeficientes de influencia de rigidez k_{ij} del sistema se pueden determinar en función de las rigideces de resorte k_1, k_2 y k_3 como sigue. Primero, hacemos el desplazamiento de m_1 igual a uno ($x_1 = 1$) y los desplazamientos de m_2 y m_3 iguales a cero ($x_2 = x_3 = 0$), como se muestra en la figura 6.6(b). Se supone que el conjunto de fuerzas k_{i1} ($i = 1, 2, 3$) mantiene el sistema en esta configuración. Los diagramas de cuerpo libre de las masas correspondientes a la configuración de la figura 6.6(b) se indican en la figura 6.6(c). El equilibrio de fuerzas para las masas m_1, m_2 y m_3 en la dirección horizontal produce

$$\text{Masa } m_1\text{: } k_1 = -k_2 + k_{11} \tag{E.1}$$

$$\text{Masa } m_2\text{: } k_{21} = -k_2 \tag{E.2}$$

$$\text{Masa } m_3\text{: } k_{31} = 0 \tag{E.3}$$

La solución de las ecuaciones (E.1) a (E.3) da por resultado

$$k_{11} = k_1 + k_2, \qquad k_{21} = -k_2, \qquad k_{31} = 0 \tag{E.4}$$

A continuación, los desplazamientos de las masas se consideran como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$, como se muestra en la figura 6.6(d). Puesto que se supone que las fuerzas k_{i2} ($i = 1, 2, 3$) mantienen el sistema en esta configuración, los diagramas de cuerpo libre de las masas se desarrollan como se indica en la figura 6.6(e). Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas de las masas son:

$$\text{Masa } m_1\text{: } k_{12} + k_2 = 0 \tag{E.5}$$

$$\text{Masa } m_2\text{: } k_{22} - k_3 = k_2 \tag{E.6}$$

$$\text{Masa } m_3\text{: } k_{32} = -k_3 \tag{E.7}$$

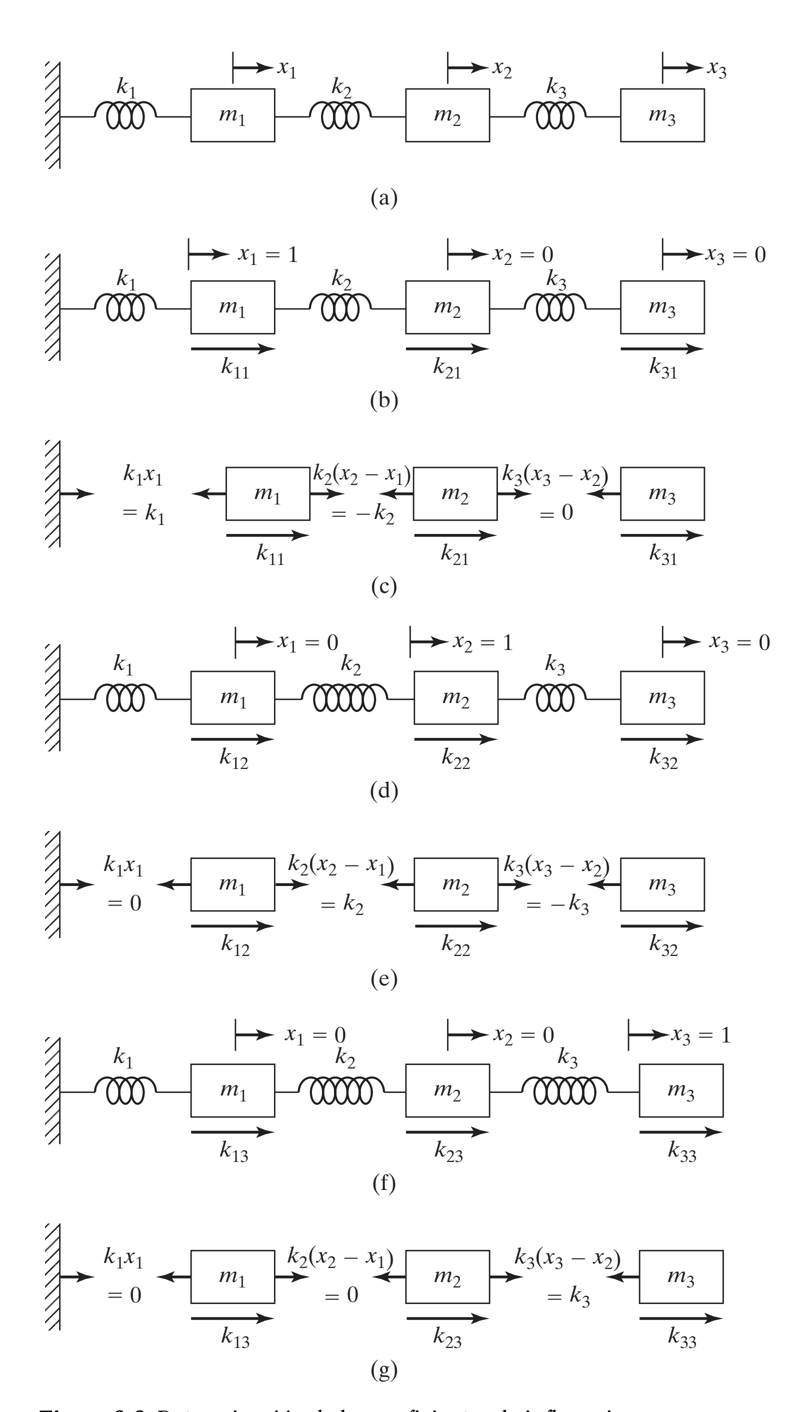


Figura 6.6 Determinación de los coeficientes de influencia de rigidez.

La solución de las ecuaciones (E.5) a (E.7) produce

$$k_{12} = -k_2, \qquad k_{22} = k_2 + k_3, \qquad k_{32} = -k_3 \tag{E.8}$$

Por último, se supone que el conjunto de fuerzas k_{i3} ($i = 1, 2, 3$) mantiene el sistema con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$ (figura 6.6(f)). Los diagramas de cuerpo libre en esta configuración se muestran en la figura 6.6(g) y las ecuaciones de equilibrio de fuerzas conducen a

$$\text{Masa } m_1\text{: } k_{13} = 0 \tag{E.9}$$

$$\text{Masa } m_2\text{: } k_{23} + k_3 = 0 \tag{E.10}$$

$$\text{Masa } m_3\text{: } k_{33} = k_3 \tag{E.11}$$

La solución de las ecuaciones (E.9) a (E.11) produce

$$k_{13} = 0, \qquad k_{23} = -k_3, \qquad k_{33} = k_3 \tag{E.12}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez del sistema es

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{E.13}$$

■

Ejemplo 6.4 Matriz de rigidez de un marco

Determine la matriz de rigidez del marco que se muestra en la figura 6.7(a). Ignore el efecto de la rigidez axial de los miembros *AB* y *BC*.

Solución: Dado que los segmentos *AB* y *BC* del marco se pueden considerar como vigas, se pueden utilizar las fórmulas de deflexión de vigas para generar la matriz de rigidez del marco. Las fuerzas necesarias para producir un desplazamiento a lo largo de una coordenada al mismo tiempo que se mantienen desplazamientos cero a lo largo de otras coordenadas de una viga se indican en la figura 6.7(b), [6.1, 6.8]. En la figura 6.7 (a), los extremos *A* y *C* están fijos y por consiguiente la junta *B* tendrá tres posibles desplazamientos: x, y, y θ como se indica. Las fuerzas necesarias para mantener un desplazamiento unitario a lo largo de la dirección x y desplazamiento cero a lo largo de las direcciones y y θ en la junta *B* están dadas por (de acuerdo con la figura 6.7(b))

$$F_x = \left(\frac{12EI}{l^3}\right)_{BC} = \frac{3EI}{2\,l^3}, \qquad F_y = 0, \qquad M_\theta = \left(\frac{6EI}{l^2}\right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^2}$$

Asimismo, cuando ocurre un desplazamiento unitario a lo largo de la dirección y en la junta *B* con desplazamientos cero a lo largo de las direcciones x y θ, las fuerzas requeridas para mantener la configuración se determinan en la figura 6.7(b) como

$$F_x = 0, \qquad F_y = \left(\frac{12EI}{l^3}\right)_{BA} = \frac{24EI}{l^3}, \qquad M_\theta = -\left(\frac{6EI}{l^2}\right)_{BA} = -\frac{12EI}{l^2}$$

Finalmente, las fuerzas necesarias para mantener un desplazamiento unitario a lo largo de la dirección θ y desplazamientos cero en las direcciones x y y en la junta *B*, se ven de acuerdo con la figura 6.7(b), como

$$F_x = \left(\frac{6EI}{l^2}\right)_{BC} = \frac{3EI}{2\,l^2}, \qquad F_y = -\left(\frac{6EI}{l^2}\right)_{BA} = -\frac{12EI}{l^3}$$

$$M_\theta = \left(\frac{4EI}{l}\right)_{BC} + \left(\frac{4EI}{l}\right)_{BA} = \frac{2EI}{l} + \frac{8EI}{l} = \frac{10EI}{l}$$

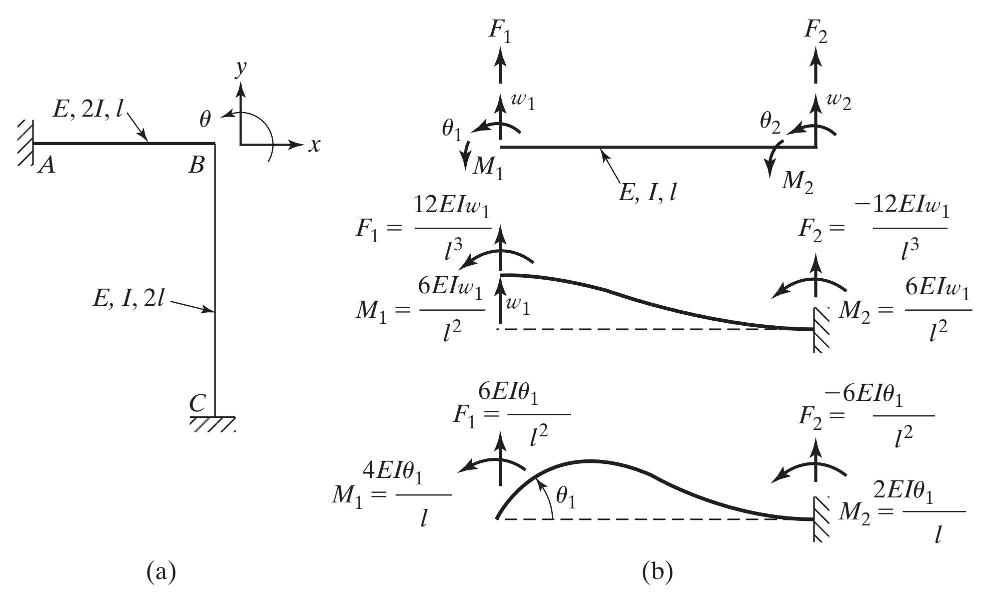


Figura 6.7 Matriz de rigidez de un marco.

Por lo tanto, la matriz de rigidez, $[k]$, está dada por

$$\vec{F} = [k]\vec{x}$$

donde

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\theta \end{Bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}, \qquad [k] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3l}{2} \\ 0 & 24 & -12l \\ \frac{3l}{2} & -12l & 10l^2 \end{bmatrix}$$

■

6.4.2 Coeficientes de influencia de flexibilidad

Como se vio en los ejemplos 6.3 y 6.4, el cálculo de los coeficientes de influencia de rigidez requiere la aplicación de los principios de estática y algún manejo algebraico. De hecho, la generación de n coeficientes de influencia de rigidez k_{1j}, k_2j, ..., k_{nj} con cualquier j específica requiere la solución de n ecuaciones simultáneas. Por lo tanto, se tienen que resolver n conjuntos de ecuaciones lineales (n ecuaciones en cada conjunto) para generar los coeficientes de influencia de rigidez de un sistema de n grados de libertad. Esto implica un importante esfuerzo computacional con grandes valores de n. La generación de los coeficientes de influencia de flexibilidad, por otra parte, es más sencilla y cómoda. Para ilustrar el concepto, considere una vez más el sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.5.

Si sólo una fuerza F_j actúa en el sistema, y si el desplazamiento en el punto i (es decir la masa m_i) se debe a la fuerza F_j, debe ser x_{ij}. El coeficiente de influencia de flexibilidad, indicado por a_{ij}, se define como la deflexión en el punto i producida por una carga unitaria en el punto j. En vista de que la deflexión se incrementa proporcionalmente con la carga en un sistema lineal, tenemos

$$x_{ij} = a_{ij}F_j \tag{6.15}$$

Si varias fuerzas F_j ($j = 1, 2, ..., n$) actúan en diferentes puntos del sistema, la deflexión total en cualquier punto i se determina sumando las contribuciones de todas las fuerzas F_j:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.16}$$

Las ecuaciones (6.16) se expresan en forma matricial como

$$\vec{x} = [a]\vec{F} \tag{6.17}$$

donde $\vec{x}$ y $\vec{F}$ son los vectores de desplazamiento y fuerza definidos en la ecuación (6.7) y [a] es la matriz de flexibilidad dada por

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Se observan las siguientes características de los coeficientes de influencia de flexibilidad:

1. Un examen de las ecuaciones (6.17) y (6.13) indica que las matrices de flexibilidad y rigidez están relacionadas. Si sustituimos la ecuación (6.13) en la ecuación (6.17), obtenemos

$$\vec{x} = [a]\vec{F} = [a][k]\vec{x} \tag{6.19}$$

con la cual podemos obtener la relación

$$[a][k] = [I] \tag{6.20}$$

donde $[I]$ indica la matriz unitaria. La ecuación (6.20) es equivalente a

$$[k] = [a]^{-1}, \qquad [a] = [k]^{-1} \tag{6.21}$$

Es decir, las matrices de rigidez y flexibilidad son la inversa una de la otra. El uso de coeficientes de influencia de rigidez dinámica en la vibración de vigas no uniformes se analiza en la referencia [6.10].

2. Dado que la deflexión en el punto i producida por una carga unitaria en el punto j es la misma que la deflexión en el punto j producida por una carga unitaria en el punto i en un sistema lineal (teorema de reciprocidad de Maxwell), tenemos $a_{ij} = a_{ji}$.

3. Los coeficientes de influencia de flexibilidad de un sistema torsional se pueden definir en función de un par de torsión unitario y la deflexión angular que provoca. Por ejemplo, en un sistema torsional de varios rotores, a_{ij} se define como la deflexión angular del punto i (rotor i) producida por un par de torsión unitario en el punto j (rotor j).

Los coeficientes de influencia de flexibilidad de un sistema de varios grados de libertad se determinan como sigue:

1. Suponga una carga unitaria en el punto j ($j = 1$ para comenzar). Por definición, los desplazamientos de los diversos puntos i ($i = 1, 2, ..., n$) resultantes de esta carga proporcionan los coeficientes de influencia de flexibilidad, a_{ij}, $i = 1, 2.,..., n$. Por lo tanto, los coeficientes a_{ij} se determinan aplicando los sencillos principios de estática y mecánica de sólidos.

2. Después de completar el paso 1 con $j = 1$, el procedimiento se repite con $j = 2, 3, ..., n$.
3. En lugar de aplicar los pasos 1 y 2, la matriz de flexibilidad, $[a]$, se determina con la inversa de la matriz de rigidez, $[k]$, si la matriz de rigidez está disponible.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

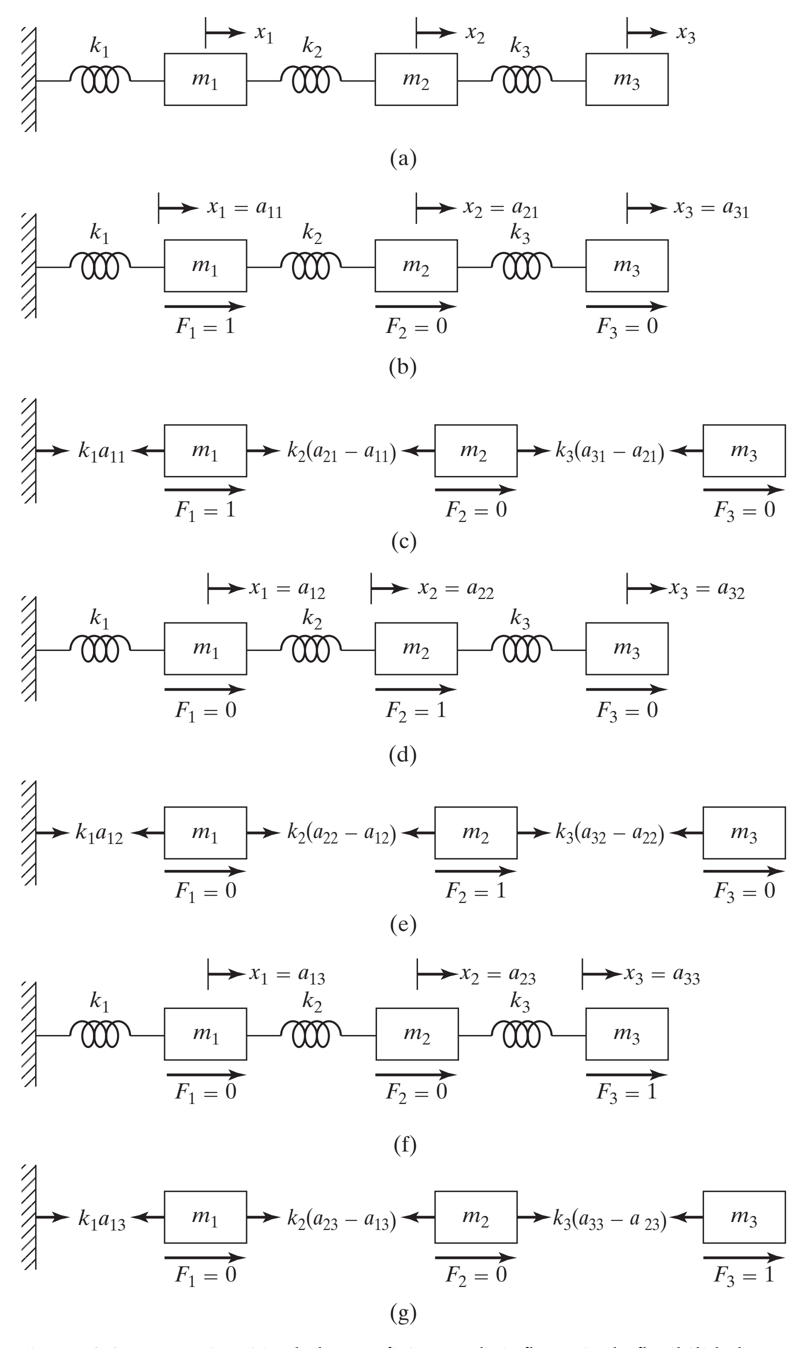


Figura 6.8 Determinación de los coeficientes de influencia de flexibilidad.

Ejemplo 6.5 Coeficientes de influencia de flexibilidad

Encuentre los coeficientes de influencia de flexibilidad del sistema que se muestra en la figura 6.8(a).

Solución: Sean x_1, x_2 y x_3 los desplazamientos de las masas m_1, m_2 y m_3, respectivamente. Los coeficientes de influencia de flexibilidad a_{ij} del sistema se determinan en función de la rigidez del resorte k_1, k_2 y k_3 como sigue. Aplique una fuerza unitaria en la masa m_1 y ninguna fuerza en las otras masas ($F_1 = 1$, $F_2 = F_3 = 0$), como se muestra en la figura 6.8(b). Las deflexiones resultantes de las masas m_1, m_2 y m_3 (x_1, x_2 y x_3) son, por definición, a_{11}, a_{21} y a_{31}, respectivamente (vea la figura 6.8b). Los diagramas de cuerpo libre de las masas se muestran en la figura 6.8(c). El equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal para las masas resulta en lo siguiente:

$$\text{Masa } m_1\text{:}\ k_1 a_{11} = k_2(a_{21} - a_{11}) + 1 \tag{E.1}$$

$$\text{Masa } m_2\text{:}\ k_2(a_{21} - a_{11}) = k_3(a_{31} - a_{21}) \tag{E.2}$$

$$\text{Masa } m_3\text{:}\ k_3(a_{31} - a_{21}) = 0 \tag{E.3}$$

La solución de las ecuaciones (E.1) a (E.3) produce

$$a_{11} = \frac{1}{k_1}, \qquad a_{21} = \frac{1}{k_1}, \qquad a_{31} = \frac{1}{k_1} \tag{E.4}$$

A continuación aplicamos una fuerza unitaria en la masa m_2 y ninguna en las masas m_1 y m_3, como se muestra en la figura 6.8(d). Estas fuerzas hacen que las masas m_1, m_2 y m_3 experimenten las deflexiones $x_1 = a_{12}$, $x_2 = a_{22}$ y $x_3 = a_{32}$, respectivamente (por definición de a_{i2}), como se muestra en la figura 6.8(b). Los diagramas de cuerpo libre de las masas que se muestran en la figura 6.8(e), producen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\text{Masa } m_1\text{:}\ k_1(a_{12}) = k_2(a_{22} - a_{12}) \tag{E.5}$$

$$\text{Masa } m_2\text{:}\ k_2(a_{22} - a_{12}) = k_3(a_{32} - a_{22}) + 1 \tag{E.6}$$

$$\text{Masa } m_3\text{:}\ k_3(a_{32} - a_{22}) = 0 \tag{E.7}$$

La solución de las ecuaciones (E.5) a (E.7) proporciona

$$a_{12} = \frac{1}{k_1}, \qquad a_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \qquad a_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{E.8}$$

Por último, cuando aplicamos una fuerza unitaria a la masa m_3 y ninguna a las masas m_1 y m_2, las masas experimentan las deflexiones $x_1 = a_{13}$, $x_2 = a_{23}$ y $x_3 = a_{33}$, como se muestra en la figura 6.8(f). Los diagramas de cuerpo libre de las masas (figura 6.8(g)) producen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\text{Masa } m_1\text{:}\ k_1 a_{13} = k_2(a_{23} - a_{13}) \tag{E.9}$$

$$\text{Masa } m_2\text{:}\ k_2(a_{23} - a_{13}) = k_3(a_{33} - a_{23}) \tag{E.10}$$

$$\text{Masa } m_3\text{:}\ k_3(a_{33} - a_{23}) = 1 \tag{E.11}$$

La solución de las ecuaciones (E.9) a (E.11) proporciona los coeficientes de influencia de flexibilidad a_{i3} como

$$a_{13} = \frac{1}{k_1}, \qquad a_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \qquad a_{33} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \tag{E.12}$$

Se puede verificar que la matriz de rigidez del sistema, resultado de la ecuación (E.13) y del ejemplo 6.3, también se puede hallar a partir de la relación $[k] = [a]^{-1}$.

■

Ejemplo 6.6 Matriz de flexibilidad de una viga

Derive la matriz de flexibilidad de la viga sin peso que se muestra en la figura 6.9(a). La viga sólo está apoyada por ambos extremos, y las tres masas se colocan a intervalos iguales. Suponga que la viga es uniforme con rigidez EI.

Solución: Sean x_1, x_2 y x_3 las deflexiones transversales totales de las masas m_1, m_2 y m_3, respectivamente. De acuerdo con la fórmula para la deflexión de una viga doblemente articulada [6.2], los coeficientes de influencia a_{1j} ($j = 1, 2, 3$) se pueden hallar aplicando una carga unitaria en la ubicación de m_1 y una carga cero en las ubicaciones de m_2 y m_3 (vea la figura 6.9(b)):

$$a_{11} = \frac{9}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{12} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{13} = \frac{7}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.1}$$

Asimismo, al aplicar una carga unitaria en las ubicaciones de m_2 y m_3 por separado (con carga cero en las demás ubicaciones), obtenemos

$$a_{21} = a_{12} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{22} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{23} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.2}$$

y

$$a_{31} = a_{13} = \frac{7}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{32} = a_{23} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{33} = \frac{9}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.3}$$

Por lo tanto, la matriz de flexibilidad del sistema está dada por

$$[a] = \frac{l^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

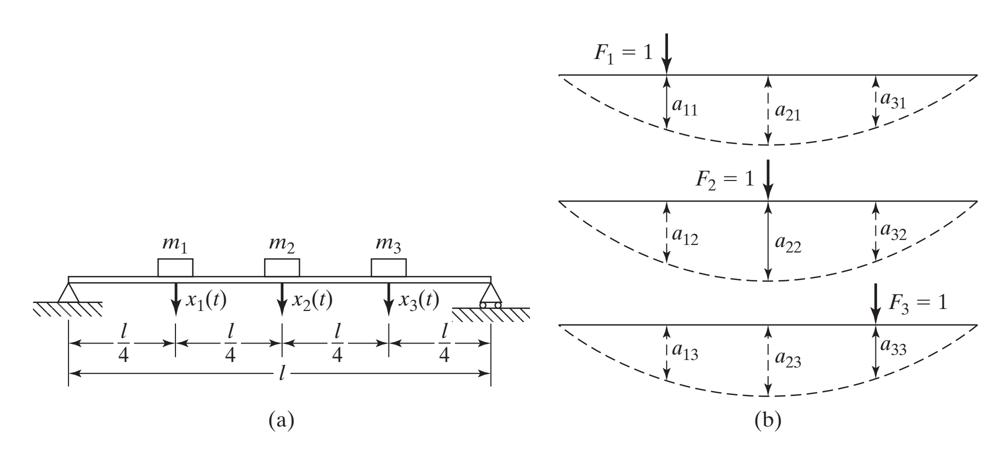


Figura 6.9 Deflexiones de una viga.

6.4.3 Coeficientes de influencia de inercia

Los elementos de la matriz de masa, m_{ij}, se conocen como coeficientes de influencia de inercia. Aunque es más conveniente derivar los coeficientes de influencia de inercia desde la expresión para energía cinética del sistema (vea la sección 6.5), los coeficientes m_{ij} se pueden calcular por medio de relaciones de impulso-cantidad de movimiento. Los coeficientes de influencia de inercia m_{1j}, m_{2j},...,m_{nj} se definen como el conjunto de impulsos aplicados en los puntos 1, 2, ..., n,

respectivamente, para producir una velocidad unitaria en el punto j y una velocidad cero en cualquier otro punto (es decir, $\dot{x}_j = 1, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \cdots = \dot{x}_n = 0$). Por lo tanto, para sistemas de varios grados de libertad, el impulso total en el punto i, $\boldsymbol{F}_i$, se determina sumando los impulsos que producen las velocidades $\dot{x}_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ como

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\dot{x}_j \tag{6.22}$$

La ecuación (6.22) se puede expresar en forma matricial como

$$\vec{\boldsymbol{F}} = [m]\dot{\vec{x}} \tag{6.23}$$

donde $\dot{\vec{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$ son los vectores de velocidad e impulso dados por

$$\dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{F}_n \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

y $[m]$ es la matriz de masa dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Se puede verificar con facilidad que los coeficientes de influencia de inercia son simétricos para un sistema lineal, es decir, $m_{ij} = m_{ji}$. Se puede utilizar el siguiente procedimiento para derivar los coeficientes de influencia de inercia de un sistema de varios grados de libertad.

1. Suponga que se aplica un conjunto de impulsos f_{ij} en varios puntos i ($i = 1, 2, ..., n$) para producir una velocidad unitaria en el punto j ($\dot{x}_j = 1$ con $j = 1$ para comenzar) y una velocidad cero en los demás puntos ($\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \cdots \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \cdots = \dot{x}_n = 0$). Por definición, el conjunto de impulsos f_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$) indican los coeficientes de influencia de inercia m_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$).
2. Después de completar el paso 1 durante $j = 1$, el procedimiento se repite para $j = 2, 3, ..., n$.

Observe que si x_j indica una coordenada angular, entonces $\dot{x}_j$ representa una velocidad angular y $\boldsymbol{F}_j$ indica un impulso angular. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento de generar m_{ij}.

Ejemplo 6.7 Coeficientes de influencia de inercia

Encuentre los coeficientes de influencia de inercia del sistema que se muestra en la figura 6.4(a).

Solución:

Método: Use la definición de m_{ij} junto con relaciones de impulso-cantidad de movimiento.

Sean $x(t)$ y $\theta(t)$ las coordenadas para definir las posiciones lineales y angulares del remolque (M) y el péndulo compuesto (m). Para derivar los coeficientes de influencia de inercia, se aplican impulsos de magnitud

m_{11} y m_{21} a lo largo de las direcciones $x(t)$ y $\theta(t)$ para producir las velocidades $\dot{x} = 1$ y $\theta = 0$. Entonces la ecuación de impulso y cantidad de movimiento lineal resulta

$$m_{11} = (M + m)(1) \tag{E.1}$$

y la ecuación de impulso angular y cantidad de movimiento angular (con respecto a O) produce

$$m_{21} = m(1)\frac{l}{2} \tag{E.2}$$

Luego se aplican impulsos de magnitudes m_{12} y m_{22} a lo largo de las direcciones $x(t)$ y $\theta(t)$ para obtener las velocidades $\dot{x} = 0$ y $\theta = 1$. Por lo tanto, la relación de impulso lineal y cantidad de movimiento lineal proporciona

$$m_{12} = m(1)\left(\frac{l}{2}\right) \tag{E.3}$$

y la ecuación de impulso angular y cantidad de movimiento angular (con respecto a O) resulta

$$m_{22} = \left(\frac{ml^2}{3}\right)(1) \tag{E.4}$$

Por lo tanto, la matriz de masa o inercia del sistema está dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} M + m & \dfrac{ml}{2} \\ \dfrac{ml}{2} & \dfrac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \tag{E.5}$$

■

6.5 Expresiones de energía potencial y cinética en forma matricial

Sea x_i el desplazamiento de la masa m_i y F_i la fuerza aplicada en la dirección de x_i en la masa m_i en un sistema de n grados de libertad semejante al que se muestra en la figura 6.5.

La energía potencial elástica (también conocida como *energía de deformación*) del resorte *i-ésimo* está dada por

$$V_i = \frac{1}{2}F_i x_i \tag{6.26}$$

La energía potencial total se expresa como

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i x_i \tag{6.27}$$

Puesto que

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \tag{6.28}$$

La ecuación (6.27) se escribe como

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_j\right)x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_i x_j \tag{6.29}$$

La ecuación (6.29) también se escribe en forma matricial como[1]

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} \tag{6.30}$$

donde la ecuación (6.7) proporciona el vector de desplazamiento y la matriz de rigidez se escribe como

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

La energía cinética asociada con la masa m_i es, por definición, igual a

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 \tag{6.32}$$

La energía cinética total del sistema se expresa como

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i^2 \tag{6.33}$$

la cual se escribe en forma matricial como

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}} \tag{6.34}$$

donde el vector de velocidad $\dot{\vec{x}}$ está dado por

$$\dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

y la matriz de masa $[m]$ es una matriz diagonal resultado de

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

Si se utilizan coordenadas generalizadas (q_i), que se analizan en la sección 6.6, en lugar de desplazamientos físicos (x_i), la energía cinética se expresa como

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T[m]\dot{\vec{q}} \tag{6.36}$$

[1] Dado que los índices i y j se pueden intercambiar en la ecuación (6.29), tenemos la relación $k_{ij} = k_{ji}$.

donde $\dot{\vec{q}}$ es el vector de velocidades generalizadas, dado por

$$\dot{\vec{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \tag{6.37}$$

y $[m]$ se conoce como *matriz de masa generalizada*, dada por

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

con $m_{ij} = m_{ji}$. La matriz de masa generalizada proporcionada por la ecuación (6.38) está llena, en contraste con la matriz de masa diagonal de la ecuación (6.35).

Se ve que la energía potencial es una función cuadrática de los desplazamientos, y que la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Por consiguiente, se dice que están en forma cuadrática. Como la energía cinética, por definición, no puede ser negativa y se desvanece sólo cuando todas las velocidades se desvanecen, las ecuaciones (6.34) y (6.36) se llaman *formas cuadráticas definidas positivas* y la matriz de masa $[m]$ se llama *matriz definida positiva*. Por otra parte, la expresión de la energía potencial, ecuación (6.30) es una forma cuadrática definida positiva, pero la matriz $[k]$ se define positiva sólo si el sistema es estable. Existen sistemas para los cuales la energía potencial es cero sin que los desplazamientos o coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ sean cero. En estos casos la energía potencial será una función cuadrática positiva en lugar de definida positiva; en consecuencia, se dice que la matriz $[k]$ es positiva. Un sistema para el cual $[k]$ es positiva y $[m]$ se define positiva, se conoce como sistema semidefinido (vea la sección 6.12).

6.6 Coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas

Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio se pueden formular en varios sistemas de coordenadas. Como se explicó antes, se requieren n coordenadas independientes para describir el movimiento de un sistema de n grados de libertad. Cualquier sistema de n coordenadas independientes se conoce como coordenadas generalizadas, usualmente designadas por $q_1, q_2, ..., q_n$. Las coordenadas generalizadas pueden ser longitudes, ángulos o cualquier otro conjunto de números que definan la configuración del sistema en cualquier momento de forma única. También son independientes de las condiciones de restricción.

Para ilustrar el concepto de coordenadas generalizadas, considere el péndulo triple que se muestra en la figura 6.10. La configuración del sistema puede ser especificada por las seis coordenadas (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3$. Sin embargo, estas coordenadas no son independientes sino que están restringidas por las relaciones:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= l_3^2 \end{aligned} \tag{6.39}$$

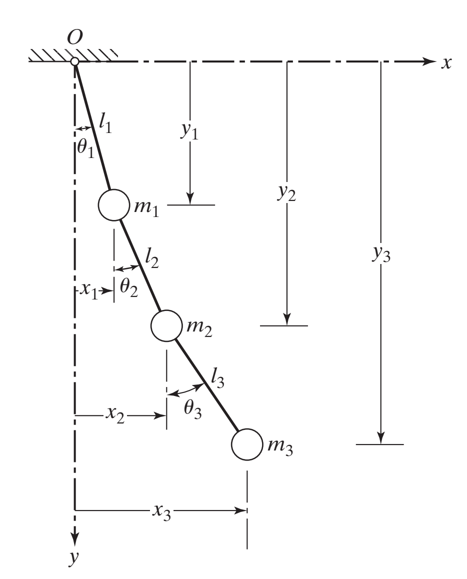


Figura 6.10 Péndulo triple.

Como las coordenadas (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3$ no son independientes, no pueden llamarse coordenadas generalizadas. Sin las restricciones de la ecuación (6.39) cada una de las masas m_1, m_2 y m_3 podrá ocupar cualquier posición en el plano *x*-*y*. Las restricciones eliminan tres grados de libertad de las seis coordenadas (dos por cada masa), y por lo tanto el sistema tiene sólo tres grados de libertad. Si se utilizan desplazamientos angulares θ_j ($j = 1, 2, 3$) para especificar las ubicaciones de las masas m_j($j = 1, 2, 3$) en cualquier momento, no habrá restricciones en θ_j. Por lo tanto, forman un sistema de coordenadas generalizadas indicadas como $q_j = \theta_j$, $j = 1, 2, 3$.

Cuando en el sistema actúan fuerzas externas, su configuración cambia. La nueva configuración del sistema se obtiene cambiando las coordenadas generalizadas q_j por δq_j, $j = 1, 2, ..., n$, donde n indica la cantidad de coordenadas generalizadas (o grados de libertad) del sistema. Si U_j significa el trabajo realizado al cambiar las coordenadas generalizadas q_j en la cantidad δq_j, la fuerza generalizada correspondiente Q_j se define como

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.40}$$

donde Q_j será una fuerza (momento) cuando q_j sea un desplazamiento lineal (angular).

6.7 Uso de las ecuaciones de Lagrange para derivar ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio a menudo se pueden derivar de una forma sencilla en función de coordenadas generalizadas mediante las ecuaciones de Lagrange [6.3]. Éstas se formulan para un sistema de n grados de libertad como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.41}$$

donde $\dot{q}_j = \; q_j/\,t$ es la velocidad generalizada y $Q_j^{(n)}$ es la fuerza generalizada no conservadora correspondiente a la coordenada generalizada q_j. Las fuerzas representadas por $Q_j^{(n)}$ pueden ser fuerzas disipativas (de amortiguamiento) u otras fuerzas externas que no son derivables de una función potencial. Por ejemplo, si F_{xk}, F_{yk} y F_{zk}, representan las fuerzas externas que actúan en la masa k-ésima del sistema en las direcciones x, y y z, respectivamente, en ese caso la fuerza generalizada $Q_j^{(n)}$ se calcula como sigue:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \tag{6.42}$$

donde x_k, y_k y z_k son los desplazamientos de la masa k-ésima en las direcciones x, y y z, respectivamente. Observe que para un sistema torsional, la fuerza F_{xk}, por ejemplo, tiene que ser reemplazada por el momento que actúa con respecto al eje x (M_{xk}) y el desplazamiento x_k por el desplazamiento angular con respecto al eje x (θ_{xk}) en la ecuación (6.42). Para un sistema conservador, $Q_j^{(n)} = 0$, de modo que la ecuación adopta la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6.43}$$

Las ecuaciones (6.41) o (6.43) representan un sistema de n ecuaciones diferenciales, una por cada una de las n coordenadas generalizadas. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema vibratorio se pueden derivar, siempre que las expresiones de energía estén disponibles.

Ejemplo 6.8 Ecuaciones de movimiento de un sistema torsional

En la figura 6.11 se muestra la instalación del compresor, turbina y generador de una planta termoeléctrica. Dicha instalación se puede considerar como un sistema torsional donde J_i indica los momentos de inercia de los tres componentes (compresor, turbina y generador), M_{ti} son los momentos externos que actúan en los componentes, y k_{ti} son las constantes de resorte torsionales de la flecha entre los componentes, como se indica en la figura 6.11. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema por medio de las ecuaciones de Lagrange considerando los desplazamientos angulares de los componentes θ_i como coordenadas generalizadas.

Solución: En este caso $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ y $q_3 = \theta_3$, y la energía cinética del sistema resulta de

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 \tag{E.1}$$

Para la flecha, la energía potencial es igual al trabajo realizado por la flecha a medida que regresa de la configuración dinámica a la posición de equilibrio de referencia. Por lo tanto, si θ indica el desplazamiento angular, para una flecha con constante de resorte torsional k_t, la energía potencial es igual al trabajo realizado para producir un desplazamiento angular θ de la flecha:

$$V = \int_0^\theta (k_t\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}k_t\theta^2 \tag{E.2}$$

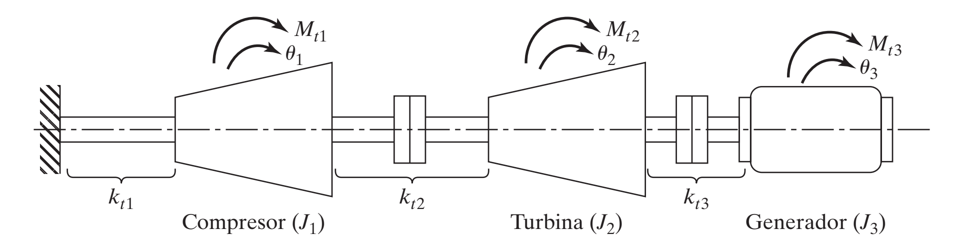


Figura 6.11 Sistema torsional.

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema se expresa como

$$V = \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_{t3}(\theta_3 - \theta_2)^2 \tag{E.3}$$

Hay momentos externos aplicados a los componentes, así que la ecuación (6.42) resulta

$$Q_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{3} M_{tk}\frac{\partial\theta_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3} M_{tk}\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_j} \tag{E.4}$$

de la cual obtenemos

$$Q_1^{(n)} = M_{t1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_1} + M_{t2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} + M_{t3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_1} = M_{t1}$$

$$Q_2^{(n)} = M_{t1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2} + M_{t2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_2} + M_{t3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_2} = M_{t2}$$

$$Q_3^{(n)} = M_{t1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_3} + M_{t2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_3} + M_{t3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\theta_3} = M_{t3} \tag{E.5}$$

Sustituyendo las ecuaciones (E.1), (E.3) y (E.5) en las ecuaciones de Lagrange, ecuación (6.41), obtenemos para $j = 1, 2, 3$ las ecuaciones de movimiento

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 - k_{t2}\theta_1 - k_{t3}\theta_3 = M_{t2}$$

$$J_3\ddot{\theta}_3 + k_{t3}\theta_3 - k_{t3}\theta_2 = M_{t3} \tag{E.6}$$

las cuales se expresan en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_{t1} + k_{t2}) & -k_{t2} & 0 \\ -k_{t2} & (k_{t2} + k_{t3}) & -k_{t3} \\ 0 & -k_{t3} & k_{t3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \\ M_{t3} \end{Bmatrix} \tag{E.7}$$

■

Ejemplo 6.9 Ecuaciones de Lagrange

Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de remolque-péndulo compuesto que se muestra en la figura 6.4(a).

Solución: Las coordenadas $x(t)$ y $\theta(t)$ se pueden utilizar como coordenadas generalizadas para describir, respectivamente, el desplazamiento lineal del remolque y el desplazamiento angular del péndulo compuesto.

Si se introduce una coordenada y, por conveniencia, como se muestra en la figura 6.4(a), los componentes de desplazamiento del punto C se expresan como

$$x_C = x + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta \tag{E.1}$$

$$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta \tag{E.2}$$

La diferenciación de las ecuaciones (E.1) y (E.2) con respecto al tiempo proporciona las velocidades del punto C como

$$\dot{x}_C = \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \tag{E.3}$$

$$\dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \tag{E.4}$$

La energía cinética del sistema T, se expresa como

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 \tag{E.5}$$

donde $J_C = \frac{1}{12}ml^2$. Utilizando las ecuaciones (E.3) y (E.4), la ecuación (E.5) se reescribe como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(ml\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} \end{aligned} \tag{E.6}$$

La energía potencial del sistema V, debido a la energía de deformación de los resortes y el potencial gravitacional, se expresa como

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 + mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) \tag{E.7}$$

donde la posición más baja del punto C se considera como el nivel de referencia. Dado que en el sistema actúan fuerzas no conservadoras, se tienen que calcular las fuerzas generalizadas correspondientes a $x(t)$ y $\theta(t)$. La fuerza, $X(t)$, que actúa en la dirección de $x(t)$ se determina con la ecuación (6.42) como

$$X(t) = Q_1^{(n)} = F(t) - c_1\dot{x}(t) - c_2\dot{x}(t) \tag{E.8}$$

donde el signo negativo de los términos $c_1\dot{x}$ y $c_2\dot{x}$ indica que las fuerzas de amortiguamiento se oponen al movimiento. Asimismo, la fuerza $\Theta(t)$ que actúa en la dirección de $\theta(t)$ se puede determinar como

$$\Theta(t) = Q_2^{(n)} = M_t(t) \tag{E.9}$$

donde $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$. Diferenciando las expresiones de T y V como lo requiere la ecuación (6.41) y sustituyendo las expresiones resultantes, junto con las ecuaciones (E.8) y (E.9), obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema como

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + \frac{1}{2}(ml\cos\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ml\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}^2 + k_1x + k_2x \\ = F(t) - c_1\dot{x} - c_2\dot{x} \end{aligned} \tag{E.10}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(ml\cos\theta)\ddot{x} - \frac{1}{2}ml\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}ml\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}\dot{x} \\ + \frac{1}{2}mgl\operatorname{sen}\theta = M_t(t) \end{aligned} \tag{E.11}$$

Se ve que las ecuaciones (E.10) y (E.11) son idénticas a las obtenidas con la segunda ley del movimiento de Newton (ecuaciones (E.1) y (E.2) en el ejemplo 6.2).

■

6.8 Ecuaciones de movimiento de sistemas no amortiguados en forma matricial

Podemos derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad en forma matricial con las ecuaciones de Lagrange.[2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{6.44}$$

donde F_1 es la fuerza generalizada no conservadora correspondiente a la i-ésima coordenada generalizada x_i y $\dot{x}_i$ es la derivada con respecto al tiempo de x_i (velocidad generalizada). Las energías cinética y potencial de un sistema de varios grados de libertad se expresan en forma matricial como se indica en la sección 6.5:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}} \tag{6.45}$$

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} \tag{6.46}$$

donde $\vec{x}$ es el vector columna de las coordenadas generalizadas

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

A partir de la teoría de matrices, obtenemos, considerando la simetría de $[m]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{1}{2}\vec{\delta}^T[m]\dot{\vec{x}} + \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\vec{\delta} = \vec{\delta}^T[m]\dot{\vec{x}} \\ &= \vec{m}_i^T\dot{\vec{x}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{6.48}$$

donde δ_{ji} es la delta Kronecker ($\delta_{ji} = 1$ si $j = i$ e $= 0$ si $j \neq i$), $\vec{\delta}$ es el vector columna de deltas Kronecker cuyos elementos en las filas para las cuales $j \neq i$ son iguales a cero y cuyos elementos en la fila $i = j$ son iguales a 1, y $\vec{m}_i^T$ es un vector fila el cual es idéntico a la fila i-ésima de la matriz $[m]$. Todas las relaciones representadas por la ecuación (6.48) se expresan como

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \vec{m}_i^T\dot{\vec{x}} \tag{6.49}$$

---

[2] En la ecuación (6.44) las coordenadas generalizadas se indican como x_i en lugar de q_i y las fuerzas generalizadas F_i en lugar de $Q_i^{(n)}$

La diferenciación de la ecuación (6.49) con respecto al tiempo resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = \vec{m}_i^T \ddot{\vec{x}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.50}$$

puesto que la matriz de masa no es una función de tiempo. Además, la energía cinética es una función de sólo las velocidades $\dot{x}_i$, y por tanto

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.51}$$

Asimismo, podemos diferenciar la ecuación (6.46), considerando la simetría de [k],

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\vec{\delta}^T[k]\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{\delta} = \vec{\delta}^T[k]\vec{x}$$
$$= \vec{k}_i^T\vec{x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.52}$$

donde $\vec{k}_i^T$ es un vector fila idéntico a la fila i-ésima de la matriz [k]. Sustituyendo las ecuaciones (6.50) a (6.52) en la ecuación (6.44), obtenemos las ecuaciones de movimiento deseadas en forma matricial

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.53}$$

donde

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix} \tag{6.54}$$

Observe que si el sistema es conservador, no hay fuerzas no conservadoras F_i, así que la ecuación de movimiento se escribe como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0} \tag{6.55}$$

Observe también que si las coordenadas generalizadas x_i son las mismas que los desplazamientos (físicos) reales, la matriz de masa [m] es una matriz diagonal.

6.9 Problema de valor eigen

La solución de la ecuación (6.55) corresponde a la vibración libre no amortiguada del sistema. En este caso, si el sistema recibe algo de energía en la forma de desplazamientos iniciales o velocidades iniciales, o ambos, vibra durante un tiempo indefinido porque la energía no se disipa. Podemos determinar la solución de la ecuación (6.55) suponiendo una solución de la forma

$$x_i(t) = X_i T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.56}$$

donde X_i es una constante y T es una función de tiempo t. La ecuación (6.56) muestra que la relación de amplitud de dos coordenadas

$$\left\{ \frac{x_i(t)}{x_j(t)} \right\}$$

es independiente del tiempo. Físicamente, esto significa que todas las coordenadas tienen movimientos sincrónicos. La configuración del sistema no cambia de forma durante el movimiento, pero su amplitud sí lo hace. La configuración del sistema, dada por el vector

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{Bmatrix}$$

se conoce como la *forma de modo* del sistema. Sustituyendo la ecuación (6.56) en la ecuación (6.55), obtenemos

$$[m]\vec{X}\ddot{T}(t) + [k]\vec{X}T(t) = \vec{0} \tag{6.57}$$

La ecuación (6.57) se puede escribir en forma escalar como n ecuaciones distintas

$$\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.58}$$

de las cuales obtenemos las relaciones

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} X_j \right)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.59}$$

Puesto que el lado izquierdo de la ecuación (6.59) es independiente del índice i, y el lado derecho es independiente de t, ambos lados deben ser iguales a una constante. Suponiendo esta constante[3] como ω^2, podemos escribir la ecuación (6.59) como

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{6.60}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) X_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

o

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \vec{X} = \vec{0} \tag{6.61}$$

[3] Se supone que la constante es un número positivo, ω^2, para obtener una solución armónica de la ecuación (6.60). De lo contrario, la solución de $T(t)$ y por consiguiente la de $x(t)$ se hacen exponenciales, lo que viola las limitaciones físicas de la energía finita total.

La solución de la ecuación (6.60) se expresa como

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi) \tag{6.62}$$

donde C_1 y ϕ son constantes, conocidas como amplitud y ángulo de fase, respectivamente. La ecuación (6.62) muestra que todas las coordenadas pueden realizar un movimiento armónico con las mismas frecuencias ω y el mismo ángulo de fase ϕ. Sin embargo, la frecuencia ω no puede tomar cualquier valor arbitrario; tiene que satisfacer la ecuación (6.61). Dado que la ecuación (6.61) representa un conjunto de n ecuaciones homogéneas en las incógnitas $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, la solución trivial es $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$. Para una solución no trivial de la ecuación (6.61) el determinante Δ de la matriz de coeficientes debe ser cero. Es decir,

$$\Delta = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = |[k] - \omega^2 [m]| = 0 \tag{6.63}$$

La ecuación (6.61) representa lo que se conoce como problema de *valor eigen* o *valor característico*, y ω se conoce como la *frecuencia natural* del sistema.

La expansión de la ecuación (6.63) conduce a una ecuación polinomial de orden enésimo en ω^2. La solución (raíces) de esta ecuación polinomial o característica da n valores de ω^2. Se puede demostrar que todas las n raíces son reales y positivas cuando las matrices $[k]$ y $[m]$ son simétricas y positivas definidas [6.4], como en este caso. Si $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$ indican las n raíces en orden de magnitud ascendente, sus raíces cuadradas positivas dan las n frecuencias naturales del sistema $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$. El valor mínimo de (ω_1) se conoce como *primera frecuencia natural* o *fundamental*. Por lo común, todas las frecuencias naturales ω_i son distintas, aun cuando en algunos casos dos frecuencias naturales podrían tener el mismo valor.

6.10 Solución del problema de valor eigen

Hay varios métodos para resolver un problema de valor eigen. En esta sección consideraremos un método elemental.

6.10.1 Solución de la ecuación característica (polinomial)

La ecuación (6.61) también se puede expresar como

$$\left[\lambda[k] - [m]\right]\vec{X} = \vec{0} \tag{6.64}$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{6.65}$$

Premultiplicando la ecuación (6.64) por $[k]^{-1}$, obtenemos

$$\left[\lambda[I] - [D]\right]\vec{X} = \vec{0}$$

o

$$\lambda[I]\vec{X} = [D]\vec{X} \tag{6.66}$$

donde $[I]$ es la matriz identidad y

$$[D] = [k]^{-1}[m] \tag{6.67}$$

se conoce como *matriz dinámica*. El problema de valor eigen de la ecuación (6.66) se conoce como *problema de valor eigen estándar*. Para una solución no trivial de $\vec{X}$, el determinante característico debe ser cero, es decir,[4]

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0 \tag{6.68}$$

Al expandirla, la ecuación (6.68) resulta en un polinomio de grado enésimo en λ, conocido como *ecuación característica* o *de frecuencia*. Si el grado de libertad del sistema (n) es grande, la solución de esta ecuación polinomial se hace tediosa. Debemos utilizar algún método numérico, varios de los cuales están disponibles para determinar las raíces de una ecuación polinomial [6.5].

Ejemplo 6.10 Ecuaciones de movimiento de un sistema de tres grados de libertad

Formule las ecuaciones de movimiento de vibración libre del sistema que se muestra en la figura 6.12.

Solución: Con $n = 3$ junto con $k_{n+1} = 0$ y $c_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n, n + 1$ en la figura 6.3(a), las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 6.12 para vibración forzada se obtienen con la ecuación (6.3) como

$$[m]\ddot{\overline{x}} + [k]\overline{x} = \overline{F} \tag{E.1}$$

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \qquad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \qquad \overline{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Formulando $\vec{F} = \vec{0}$, las ecuaciones de vibración libre se obtienen como

$$[m]\ddot{\overline{x}} + [k]\overline{x} = \overline{0} \tag{E.3}$$

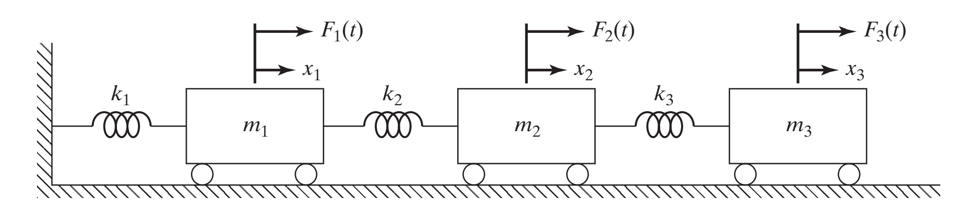


Figura 6.12 Un sistema de resorte-masa de tres grados de libertad.

■

Ejemplo 6.11 Frecuencias naturales de un sistema de tres grados de libertad

Encuentre las frecuencias naturales y formas de modo del sistema que se muestra en la figura 6.12 para $k_1 = k_2 = k_3$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

Solución: La matriz dinámica está dada por

$$[D] = [k]^{-1}[m] \equiv [a][m] \tag{E.1}$$

[4] Premultiplicando la ecuación (6.61) por $[m]^{-1}$, la ecuación determinante característica se puede expresar como $\Delta = |\omega^2[I] - [m]^{-1}[k]| = 0$.

donde los elementos de la matriz de flexibilidad se obtienen al formular $k_i = k$, $i = 1, 2, 3$ en las ecuaciones (E.8) y (E.12) del ejemplo 6.5, y la matriz de masa se obtiene al formular $m_i = m$, $i = 1, 2, 3$ en la $[m]$ como se muestra en la ecuación (E.2) del ejemplo 6.10 de modo que:

$$[a] = [k]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

y

$$[m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

Por lo tanto

$$[D] = [k]^{-1}[m] = \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

Igualando el determinante característico a cero, obtenemos la ecuación de frecuencia

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = \left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\| = 0 \tag{E.5}$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{E.6}$$

Dividiéndola entre λ, la ecuación (E.5) da

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & -2\alpha & 1-3\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0 \tag{E.7}$$

donde

$$\alpha = \frac{m}{k\lambda} = \frac{m\omega^2}{k} \tag{E.8}$$

Las raíces de la ecuación cúbica (E.7) están dadas por

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1^2}{k} = 0.19806, \qquad \omega_1 = 0.44504\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.9}$$

$$\alpha_2 = \frac{m\omega_2^2}{k} = 1.5553, \qquad \omega_2 = 1.2471\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.10}$$

$$\alpha_3 = \frac{m\omega_3^2}{k} = 3.2490, \qquad \omega_3 = 1.8025\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.11}$$

Una vez que se conocen las frecuencias naturales, los modos o vectores eigen se calculan utilizando la ecuación (6.66):

$$[\lambda_i[I] - [D]]\,\vec{X}^{(i)} = \vec{0}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{E.12}$$

donde

$$\vec{X}^{(i)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ X_3^{(i)} \end{Bmatrix}$$

indica el modo *i-ésimo*. A continuación se describe el procedimiento.

Primer modo: Sustituyendo el valor de ω_1 $\left(\lambda_1 = 5.0489\frac{m}{k}\right)$ en la ecuación (E.12), obtenemos

$$\left[5.0489\frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} 4.0489 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 3.0489 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & 2.0489 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.13}$$

La ecuación (E.13) indica un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en las tres incógnitas $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}$, y $X_3^{(1)}$. Cualquiera de estas dos incógnitas se puede expresar en función de la incógnita restante. Si seleccionamos, arbitrariamente, expresar $X_2^{(1)}$ y $X_3^{(1)}$ en función de $X_1^{(1)}$, con las primeras dos filas de la ecuación (E.13) obtenemos

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 4.0489X_1^{(1)} \\ 3.0489X_2^{(1)} - 2.0\,X_3^{(1)} &= X_1^{(1)} \end{aligned} \tag{E.14}$$

Una vez que se satisfacen las ecuaciones (E.14), la tercera fila de la ecuación (E.13) se satisface automáticamente. La solución de las ecuaciones (E.14) se obtiene como

$$X_2^{(1)} = 1.8019X_1^{(1)} \qquad \text{y} \qquad X_3^{(1)} = 2.2470X_1^{(1)} \tag{E.15}$$

Por lo tanto, la primera forma de modo está dada por

$$\vec{X}^{(1)} = X_1^{(1)}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \tag{E.16}$$

donde el valor de $X_1^{(1)}$ se puede obtener arbitrariamente.

Segundo modo: La sustitución del valor ω_2 $\left(\lambda_2 = 0.6430\frac{m}{k}\right)$ en la ecuación (E.12) conduce a

$$\left[0.6430\frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} -0.3570 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & -1.3570 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & -2.3570 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.17}$$

Como antes, se pueden utilizar las primeras dos filas de la ecuación (E.17) para obtener

$$\begin{aligned} -X_2^{(2)} - X_3^{(2)} &= 0.3570 X_1^{(2)} \\ -1.3570 X_2^{(2)} - 2.0 X_3^{(2)} &= X_1^{(2)} \end{aligned} \tag{E.18}$$

La solución de la ecuación (E.18) conduce a

$$X_2^{(2)} = 0.4450 X_1^{(2)} \quad \text{y} \quad X_3^{(2)} = -0.8020 X_1^{(2)} \tag{E.19}$$

Por lo tanto, la segunda forma de modo se expresa como

$$\vec{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix} \tag{E.20}$$

donde el valor de $X_1^{(2)}$ se puede elegir arbitrariamente.

Tercer modo: Para encontrar el tercer modo, sustituimos el valor de $\omega_3 \left(\lambda_3 = 0.3078 \frac{m}{k} \right)$ en la ecuación (E.12) y obtenemos

$$\left[0.3078 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} -0.6922 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & -1.6922 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & -2.6922 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.21}$$

Las dos primeras filas de la ecuación (E.21) se escriben como

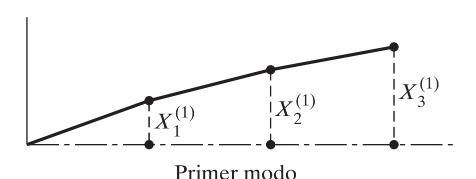
$$\begin{aligned} -X_2^{(3)} - X_3^{(3)} &= 0.6922 X_1^{(3)} \\ -1.6922 X_2^{(3)} - 2.0 X_3^{(3)} &= X_1^{(3)} \end{aligned} \tag{E.22}$$

Las ecuaciones (E.22) proporcionan

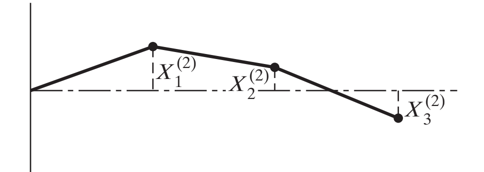
$$X_2^{(3)} = -1.2468 X_1^{(3)} \quad \text{y} \quad X_3^{(3)} = 0.5544 X_1^{(3)} \tag{E.23}$$

Por consiguiente, la tercera forma de modo se escribe como

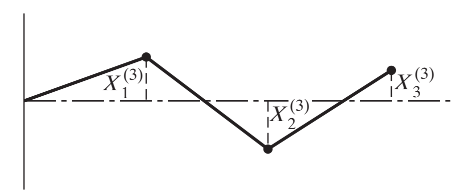
$$\vec{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} \tag{E.24}$$



Primer modo



Segundo modo



Tercer modo

Figura 6.13 Formas de modo de un sistema de tres grados de libertad.

donde el valor de $X_1^{(3)}$ es arbitrario. Los valores de $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}$, y $X_1^{(3)}$ se suelen considerar como 1, y las formas de modo se muestran en la figura 6.13.

■

6.10.2 Ortogonalidad de los modos normales

En la sección anterior consideramos un método de determinar las n frecuencias naturales ω_i y los modos normales correspondientes o vectores modales $\vec{X}^{(i)}$. Ahora abordaremos una importante propiedad de los modos normales, la *ortogonalidad*.[5] La frecuencia natural ω_i y el vector modal correspondiente $\vec{X}^{(i)}$ satisfacen la ecuación (6.61) de modo que

$$\omega_i^2[m]\vec{X}^{(i)} = [k]\vec{X}^{(i)} \tag{6.69}$$

Si consideramos otra frecuencia natural ω_j y el vector modal correspondiente $\vec{X}^{(j)}$, también satisfacen la ecuación (6.61) de modo que

$$\omega_j^2[m]\vec{X}^{(j)} = [k]\vec{X}^{(j)} \tag{6.70}$$

[5] Se dice que dos vectores $\vec{X}^{(i)}$ y $\vec{X}^{(j)}$ son ortogonales (perpendiculares entre sí cuando los vectores están definidos en un espacio de dos o tres dimensiones) si se satisface la siguiente relación:

$$\vec{X}^{(i)^T}\vec{X}^{(j)} = 0$$

Se dice que un vector $\vec{X}^{(i)}$ es normal si su magnitud es unitaria, es decir,

$$|\vec{X}^{(i)}|^2 = \vec{X}^{(i)^T}\vec{X}^{(i)} = 1$$

Por lo tanto, se dice que los vectores $\vec{X}^{(i)}$ y $\vec{X}^{(j)}$ son ortogonales si satisfacen las relaciones de ortogonalidad y normalidad:

$$\vec{X}^{(i)^T}\vec{X}^{(j)} = 0, \quad |\vec{X}^{(i)}|^2 = \vec{X}^{(i)^T}\vec{X}^{(i)} = 1, \quad |\vec{X}^{(j)}|^2 = \vec{X}^{(j)^T}\vec{X}^{(j)} = 1$$

Premultiplicando las ecuaciones (6.69) y (6.70) por $\vec{X}^{(j)T}$ y $\vec{X}^{(i)T}$, respectivamente, obtenemos, considerando la simetría de las matrices [k] y [m],

$$\omega_i^2\, \vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(j)T}[k]\vec{X}^{(i)} \equiv \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} \tag{6.71}$$

$$\omega_j^2\, \vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)} \equiv \omega_j^2\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} \tag{6.72}$$

Restando la ecuación (6.72) de la ecuación (6.71) obtenemos

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 0 \tag{6.73}$$

En general, $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, de modo que la ecuación (6.73) conduce a[6]

$$\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 0, \qquad i \neq j \tag{6.74}$$

De las ecuaciones (6.71) y (6.72) obtenemos, en vista de la ecuación (6.74),

$$\vec{X}^{(j)T}[k]\vec{X}^{(i)} = 0, \qquad i \neq j \tag{6.75}$$

Las ecuaciones (6.74) y (6.75) indican que los vectores modales $\vec{X}^{(i)}$ y $\vec{X}^{(j)}$ son ortogonales con respecto tanto a la matriz de masa como a la matriz de rigidez.

Cuando $i = j$, los lados izquierdos de las ecuaciones (6.74) y (6.75) no son iguales a cero, pero proporcionan los coeficientes de masa y rigidez generalizados del modo i-ésimo.

$$M_{ii} = \vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.76}$$

$$K_{ii} = \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.77}$$

Las ecuaciones (6.76) y (6.77) se escriben en forma matricial como

$$[\nwarrow M \searrow] = \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T[m][X] \tag{6.78}$$

$$[\nwarrow K \searrow] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T[k][X] \tag{6.79}$$

donde [X] es la llamada *matriz modal*, en la cual la columna i-ésima corresponde al vector modal i-ésimo:

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(2)} \cdots \vec{X}^{(n)}] \tag{6.80}$$

[6] En el caso de valores eigen repetidos, $\omega_i = \omega_j$, los vectores modales asociados son ortogonales a todos los vectores modales restantes pero no suelen ser ortogonales entre sí.

En muchos casos normalizamos los vectores modales $\vec{X}^{(i)}$ de tal modo que $[\nwarrow M \searrow] = [I]$, es decir,

$$\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.81}$$

En este caso la matriz $[\nwarrow K \searrow]$ se reduce a

$$[\nwarrow K \searrow] = [\nwarrow \omega_i^2 \searrow] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

Nota: Si un vector eigen $\vec{X}^{(i)}$ satisface la ecuación (6.81), se dice que es ortonormal con respecto a la matriz de masa $[m]$.

Ejemplo 6.12 Ortonormalización de vectores eigen

Ortonormalice los vectores eigen del ejemplo 6.11 con respecto a la matriz de masa.

Solución:

Método: Multiplique cada vector eigen por una constante y encuentre su valor a partir de la relación $\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Los vectores eigen del ejemplo 6.11 están dados por

$$\vec{X}^{(1)} = X_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix}$$

La matriz de masa está dada por

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se dice que el vector eigen $\vec{X}^{(i)}$ es $[m]$-ortonormal si se satisface la siguiente condición:

$$\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 1 \tag{E.1}$$

Por lo tanto, para $i = 1$, la ecuación (E.1) conduce a

$$m(X_1^{(1)})^2(1.0^2 + 1.8019^2 + 2.2470^2) = 1$$

o

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m(9.2959)}} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}}$$

Asimismo, para $i = 2$ e $i = 3$, la ecuación (E.1) resulta

$$m(X_1^{(2)})^2(1.0^2 + 0.4450^2 + \{-0.8020\}^2) = 1 \quad \text{o} \quad X_1^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}}$$

y

$$m(X_1^{(3)})^2(1.0^2 + \{-1.2468\}^2 + 0.5544^2) = 1 \quad \text{o} \quad X_1^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}}$$

■

6.10.3 Valores eigen repetidos

Cuando la ecuación característica posee raíces repetidas, los modos correspondientes no son únicos. Para ver esto, sean $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$ las formas de modo correspondientes al valor eigen repetido $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y sea $\vec{X}^{(3)}$ la forma de modo correspondiente a un valor eigen diferente λ_3. La ecuación (6.66) se escribe como

$$[D]\vec{X}^{(1)} = \lambda\vec{X}^{(1)} \tag{6.83}$$

$$[D]\vec{X}^{(2)} = \lambda\vec{X}^{(2)} \tag{6.84}$$

$$[D]\vec{X}^{(3)} = \lambda_3\vec{X}^{(3)} \tag{6.85}$$

Multiplicando la ecuación (6.83) por una constante p y sumándola a la ecuación (6.84), obtenemos

$$[D](p\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) = \lambda(p\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) \tag{6.86}$$

Esto demuestra que la nueva forma de modo $(p\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)})$, la cual es una combinación lineal de los primeros dos, también satisface la ecuación (6.66), así que la forma de modo correspondiente a λ no es única. Cualquier $\vec{X}$ correspondiente a λ debe ser ortogonal a $\vec{X}^{(3)}$ para que sea un modo normal. Si los tres modos son ortogonales, serán linealmente independientes y se pueden utilizar para describir la vibración libre resultante de cualesquiera condiciones iniciales.

Mahalingam y Bishop [6.16] presentaron la respuesta de un sistema de varios grados de libertad con varias frecuencias naturales repetidas a una excitación de fuerza y desplazamiento.

Ejemplo 6.13 Valores eigen repetidos

Determine los valores y vectores eigen de un sistema vibratorio para el cual

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Si la ecuación de valor eigen $[[k] - \lambda[m]]\vec{X} = \vec{0}$ se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & -2 & 1 \\ -2 & 2(2-\lambda) & -2 \\ 1 & -2 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

donde $\lambda = \omega^2$. La ecuación característica resulta

$$|[k] - \lambda[m]| = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

así que

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = 4 \tag{E.2}$$

Vector eigen para $\lambda_3 = 4$. Utilizando $\lambda_3 = 4$, la ecuación (E.1) resulta

$$\begin{aligned} -3X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} + X_3^{(3)} &= 0 \\ -2X_1^{(3)} - 4X_2^{(3)} - 2X_3^{(3)} &= 0 \\ X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} - 3X_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Si $X_1^{(3)}$ se hace igual a 1, las ecuaciones (E.3) proporcionan el vector eigen $\vec{X}^{(3)}$.

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.4}$$

Vector eigen para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. El valor $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$ indica que el sistema es degenerado (vea la sección 6.12). Aplicando $\lambda_1 = 0$ en la ecuación (E.1) obtenemos

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \\ -2X_1^{(1)} + 4X_2^{(1)} - 2X_3^{(1)} &= 0 \\ X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Todas estas ecuaciones son de la forma

$$X_1^{(1)} = 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)}$$

Por lo tanto, el valor eigen correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2$ se escribe como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

Si escogemos $X_2^{(1)} = 1$ y $X_3^{(1)} = 1$, obtenemos

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.7}$$

Si elegimos $X_2^{(1)} = 1$ y $X_3^{(1)} = -1$, la ecuación (E.6) proporciona

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$

Como se mostró antes en la ecuación (6.86) $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$ no son únicos. Cualquier combinación lineal de $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$ también satisfará la ecuación (E.1) original. Observe que $\vec{X}^{(1)}$ dado por la ecuación (E.6) es ortogonal a $\vec{X}^{(3)}$ de la ecuación (E.4) con todos los valores de $X_2^{(1)}$ y $X_3^{(1)}$, puesto que

$$\vec{X}^{(3)T}[m]\vec{X}^{(1)} = (1 \quad -1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

■

6.11 Teorema de expansión

Los vectores eigen, debido a su propiedad de ortogonalidad, son linealmente independientes.[7] Por consiguiente, constituyen la base en el espacio de n dimensiones.[8] Esto significa que cualquier vector en el espacio de n dimensiones se puede expresar mediante una combinación lineal de los n vectores linealmente independientes. Si $\vec{x}$ es un vector arbitrario en un espacio de n dimensiones, se puede expresar como

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{X}^{(i)} \tag{6.87}$$

donde c_i son constantes. Premultiplicando la ecuación (6.87) por $\vec{X}^{(i)T}[m]$, el valor de la constante c_i se determina como

$$c_i = \frac{\vec{X}^{(i)T}[m]\,\vec{x}}{\vec{X}^{(i)T}[m]\,\vec{X}^{(i)}} = \frac{\vec{X}^{(i)T}[m]\,\vec{x}}{M_{ii}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.88}$$

donde M_{ii} es la masa generalizada en el i-ésimo modo normal. Si los vectores modales $\vec{X}^{(i)}$ se normalizan de acuerdo con la ecuación (6.81), c_i está dado por

$$c_i = \vec{X}^{(i)T}[m]\vec{x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.89}$$

La ecuación (6.89) representa lo que se conoce como *teorema de expansión* [6.6]. Es muy útil para determinar la respuesta de sistemas de varios grados de libertad sometidos a condiciones forzadas arbitrarias de acuerdo con un procedimiento llamado *análisis modal*.

6.12 Sistemas no restringidos

Como se expresó en la sección 5.7, un sistema no restringido es aquel que no tiene restricciones o soportes y que puede moverse como un cuerpo rígido. No es común ver, en la práctica, sistemas que no estén conectados a cualquier marco estacionario. Un ejemplo común es el movimiento de dos carros de ferrocarril con masas m_1 y m_2 y un resorte de acoplamiento k. Tales sistemas son

---

[7] Un conjunto de vectores es linealmente independiente si ningún vector en el conjunto se puede obtener mediante una combinación lineal de los restantes.
[8] Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio de n dimensiones se conoce como base en dicho espacio.

capaces de moverse como cuerpos rígidos, los cuales se pueden considerar como modos de oscilación con frecuencia cero. Para un sistema conservador, las ecuaciones (6.34) y (6.30) dan las energías cinética y potencial, respectivamente. Por definición, la energía cinética siempre es positiva, así que la matriz de masa [*m*] es una matriz definida positiva. Sin embargo, la matriz de rigidez [*k*] es una matriz semidefinida: *V* es cero sin que el vector de desplazamiento $\vec{x}$ sea cero para sistemas no restringidos. Para ver esto, considere la ecuación de movimiento para vibración libre en coordenadas normales:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \tag{6.90}$$

Para $\omega = 0$, la solución de la ecuación (6.90) se expresa como

$$q(t) = \alpha + \beta t \tag{6.91}$$

donde α y β son constantes. La ecuación (6.91) representa una traslación de cuerpo rígido. Sea $\vec{X}^{(0)}$ el vector modal de un sistema de varios grados de libertad correspondiente al modo de cuerpo rígido. El problema de valor eigen, ecuación (6.64), se expresa como

$$\omega^2 [m] \vec{X}^{(0)} = [k] \vec{X}^{(0)} \tag{6.92}$$

Con $\omega = 0$, la ecuación (6.92) resulta

$$[k] \vec{X}^{(0)} = \vec{0}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
k_{11} X_1^{(0)} + k_{12} X_2^{(0)} + \cdots + k_{1n} X_n^{(0)} &= 0 \\
k_{21} X_1^{(0)} + k_{22} X_2^{(0)} + \cdots + k_{2n} X_n^{(0)} &= 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
k_{n1} X_1^{(0)} + k_{n2} X_2^{(0)} + \cdots + k_{nn} X_n^{(0)} &= 0
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Si el sistema experimenta traslación de cuerpo rígido, no todos los componentes $X_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son cero, es decir, el vector $\vec{X}^{(0)}$ no es igual a $\vec{0}$. Por consiguiente, para satisfacer la ecuación (6.93), el determinante de [*k*] debe ser cero. Por lo tanto, la matriz de rigidez de un sistema no restringido (con frecuencia natural cero) es singular. Si [*k*] es singular, la energía potencial está dada por

$$V = \frac{1}{2} \vec{X}^{(0)^T} [k] \vec{X}^{(0)} \tag{6.94}$$

en virtud de la ecuación (6.93). El modo $\vec{X}^{(0)}$ se llama *modo cero* o *modo de cuerpo rígido*. Si sustituimos cualquier vector $\vec{X}$ además de $\vec{X}^{(0)}$ y $\vec{0}$ en lugar de $\vec{x}$ en la ecuación (6.30), la energía potencial *V* se vuelve una cantidad positiva. La matriz [*k*] es entonces una matriz semidefinida positiva. Por eso un sistema no restringido también se conoce como *sistema semidefinido*.

Observe que un sistema de varios grados de libertad puede tener cuando mucho seis modos de cuerpo rígido con las frecuencias correspondientes iguales a cero. Puede haber tres modos de traslación de cuerpo rígido, uno de traslación a lo largo de cada una de las tres coordenadas cartesianas y tres modos de rotación de cuerpo rígido, uno por rotación alrededor de las tres coordenadas cartesianas. Podemos determinar los modos y frecuencias naturales de un sistema semidefinido mediante los procedimientos descritos en la sección 6.10.

Ejemplo 6.14 Frecuencias naturales de un sistema libre

Hay tres carros de carga enganchados por dos resortes, como se muestra en la figura 6.14. Encuentre las frecuencias naturales y formas de modo del sistema para $m_1 = m_2 = m_3 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.

Solución: La energía cinética del sistema se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}} \tag{E.1}$$

donde

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

y

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Los alargamientos de los resortes k_1 y k_2 son $(x_2 - x_1)$ y $(x_3 - x_2)$, respectivamente, así que la energía potencial del sistema está dada por

$$V = \frac{1}{2}\{k_1(x_2 - x_1)^2 + k_2(x_3 - x_2)^2\} = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} \tag{E.3}$$

donde

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

Se puede comprobar que la matriz de rigidez $[k]$ es singular. Además, si consideramos que todos los componentes de desplazamiento son $x_1 = x_2 = x_3 = c$ (movimiento de cuerpo rígido), se ve que la energía potencial V es cero.

Para determinar las frecuencias naturales y los modos del sistema, expresamos el problema de valor eigen como

$$[[k] - \omega^2[m]]\vec{X} = \vec{0} \tag{E.5}$$

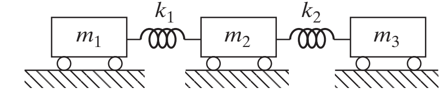


Figura 6.14 Sistema semidefinido.

Dado que $[k]$ es singular, no podemos encontrar su inversa $[k]^{-1}$ y la matriz dinámica $[D] = [k]^{-1}[m]$. Por consiguiente, podemos establecer el determinante de la matriz de coeficientes de $\vec{X}$ en la ecuación (E.5) igual a cero. Para $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$, esto produce

$$\begin{vmatrix} (k - \omega^2 m) & -k & 0 \\ -k & (2k - \omega^2 m) & -k \\ 0 & -k & (k - \omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \tag{E.6}$$

La expansión del determinante en la ecuación (E.6) conduce a

$$m^3\omega^6 - 4m^2k\omega^4 + 3mk^2\omega^2 = 0 \tag{E.7}$$

Si establecemos

$$\boldsymbol{\lambda} = \omega^2 \tag{E.8}$$

la ecuación (E.7) se reescribe como

$$m\boldsymbol{\lambda}\left(\boldsymbol{\lambda} - \frac{k}{m}\right)\left(\boldsymbol{\lambda} - \frac{3k}{m}\right) = 0 \tag{E.9}$$

Dado que $m \neq 0$, las raíces de la ecuación (E.9) son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_1 &= \omega_1^2 = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 &= \omega_2^2 = \frac{k}{m} \\ \boldsymbol{\lambda}_3 &= \omega_3^2 = \frac{3k}{m} \end{aligned} \tag{E.10}$$

Se observa que la primera frecuencia natural ω_1 es cero en la ecuación (E.10). Para hallar las formas de modo sustituimos los valores de ω_1, ω_2 y ω_3 en la ecuación (E.5) y resolvemos $\vec{X}^{(1)}$, $\vec{X}^{(2)}$, y $\vec{X}^{(3)}$, respectivamente. Para $\omega_1 = 0$, la ecuación (E.5) proporciona

$$\begin{aligned} kX_1^{(1)} - kX_2^{(1)} &= 0 \\ -kX_1^{(1)} + 2kX_2^{(1)} - kX_3^{(1)} &= 0 \\ -kX_2^{(1)} + kX_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{E.11}$$

Si fijamos el valor de un componente de $\vec{X}^{(1)}$, por ejemplo, $X_1^{(1)}$ como 1, la ecuación (E.11) se puede resolver para obtener

$$X_2^{(1)} = X_1^{(1)} = 1 \qquad \text{y} \qquad X_3^{(1)} = X_2^{(1)} = 1$$

Así, el primer modo (de cuerpo rígido) $\vec{X}^{(1)}$ correspondiente a $\omega_1 = 0$ está dado por

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.12}$$

Observe que el modo $\vec{X}^{(1)}$ representa la traslación de cuerpo rígido del sistema (todas las masas experimentan el mismo desplazamiento). Aunque la frecuencia natural ω_1 (o el valor eigen ω_1^2) es cero, la forma de modo correspondiente (o vector eigen) $\vec{X}^{(1)}$ no es cero.

Para $\omega_2 = (k/m)^{1/2}$, la ecuación (E.5) produce

$$\begin{aligned} -kX_2^{(2)} &= 0 \\ -kX_1^{(2)} + kX_2^{(2)} - kX_3^{(2)} &= 0 \\ -kX_2^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Si fijamos el valor de un componente de $\vec{X}^{(2)}$, por ejemplo, $X_1^{(2)}$ como 1, se puede resolver la ecuación (E.13) para obtener

$$X_2^{(2)} = 0 \quad \text{y} \quad X_3^{(2)} = -X_1^{(2)} = -1$$

Así que el segundo modo $\vec{X}^{(2)}$ correspondiente a $\omega_2 = (k/m)^{1/2}$ es

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{E.14}$$

Para $\omega_3 = (3k/m)^{1/2}$, la ecuación (E.5) da

$$\begin{aligned} -2kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} &= 0 \\ -kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} - kX_3^{(3)} &= 0 \\ -kX_2^{(3)} - 2kX_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Si fijamos el valor de un componente de $\vec{X}^{(3)}$, por ejemplo, $X_1^{(3)}$, se puede resolver la ecuación (E.15) para obtener

$$X_2^{(3)} = -2X_1^{(3)} = -2 \quad \text{y} \quad X_3^{(3)} = -\frac{1}{2}X_2^{(3)} = 1$$

Así que el tercer modo $\vec{X}^{(3)}$ correspondiente a $\omega_3 = (3k/m)^{1/2}$ está dado por

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.16}$$

■

6.13 Vibración libre de sistemas no amortiguados

La ecuación de movimiento para la vibración libre de un sistema no amortiguado se puede expresar de forma matricial como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0} \tag{6.95}$$

La solución más común de la ecuación (6.95) se expresa como una combinación lineal de todas las posibles soluciones dadas por las ecuaciones (6.56) y (6.62) como

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \tag{6.96}$$

donde $\vec{X}^{(i)}$ es el vector modal i-ésimo y ω_i es la frecuencia natural correspondiente, A_i y ϕ_i son constantes. Las constantes A_i y ϕ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) se evalúan a partir de las condiciones iniciales especificadas del sistema. Si

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \tag{6.97}$$

indican los desplazamientos y velocidades iniciales impartidos al sistema, las ecuaciones (6.96) dan

$$\vec{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \cos \phi_i \tag{6.98}$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} A_i \omega_i \operatorname{sen} \phi_i \tag{6.99}$$

Las ecuaciones (6.98) y (6.99) representan, en forma escalar, $2n$ ecuaciones simultáneas las cuales se pueden resolver para determinar los n valores de A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y los n valores de ϕ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Ejemplo 6.15 Análisis de vibración de un sistema de resorte-masa

Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.12 correspondiente a las condiciones iniciales $\dot{x}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), $x_1 = (0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$. Suponga que $k_i = k$ y $m_i = m$ para $i = 1, 2, 3$.

Solución:

Método: Suponga la respuesta de vibración libre como una suma de modos naturales.

Las frecuencias naturales y modos del sistema son (vea el ejemplo 6.11):

$$\omega_1 = 0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = 1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_3 = 1.8025\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix}$$

donde el primer componente de cada forma de modo se supone como unitario por simplicidad. La aplicación de las condiciones iniciales, ecuaciones (6.98) y (6.99), conduce a

$$A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3 = x_{10} \tag{E.1}$$

$$1.8019 A_1 \cos \phi_1 + 0.4450 A_2 \cos \phi_2 - 1.2468 A_3 \cos \phi_3 = 0 \tag{E.2}$$

$$2.2470 A_1 \cos \phi_1 - 0.8020 A_2 \cos \phi_2 + 0.5544 A_3 \cos \phi_3 = 0 \tag{E.3}$$

$$-0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 \text{ sen } \phi_1 - 1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \text{ sen } \phi_2 - 1.8025\sqrt{\frac{k}{m}}A_3 \text{ sen}\phi_3 = 0 \tag{E.4}$$

$$-0.80192\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 \text{ sen } \phi_1 - 0.55496\sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \text{ sen } \phi_2 + 2.2474\sqrt{\frac{k}{m}}A_3 \text{ sen } \phi_3 = 0 \tag{E.5}$$

$$-1.0\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 \text{ sen } \phi_1 + 1.0\sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \text{ sen } \phi_2 - 1.0\sqrt{\frac{k}{m}}A_3 \text{ sen } \phi_3 = 0 \tag{E.6}$$

La solución de las ecuaciones (E.1) a (E.6) está dada por[9] $A_1 = 0.1076x_{10}$, $A_2 = 0.5431x_{10}$, $A_3 = 0.3493x_{10}$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ y $\phi_3 = 0$. Así que la solución de vibración libre del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_{10}\bigg[& 0.1076 \cos\left(0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & + 0.5431 \cos\left(1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & + 0.3493 \cos\left(1.8025\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\bigg] \end{aligned} \tag{E.7}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_{10}\bigg[& 0.1939 \cos\left(0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & + 0.2417 \cos\left(1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & - 0.4355 \cos\left(1.8025\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\bigg] \end{aligned} \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = x_{10}\bigg[& 0.2418 \cos\left(0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & - 0.4356 \cos\left(1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ & + 0.1937 \cos\left(1.8025\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\bigg] \end{aligned} \tag{E.9}$$

■

---

[9] Observe que las ecuaciones (E.1) a (E.3) se pueden considerar como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $A_1 \cos \phi_1$, $A_2 \cos \phi_2$ y $A_3 \cos \phi_3$, en tanto que las ecuaciones (E.4) a (E.6) se pueden considerar como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas

$$\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 \text{ sen } \phi_1, \quad \sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \text{ sen } \phi_2, \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{k}{m}}A_3 \text{ sen } \phi_3.$$

6.14 Vibración forzada de sistemas no amortiguados mediante análisis modal

Cuando en un sistema de varios grados de libertad actúan fuerzas externas, el sistema experimenta vibración forzada, Para un sistema con n coordenadas o grados de libertad, las ecuaciones que rigen el movimiento son un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden. La solución de estas ecuaciones se complica cuando el grado de libertad (n) del sistema es grande y/o cuando las funciones forzadas son no periódicas.[10] En tales casos, se puede utilizar un método más conveniente conocido como *análisis modal* para resolver el problema. En este método se utiliza el teorema de expansión, y los desplazamientos de las masas se expresan como combinaciones lineales de los modos normales del sistema. Esta transformación lineal desacopla las ecuaciones de movimiento de modo que obtenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales desacopladas de segundo orden. La solución de estas ecuaciones, la cual equivale a la solución de las ecuaciones de n sistemas de un solo grado de libertad, es fácil de obtener. A continuación consideraremos el procedimiento de análisis modal.

Análisis modal. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad sometido a fuerzas externas está dado por

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.100}$$

donde $\vec{F}$ es el vector de fuerzas externas arbitrarias. Para resolver la ecuación (6.100) mediante análisis modal primero se tiene que resolver el problema de valor eigen.

$$\omega^2[m]\vec{X} = [k]\vec{X} \tag{6.101}$$

y encontrar las frecuencias naturales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ y los modos normales correspondientes $\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \ldots, \vec{X}^{(n)}$. De acuerdo con el teorema de expansión, el vector de solución de la ecuación (6.100) se expresa como una combinación lineal de los modos normales

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)} \tag{6.102}$$

donde $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$ son coordenadas generalizadas dependientes del tiempo, también conocidas como *coordenadas principales* o *coeficientes de participación modal*. Si definimos una matriz modal $[X]$ en la cual la columna j-ésima es el vector $\vec{X}^{(j)}$, es decir,

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(2)} \cdots \vec{X}^{(n)}] \tag{6.103}$$

La ecuación (6.102) se puede reescribir como

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t) \tag{6.104}$$

donde

$$\vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \tag{6.105}$$

[10] En la referencia [6.15] se considera la respuesta dinámica de sistemas de varios grados de libertad con propiedades estadísticas.

Dado que [X] no es una función del tiempo, de la ecuación (6.104) obtenemos

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [X]\ddot{\vec{q}}(t) \tag{6.106}$$

Utilizando las ecuaciones (6.104) y (6.106), la ecuación (6.100) se escribe como

$$[m][X]\ddot{\vec{q}} + [k][X]\vec{q} = \vec{F} \tag{6.107}$$

Premultiplicando la ecuación (6.107) por $[X]^T$ obtenemos

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \tag{6.108}$$

Si los modos normales se normalizan de acuerdo con las ecuaciones (6.74) y (6.75), tenemos

$$[X]^T[m][X] = [I] \tag{6.109}$$

$$[X]^T[k][X] = [\nwarrow \omega^2 \searrow] \tag{6.110}$$

Si definimos el vector de fuerzas generalizadas $\vec{Q}(t)$ asociado con las coordenadas generalizadas $\vec{q}(t)$ como

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t) \tag{6.111}$$

La ecuación (6.108) se expresa, utilizando las ecuaciones (6.109) y (6.110), como

$$\ddot{\vec{q}}(t) + [\nwarrow \omega^2 \searrow]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \tag{6.112}$$

La ecuación (6.112) denota un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas de segundo orden[11]

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.113}$$

---

[11] Se puede representar el vector de solución $\vec{x}(t)$ con sólo los r primeros ($r < n$) vectores modales (en lugar de n vectores como en la ecuación (6.102)):

$$\underset{n\times 1}{\vec{x}(t)} = \underset{n\times r}{[X]}\underset{r\times 1}{\vec{q}(t)}$$

donde

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\ \vec{X}^{(2)}\ \cdots\ \vec{X}^{(r)}] \qquad \text{y} \qquad \vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_r(t) \end{Bmatrix}$$

Esto conduce a sólo r ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

en lugar de n ecuaciones. La solución resultante $\vec{x}(t)$ será una solución aproximada. Este procedimiento se llama *método de desplazamiento de modo*. En el problema 6.92 se indica un método alterno, el *método de aceleración de modo*, para determinar soluciones aproximadas.

Se ve que la forma de las ecuaciones (6.113) es precisamente la de la ecuación diferencial que describe el movimiento de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad. La solución de las ecuaciones (6.113) se expresa (vea la ecuación (4.31)) como

$$q(t) = q_i(0)\cos\omega_i t + \left(\frac{\dot{q}(0)}{\omega_i}\right)\text{sen}\,\omega_i t + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t Q_i(\tau)\,\text{sen}\,\omega_i(t-\tau)d\tau,\quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.114}$$

Los desplazamientos generalizados iniciales $q_i(0)$ y las velocidades generalizadas iniciales $\dot{q}_i(0)$ se obtienen con los valores iniciales de los desplazamientos físicos $x_i(0)$ y las velocidades físicas $\dot{x}_i(0)$ (vea el problema 6.94):

$$\vec{q}(0) = [X]^T[m]\vec{x}(0) \tag{6.115}$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = [X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) \tag{6.116}$$

donde

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix},$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix}$$

Una vez que se determinan los desplazamientos generalizados $q_i(t)$, con las ecuaciones (6.114) a (6.116), se determinan los desplazamientos físicos $x_i(t)$ con la ayuda de la ecuación (6.104).

Ejemplo 6.16 Respuesta de vibración obtenida por medio de un análisis modal

Utilizando el análisis modal, encuentre la respuesta de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

Suponga los datos siguientes: $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $k_1 = 30$, $k_2 = 5$, $k_3 = 0$, y

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Solución: Las frecuencias naturales y modos normales del sistema son (vea el ejemplo 5.3)

$$\omega_1 = 1.5811, \qquad \vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)}$$

$$\omega_2 = 2.4495, \qquad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)}$$

donde $X_1^{(1)}$ y $X_1^{(2)}$ son constantes arbitrarias. Ortogonalizando los modos normales con respecto a la matriz de masa, podemos hallar los valores de $X_1^{(1)}$ y $X_1^{(2)}$ como

$$\vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1 \Rightarrow (X_1^{(1)})^2 \{1 \quad 2\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 1$$

o $X_1^{(1)} = 0.2673$

$$\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} = 1 \Rightarrow (X_1^{(2)})^2 \{1 \quad -5\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} = 1$$

o $X_1^{(2)} = 0.1690$

Así que la matriz modal se escribe como

$$[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.1690 \\ 0.5346 & -0.8450 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

Utilizando

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t) \tag{E.4}$$

La ecuación (E.1) se expresa como (vea la ecuación (6.112)):

$$\ddot{\vec{q}}(t) + [\nwarrow \omega^2 \searrow]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) = \vec{0} \tag{E.5}$$

donde $\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F} = \vec{0}$. La ecuación (E.5) se escribe en forma escalar como

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{E.6}$$

La solución de la ecuación (E.6) está dada por (vea la ecuación 2.18):

$$q_i(t) = q_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i} \text{sen } \omega_i t \tag{E.7}$$

donde q_{i0} y $\dot{q}_{i0}$ indican los valores iniciales de $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$, respectivamente. Utilizando las condiciones iniciales de la ecuación (E.2), podemos determinar [(vea las ecuaciones (6.115) y (6.116)]:

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_{10}(0) \\ q_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T[m]\,\vec{x}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.5346 \\ 0.1690 & -0.8450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.673 \\ 1.690 \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{10}(0) \\ \dot{q}_{20}(0) \end{Bmatrix} = [X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.9}$$

Las ecuaciones (E.7) y (E.9) conducen a

$$q_1(t) = 2.673 \cos 1.5811t \tag{E.10}$$

$$q_2(t) = 1.690 \cos 2.4495t \tag{E.11}$$

Utilizando las ecuaciones (E.4) obtenemos los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 como

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.1690 \\ 0.5346 & -0.8450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.673 \cos 1.5811t \\ 1.690 \cos 2.4495t \end{Bmatrix}$$

o

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7145 \cos 1.5811t + 0.2856 \cos 2.4495t \\ 1.4280 \cos 1.5811t - 1.4280 \cos 2.4495t \end{Bmatrix} \tag{E.12}$$

Se ve que esta solución es idéntica a la obtenida en el ejemplo 5.3 y trazada en el ejemplo 5.17.

■

Ejemplo 6.17 Respuesta de vibración forzada de un martillo de forja

La fuerza que actúa en la pieza de trabajo del martillo de forja que se muestra en la figura 5.51 producida por el impacto del martillo se puede representar como un pulso rectangular, como a su vez aparece en la figura 6.15(a). Encuentre la vibración resultante del sistema por los siguientes datos: masa de la pieza de trabajo, yunque y marco (m_1) = 200 Mg, masa del bloque de cimentación (m_2) = 250 Mg, rigidez de la base elástica (k_1) = 150 MN/m y rigidez del suelo (k_2) = 75 MN/m. Suponga que los desplazamientos iniciales y las velocidades iniciales de las masas son cero.

Solución: El martillo de forja se puede modelar como un sistema de dos grados de libertad, aspecto que se aprecia en la figura 6.15(b). Las ecuaciones de movimiento del sistema se expresan como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}(t) \tag{E.1}$$

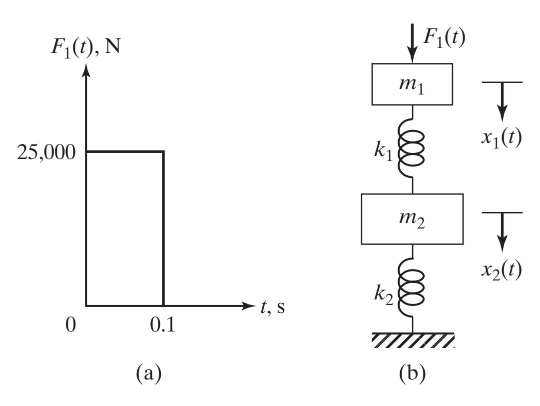


Figura 6.15 Impacto provocado por un martillo forja.

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix} \text{Mg}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \text{MN/m}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frecuencias naturales y formas de modo: Las frecuencias naturales del sistema se pueden hallar resolviendo la ecuación de frecuencia

$$|-\omega^2[m] + [k]| = \left| -\omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} 10^5 + \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} 10^6 \right| = 0 \tag{E.2}$$

como

$$\omega_1 = 12.2474 \text{ rad/s y } \omega_2 = 38.7298 \text{ rad/s}$$

Las formas de modo se pueden encontrar como

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Ortonormalización de las formas de modo: Las formas de modo se suponen como

$$\vec{X}^{(1)} = a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}^{(2)} = b \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

donde a y b son constantes. Las constantes a y b se determinan normalizando los vectores $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$ como

$$[X]^T [m] [X] = [I] \tag{E.3}$$

donde $[X] = [\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(2)}]$ indica la matriz modal. La ecuación (E.3) resulta en $a = 1.667 \times 10^{-3}$ y $b = 1.4907 \times 10^{-3}$, lo que significa que la nueva matriz modal (con formas de modo normalizadas) se escribe como

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.4907 \\ 1.3334 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Respuesta en función de coordenadas generalizadas: Dado que las dos masas m_1 y m_2 están en reposo en el instante $t = 0$, las condiciones iniciales son $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, por consiguiente las ecuaciones (6.115) y (6.116) proporcionan $q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Así que las coordenadas generalizadas están dadas por la solución de las ecuaciones

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \text{ sen } \omega_i(t - \tau)\, d\tau, i = 1, 2 \tag{E.4}$$

donde

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) \tag{E.5}$$

o

$$\begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.3334 \\ 1.4907 & -1.4907 \end{bmatrix} 10^{-3} \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} 1.6667 \times 10^{-3} F_1(t) \\ 1.4907 \times 10^{-3} F_1(t) \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

con $F_1(t) = 25\,000$ N durante el rango $0 \le t \le 0.1$ s y 0 para $t > 0.1$ s. Los desplazamientos de las masas se pueden hallar a partir de la ecuación (6.104) como

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [X]\, \vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} 1.6667 q_1(t) + 1.4907 q_2(t) \\ 1.3334 q_1(t) - 1.4907 q_2(t) \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ m} \tag{E.7}$$

donde

$$q_1(t) = 3.4021 \int_0^t \text{sen } 12.2474\, (t - \tau)\, d\tau = 0.2778\, (1 - \cos 12.2474\, t)$$

$$q_2(t) = 0.9622 \int_0^t \text{sen } 38.7298\, (t - \tau)\, d\tau = 0.02484\, (1 - \cos 38.7298\, t) \tag{E.8}$$

Observe que la solución proporcionada por las ecuaciones (E.8) es válida durante $0 \le 0.1$ s. Para $t > 0.1$ s, no hay fuerza alguna aplicada, de ahí que la solución de vibración libre de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad (ecuación 2.18) da la respuesta para $q_1(t)$ y $q_2(t)$ con $q_1(0.1)$ y $\dot{q}_1(0.1)$, $q_2(0.1)$ y $\dot{q}_2(0.1)$ como condiciones iniciales para $q_1(t)$ y $q_2(t)$, respectivamente.

■

6.15 Vibración forzada de sistemas viscosamente amortiguados

El análisis modal, tal como se presentó en la sección 6.14, es válido sólo para sistemas no amortiguados. En muchos casos, la influencia del amortiguamiento en la respuesta de un sistema vibratorio es mínima y se puede omitir. Sin embargo, debe considerarse si la respuesta del sistema se requiere durante un lapso de tiempo relativamente largo comparado con los periodos naturales del sistema. Además, si la frecuencia de excitación (en el caso de fuerza periódica) es igual o se acerca a las frecuencias naturales del sistema, el amortiguamiento es de primordial importancia y debe ser tomado en cuenta. En general, dado que los efectos no se conocen con anticipación, el amortiguamiento debe considerarse en el análisis de vibración de cualquier sistema. En esta sección analizaremos las ecuaciones de movimiento de un sistema amortiguado de varios grados de libertad y su solución utilizando las ecuaciones de Lagrange. Si el sistema tiene amortiguamiento viscoso, su movimiento será resistido por una fuerza cuya magnitud es proporcional a la de la velocidad pero en la dirección opuesta. Es conveniente introducir una función R, conocida como función de disipación de Rayleigh, al derivar las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Lagrange [6.7]. Esta función se define como

$$R = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[c]\dot{\vec{x}} \tag{6.117}$$

donde la matriz $[c]$ se llama *matriz de amortiguamiento* y se define positiva, como las matrices de masa y rigidez. Las ecuaciones de Lagrange, en este caso [6.8], se escriben como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.118}$$

donde F_i es la fuerza aplicada a la masa m_i. Sustituyendo las ecuaciones (6.30), (6.34) y (6.117) en la ecuación (6.118), obtenemos las ecuaciones de movimiento de un sistema amortiguado de varios grados de libertad en forma matricial:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.119}$$

Por sencillez, veremos un sistema especial para el cual la matriz de amortiguamiento se expresa como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez:

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k] \tag{6.120}$$

donde α y β son constantes. Esto se conoce como *amortiguamiento proporcional* porque $[c]$ es proporcional a una combinación lineal de $[m]$ y $[k]$. Sustituyendo la ecuación (6.120) en la ecuación (6.119), obtenemos

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [\alpha[m] + \beta[k]]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.121}$$

Expresando el vector de solución $\vec{x}$ como una combinación lineal de los modos naturales del sistema no amortiguado, como en el caso de la ecuación (6.104),

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t) \tag{6.122}$$

La ecuación (6.121) se reescribe como

$$[m][X]\ddot{\vec{q}}(t) + [\alpha[m] + \beta[k]][X]\,\dot{\vec{q}}(t) + [k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}(t) \tag{6.123}$$

La premultiplicación de la ecuación (6.123) por $[X]^T$ conduce a

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [\alpha[X]^T[m][X] + \beta[X]^T[k][X]]\dot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \tag{6.124}$$

Si los vectores eigen $\vec{X}^{(j)}$ se normalizan de acuerdo con las ecuaciones (6.74) y (6.75), la ecuación (6.124) se reduce a

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \left[\alpha[I] + \beta\left[\nwarrow\omega^2\searrow\right]\right]\dot{\vec{q}}(t) + \left[\nwarrow\omega^2\searrow\right]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t)$$

es decir,

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + \omega_i^2\beta)\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.125}$$

donde ω_i es la frecuencia natural i-ésima del sistema no amortiguado y

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\,\vec{F}(t) \tag{6.126}$$

Escribiendo

$$\alpha + \omega_i^2\beta = 2\zeta_i\omega_i \tag{6.127}$$

donde ζ_i se conoce como *relación de amortiguamiento modal* para el modo normal *i-ésimo*. Las ecuaciones (6.125) se rescriben como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.128}$$

Se ve que cada una de las n ecuaciones representadas por esta expresión está desacoplada de todas las demás. Por consiguiente, podemos determinar la respuesta del modo i-ésimo de la misma manera que la de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad. La solución de las ecuaciones (6.128), cuando $\zeta_i < 1$, se expresa como

$$\begin{aligned} q(t) = {} & e^{-\zeta_i\omega_i t}\left\{\cos\omega_{di}t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}\,\text{sen}\,\omega_{di}t\right\}q_i(0) \\ & + \left\{\frac{1}{\omega_{di}}e^{-\zeta_i\omega_i t}\,\text{sen}\,\omega_{di}t\right\}\dot{q}_0(0) \\ & + \frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t Q_i(\tau)e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\,\text{sen}\,\omega_{di}(t-\tau)\,d\tau, \\ & i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{6.129}$$

donde

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \tag{6.130}$$

Observe los siguientes aspectos de estos sistemas:

1. La identificación de los orígenes y magnitud del amortiguamiento es difícil en la mayoría de los problemas prácticos. En el sistema puede haber más de un tipo de amortiguamiento, de Coulomb, viscoso e histerético. Además, no se conoce la naturaleza exacta del amortiguamiento, como lineal, cuadrática, cúbica u otro tipo de variación. Aun cuando el origen y naturaleza del amortiguamiento se conozcan, obtener la magnitud precisa es muy difícil. Para algunos sistemas prácticos, pueden haber disponibles valores de amortiguamiento experimentalmente determinados para uso en un análisis de vibración. Hay algún tipo de amortiguamiento, en forma de amortiguamiento estructural, en estructuras automotrices, aeroespaciales y de máquinas. El amortiguamiento se introduce deliberadamente en ciertas aplicaciones prácticas como los sistemas de suspensión de vehículos, el tren de aterrizaje de aviones y en sistemas aislantes de máquinas. Debido a que el análisis de sistemas amortiguados implica tediosas manipulaciones matemáticas, en muchos estudios de vibración el amortiguamiento se omite o se considera algo proporcional.
2. Caughey [6.9] demostró que la condición dada por la ecuación (6.120) es suficiente mas no necesaria para la existencia de modos normales en sistemas amortiguados. La condición necesaria es que la transformación que diagonaliza la matriz de amortiguamiento también desacople las ecuaciones de movimiento acopladas. Esta condición es menos restrictiva que la ecuación (6.120) y abarca muchas posibilidades.
3. En el caso general de amortiguamiento, la matriz de amortiguamiento no se puede diagonalizar al mismo tiempo que las matrices de masa y rigidez. En este caso, los valores eigen del sistema son reales y negativos o complejos con partes reales negativas. Los valores eigen complejos existen como pares conjugados: los vectores eigen asociados también se componen de pares conjugados complejos. Un procedimiento común para determinar la solución del problema de valor eigen de un sistema amortiguado implica la transformación de las n ecuaciones de movimiento acopladas de segundo orden en $2n$ ecuaciones desacopladas de primer orden [6.6].
4. Los límites de error y los métodos numéricos en el análisis modal de sistemas dinámicos se abordan en las referencias [6.11, 6.12].

Ejemplo 6.18 Ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico

Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 6.16.

Solución:

Método: Aplique las ecuaciones de Lagrange junto con la función de disipación de Rayleigh.

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) \tag{E.1}$$

La energía potencial tiene la forma

$$V = \frac{1}{2}[k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3(x_3 - x_2)^2] \tag{E.2}$$

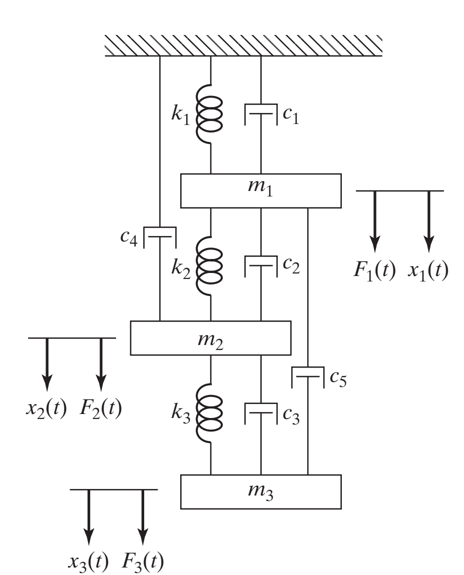


Figura 6.16 Sistema dinámico de tres grados de libertad.

y la función de disipación de Rayleigh es

$$R = \frac{1}{2}[c_1\dot{x}_1^2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + c_4\dot{x}_2^2 + c_5(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2] \tag{E.3}$$

Las ecuaciones de Lagrange se escriben como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{E.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (E.1) a (E.3) en la ecuación (E.4), obtenemos las ecuaciones diferenciales de movimiento

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{E.5}$$

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{E.6}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_5 \end{bmatrix} \tag{E.7}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{E.8}$$

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{E.9}$$

■

Ejemplo 6.19 Respuesta de estado estable de un sistema forzado

Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 6.16 cuando las masas se someten a las fuerzas armónicas simples $F_1 = F_2 = F_3 = F_0 \cos \omega t$, donde $\omega = 1.75\sqrt{k/m}$. Suponga que $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $c_4 = c_5 = 0$, y la relación de amortiguamiento en cada modo normal está dada por $\zeta_i = 0.01$, $i = 1, 2, 3$.

Solución: Las frecuencias naturales (no amortiguadas) del sistema (vea el ejemplo 6.11) son

$$\omega_1 = 0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = 1.2471\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_3 = 1.8025\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.1}$$

y los modos $[m]$-ortonormales correspondientes (vea el ejemplo 6.12) son

$$\vec{X}^{(1)} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{X}^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Por lo tanto, el vector modal se expresa como

$$[X] = [\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(2)}\vec{X}^{(3)}] = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.3280 & 0.7370 & 0.5911 \\ 0.5911 & 0.3280 & -0.7370 \\ 0.7370 & -0.5911 & 0.3280 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

El vector de fuerza generalizado

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.3280 & 0.5911 & 0.7370 \\ 0.7370 & 0.3280 & -0.5911 \\ 0.5911 & -0.7370 & 0.3280 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} \cos \omega t \tag{E.4}$$

se puede obtener donde

$$Q_{10} = 1.6561\frac{F_0}{\sqrt{m}}, \qquad Q_{20} = 0.4739\frac{F_0}{\sqrt{m}}, \qquad Q_{30} = 0.1821\frac{F_0}{\sqrt{m}} \tag{E.5}$$

Si las coordenadas generalizadas o los factores de participación modal correspondientes a los tres modos principales se indican como $q_1(t)$, $q_2(t)$ y $q_3(t)$, las ecuaciones de movimiento se expresan como

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{E.6}$$

La solución de estado estable de la ecuación (E.6) se escribe como

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t - \phi), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{E.7}$$

donde

$$q_{i0} = \frac{Q_{i0}}{\omega_i^2} \frac{1}{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \tag{E.8}$$

y

$$\phi_i = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \right\} \tag{E.9}$$

Sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (E.5) y (E.1) en las ecuaciones (E.8) y (E.9) obtenemos

$$\begin{aligned} q_{10} &= 0.57815 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \qquad \phi_1 = \tan^{-1}(-0.00544) \\ q_{20} &= 0.31429 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \qquad \phi_2 = \tan^{-1}(-0.02988) \\ q_{30} &= 0.92493 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \qquad \phi_3 = \tan^{-1}(0.33827) \end{aligned} \tag{E.10}$$

Finalmente, la respuesta de estado estable se determina utilizando la ecuación (6.122).

■

6.16 Autoexcitación y análisis de estabilidad

En varios sistemas amortiguados, la fricción produce amortiguamiento negativo en lugar de amortiguamiento positivo. Esto conduce a la inestabilidad (o vibración autoexcitada) del sistema. Por lo común, para un sistema de *n* grados de libertad que se muestra en la figura 6.17, las ecuaciones de movimiento serán un sistema de *n* ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (como las dadas por las ecuaciones (6.119) o (6.128)):

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{6.131}$$

El método presentado en la sección 5.8 se puede ampliar para estudiar la estabilidad del sistema regido por la ecuación (6.131). Por consiguiente, suponemos una solución de la forma

$$x_j(t) = C_j e^{st}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

o

$$\vec{x}(t) = \vec{C} e^{st} \tag{6.132}$$

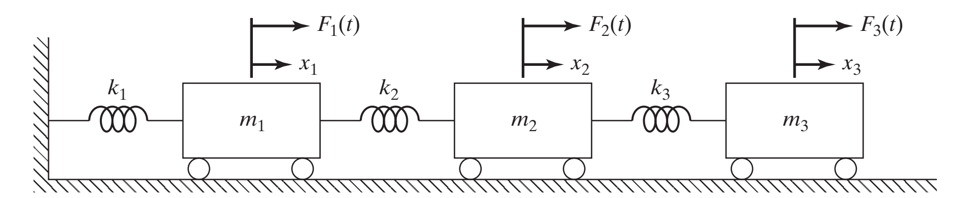


Figura 6.17 Sistema de varios grados de libertad.

donde s es un número complejo que se tiene que determinar, C_j es la amplitud de x_j y

$$\vec{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}$$

La parte real de s determina el amortiguamiento y su parte imaginaria proporciona la frecuencia natural del sistema. La sustitución de la ecuación (6.132) en las ecuaciones de vibración libre (obtenidas con $\vec{F} = \vec{0}$ en la ecuación (6.131)) conduce a

$$([m]s^2 + [c]s + [k])\vec{C}e^{st} = \vec{0} \tag{6.133}$$

Para una solución no trivial de C_j, el determinante de los coeficientes de C_j se establece igual a cero, lo que conduce a la "ecuación característica", semejante a la ecuación (6.63):

$$D(s) = \left|[m]s^2 + [c]s + [k]\right| = 0 \tag{6.134}$$

La expansión de la ecuación (6.134) conduce a un polinomio en s del orden $m = 2n$, el cual se puede expresar en la forma

$$D(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_{m-1}s + a_m = 0 \tag{6.135}$$

La estabilidad o inestabilidad del sistema depende de las raíces de la ecuación polinomial, $D(s) = 0$. Indíquense las raíces de la ecuación (6.135) como

$$s_j = b_j + i\omega_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{6.136}$$

Si las partes reales de las raíces b_j son números negativos, habrá funciones de tiempo decadentes, $e^{b_j t}$, en la ecuación (6.132), por consiguiente la solución (sistema) será estable. Por otra parte, si una o más raíces s_j tienen una parte real positiva, entonces la solución de la ecuación (6.132) contendrá una o más funciones de tiempo exponencialmente crecientes $e^{b_j t}$, de ahí que la solución (sistema) será inestable. Si hay una raíz puramente imaginaria de la forma $s_j = i\omega_j$, conducirá a una solución oscilatoria $e^{i\omega_j t}$, la cual representa un caso límite entre estabilidad e inestabilidad. Si s_j es una raíz múltiple, la conclusión anterior prevalece a menos que sea un número puro imaginario, como $s_j = i\omega_j$. En este caso, la solución contiene funciones del tipo $e^{i\omega_j t}$, $te^{i\omega_j t}$, $t^2e^{i\omega_j t}$, . . . , las cuales se incrementan con el tiempo. Así que las raíces múltiples con valores puramente imaginarios indican la inestabilidad del sistema. Por lo tanto, para que un sistema lineal regido por la ecuación (6.131) sea estable, es necesario y suficiente que las raíces de la ecuación (6.135) tengan partes reales no positivas, y que, si hay alguna raíz puramente imaginaria, no debe aparecer como una raíz múltiple.

Dado que la búsqueda de las raíces de la ecuación polinomial (6.135) es un procedimiento largo y tedioso, se puede utilizar uno simplificado, conocido como criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz [6.13, 6.14] para investigar la estabilidad del sistema. Para aplicar este procedimiento, se define el siguiente determinante de orden m-ésimo T_m en función de los coeficientes de la ecuación polinomial (6.135) como

$$T_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2m-5} \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_m \end{vmatrix} \tag{6.137}$$

Entonces los siguientes subdeterminantes, indicados por las líneas de rayas en la ecuación (6.137), se definen:

$$T_1 = a_1 \tag{6.138}$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \tag{6.139}$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\vdots \tag{6.140}$$

Al construir estos subdeterminantes, todos los coeficientes a_i con $i > m$ o $i < 0$ tienen que ser reemplazados por ceros. De acuerdo con el criterio de Routh-Hurwitz, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema es que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ deben ser positivos y también todos los determinantes $T_1, T_2, \ldots, T_m$ deben ser positivos.

6.17 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 6.20 Solución de un problema de valor eigen

Encuentre los valores eigen y los vectores eigen de la matriz (vea el ejemplo 6.11):

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
% Ex 6.20
>> A = [1 1 1; 1 2 2; 1 2 3]
A =
     1       1       1
     1       2       2
     1       2       3
>> [V, D] = eig(A)
V =
     0.5910        0.7370       0.3280
    -0.7370        0.3280       0.5910
     0.3280       -0.5910       0.7370
D =
     0.3080             0            0
          0        0.6431            0
          0             0       5.0489
```

■

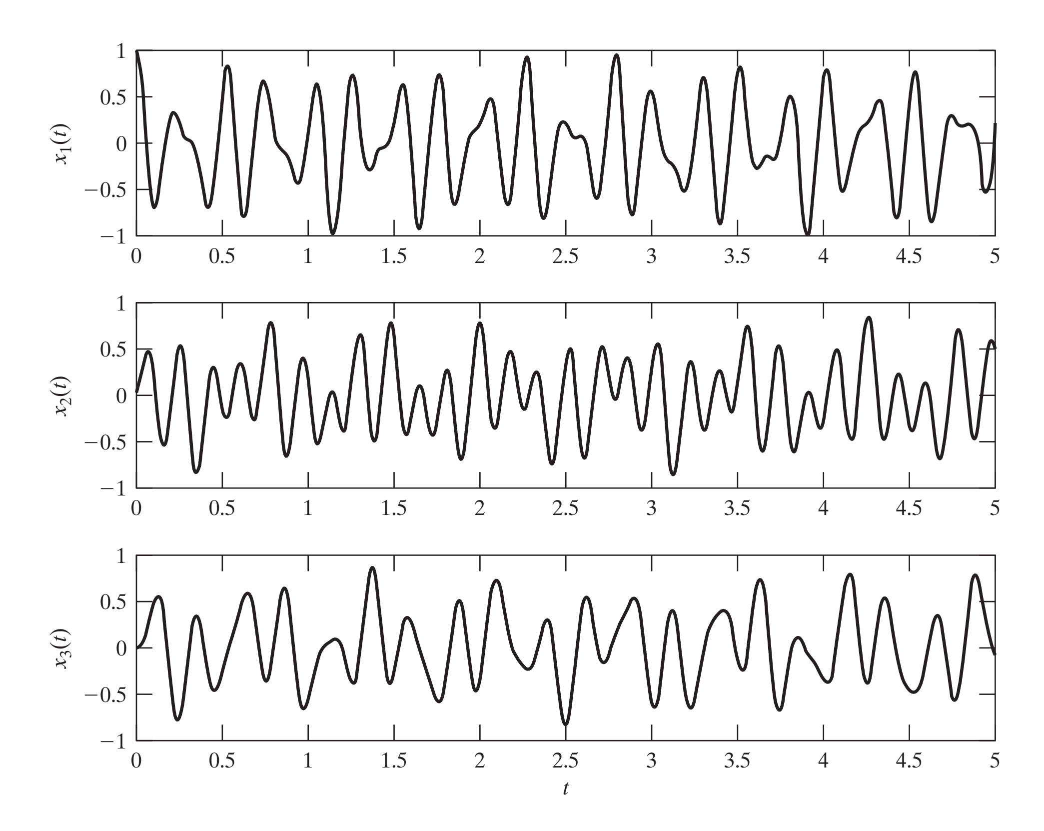
Ejemplo 6.21 Respuesta de vibración libre de un sistema de varios grados de libertad

Trace la respuesta de vibración libre, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ del sistema considerado en el ejemplo 6.15 para los siguientes datos: $x_{10} = 1.0$, $k = 4000$ y $m = 10$.

Solución: Las ecuaciones (E.7) a (E.9) del ejemplo 6.15 dan la respuesta de vibración libre de las masas, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

```
% Ex6_21.m
x10 = 1.0;
k = 4000;
m = 10;
for i = 1: 1001
    t(i) = 5* (i-1) / 1000;
    x1 (i) = x10 * ( 0.1076 * cos (0.44504 * sqrt (k/m) * t(i)) +
         0.5431 * cos (1.2471*sqrt(k/m) *t(i)) + 0.3493 *
         cos (1.8025*sqrt (k/m) *t(i)) );
    x2 (i) = x10 * ( 0.1939 * cos (0.44504 * sqrt (k/m) * t(i)) +
         0.2417 * cos (1.2471*sqrt (k/m) *t(i)) - 0.4355 *
         cos (1.8025*sqrt (k/m) *t(i)) );
    x3 (i) = x10 * ( 0.2418 * cos (0.44504 * sqrt(k/m) * t(i)) -
         0.4356 * cos (1.2471*sqrt (k/m) *t(i)) + 0.1937 *
         cos (1.8025*sqrt (k/m) *t(i)) );
end
subplot (311);
plot (t, x1);
ylabel ('x1 (t) ');
subplot (312);
plot (t, x2);
ylabel ('x2 (t) ');
subplot (313);
plot (t, x3);
ylabel ('x3 (t) ');
xlabel ('t');
```

■



■

Ejemplo 6.22 Respuesta de vibración forzada de un sistema de varios grados de libertad

Encuentre y trace la respuesta de vibración forzada del martillo de forja considerado en el ejemplo 6.17 resolviendo las ecuaciones diferenciales regentes. Suponga que las condiciones iniciales son cero.

Solución: Las ecuaciones regentes están dadas por

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \tag{E.1}$$

con

$$[m] = 10^5\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \qquad [k] = 10^6\begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix}, \qquad \vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde $F_1(t)$ es una función escalonada de magnitud 25 000 N y duración $0 \le t \le 0.1$ s.

Las ecuaciones (E.1) se pueden expresar como un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas como

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F_1}{m_1} - \frac{k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_1}{m_1}y_3$$

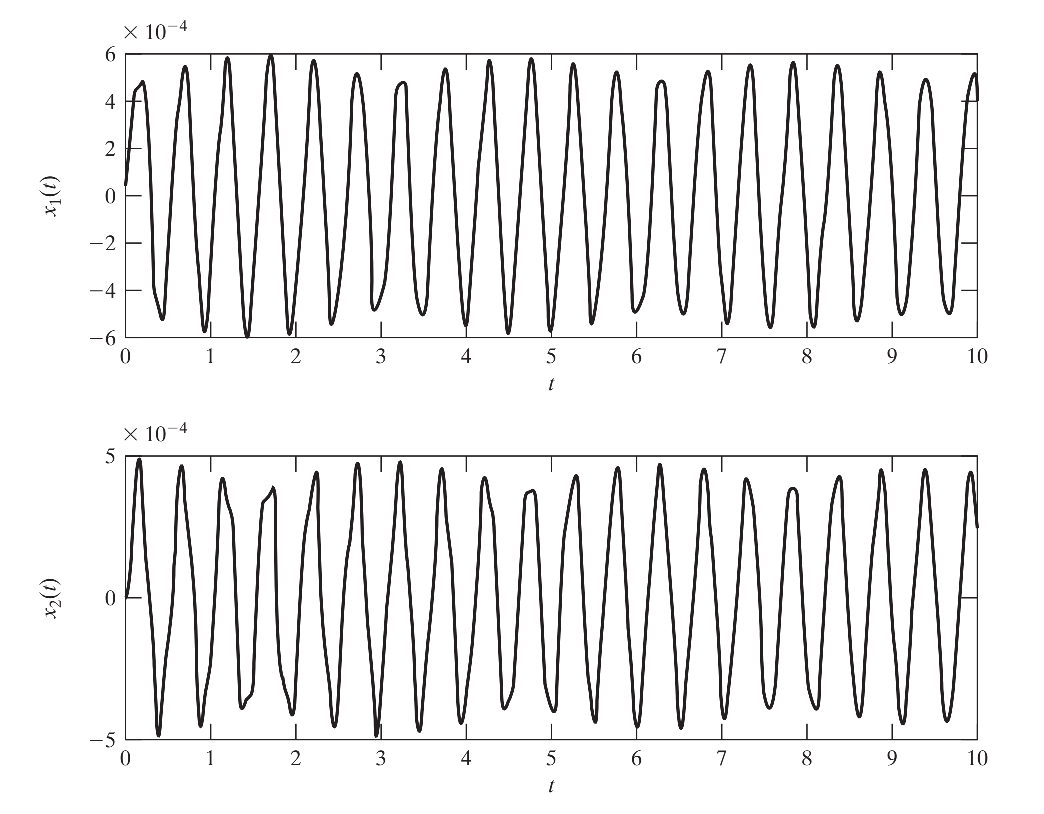
$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{k_1}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_3$$

donde $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $m_1 = 2 \times 10^5$, $m_2 = 2.5 \times 10^5$, $k_1 = 150 \times 10^6$ y $k_2 = 225 \times 10^6$.

Utilizando los valores iniciales de todas las $y_i = 0$, se obtienen los siguientes resultados:

```
% Ex6_22.m
% Este programa utilizará la función dfunc6_21.m, deberán
% estar en la misma carpeta
tspan = [0: 0.001: 10];
y0 = [0; 0; 0; 0];
[t, y] = ode23 ('dfunc6_21', tspan, y0);
subplot (211);
plot (t, y(:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x1 (t) ');
subplot (212);
plot (t, y(:, 3));
xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t) ');

% dfunc6_21.m
function f = dfunc6_21 (t, y)
f = zeros (4, 1);
m1 = 2*1e5;
m2 = 2.5*1e5;
k1 = 150 * 1e6;
k2 = 225 * 1e6;
F1 = 25000 * (stepfun (t, 0) - stepfun (t, 0.1));
f(1) = y(2);
f(2) = F1/m1 + k1 * y(3) /m1 - k1 * y(1) /m1;
f(3) = y(4);
f(4) = -k2 * y(3) /m2 + k1 * y(1) /m2;
```



■

Ejemplo 6.23 Raíces de una ecuación polinomial

Utilizando MATLAB, encuentre las raíces del polinomio

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Solución:

```
>> roots ([1 -6 11 -6])
ans =
    3.0000
    2.0000
    1.0000
>>
```

■

Ejemplo 6.24 Respuesta de vibración forzada de un sistema amortiguado

Encuentre la respuesta de vibración forzada de un sistema amortiguado de varios grados de libertad con ecuaciones de movimiento

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{f} \tag{E.1}$$

con

$$[m] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad [c] = 100\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad [k] = 1000\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_0 \cos \omega t$$

con $F_0 = 50$ y $\omega = 50$. Suponga condiciones iniciales cero.

Solución: Las ecuaciones (E.1) se pueden volver a escribir como un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t - \frac{400}{10} y_2 + \frac{200}{10} y_4 - \frac{8000}{10} y_1 + \frac{4000}{10} y_3$$

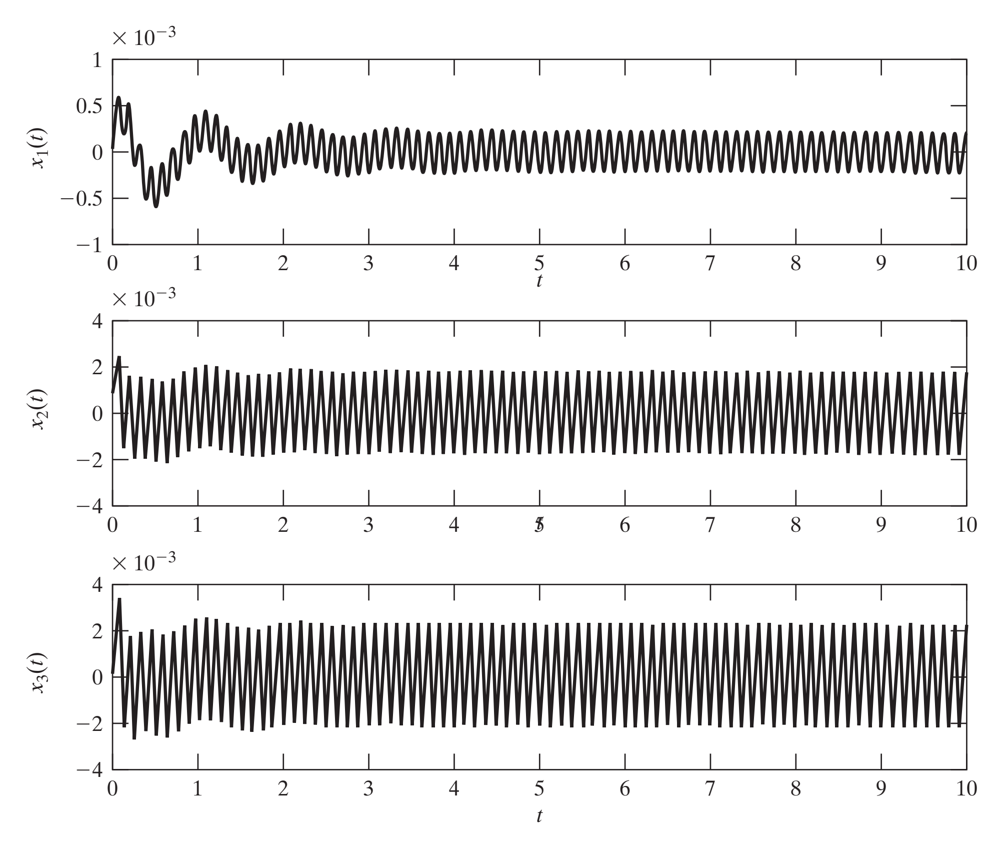
$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_2 - \frac{400}{10} y_4 + \frac{200}{10} y_6 + \frac{4000}{10} y_1 - \frac{8000}{10} y_3 + \frac{4000}{10} y_5$$

$$\dot{y}_5 = y_6$$

$$\dot{y}_6 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_4 - \frac{200}{10} y_6 + \frac{4000}{10} y_3 - \frac{4000}{10} y_5$$

donde $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $y_5 = x_3$, y $y_6 = \dot{x}_3$.



Utilizando los valores iniciales cero de todas las y_i, la solución se puede hallar como sigue.

```
% Ex6_24.m
% Este programa utilizará la función dfunc6_23.m, deberán
% estar en la misma carpeta
tspan = [0: 0.01: 10];
y0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
[t, y] = ode23 ('dfunc6_23', tspan, y0);
subplot (311);
plot (t, y (:, 1));
xlabel ('t');
ylabel ('x1 (t)');
subplot (312);
plot (t, y (:, 3));
xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t)');
subplot (313);
plot (t, y (:, 5));
xlabel ('t');
ylabel ('x3 (t)');

% dfunc6_23.m
function f = dfunc6_23 (t, y)
f = zeros (6, 1);
F0 = 50.0;
w = 50.0;
f(1) = y(2);
f(2) = F0*cos(w*t)/100 - 400*y(2)/100 + 200*y(4)/100 - 8000*y(1)/100
       + 4000*y(3)/100;
f(3) = y(4);
f(4) = F0*cos(w*t)/10 + 200*y(2)/10 - 400*y(4)/10 + 200*y(6)/10
       + 4000*y(1)/10 - 8000*y(3)/10 + 4000*y(5)/10;
f(5) = y(6);
f(6) = F0*cos(w*t)/10 + 200*y(4)/10 - 200*y(6)/10 + 4000*y(3)/10
       - 4000*y(5)/10;
```

■

Ejemplo 6.25 Programa para generar el polinomio característico

Desarrolle un programa de computadora general llamado **Program7.m** para generar el polinomio característico correspondiente a una matriz cuadrada dada. Use el programa para generar el polinomio característico correspondiente a la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: El programa **Program7.m** se desarrolla para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = orden de la matriz [A]

$[a]$ = matriz dada [A]

El programa genera los siguientes resultados:

pcf = vector de coeficientes del polinomio comenzando a partir del término constante

```
>> program7

expansión polinomial de una ecuación en forma de determinante

datos: determinante A:

    2.000000e+000    -1.000000e+000     0.000000e+000
   -1.000000e+000     2.000000e+000    -1.000000e+000
    0.000000e+000    -1.000000e+000     2.000000e+000

resultado: coeficientes polinomiales en
pcf(np)*(x^n)+pcf(n)*(x^(n-1))+...+pcf(2)+pcf(1)=0

-4.000000e+000     1.000000e+001     -6.000000e+000     1.000000e+000
```

■

Ejemplo 6.26 Programa para análisis modal de sistemas de varios grados de libertad

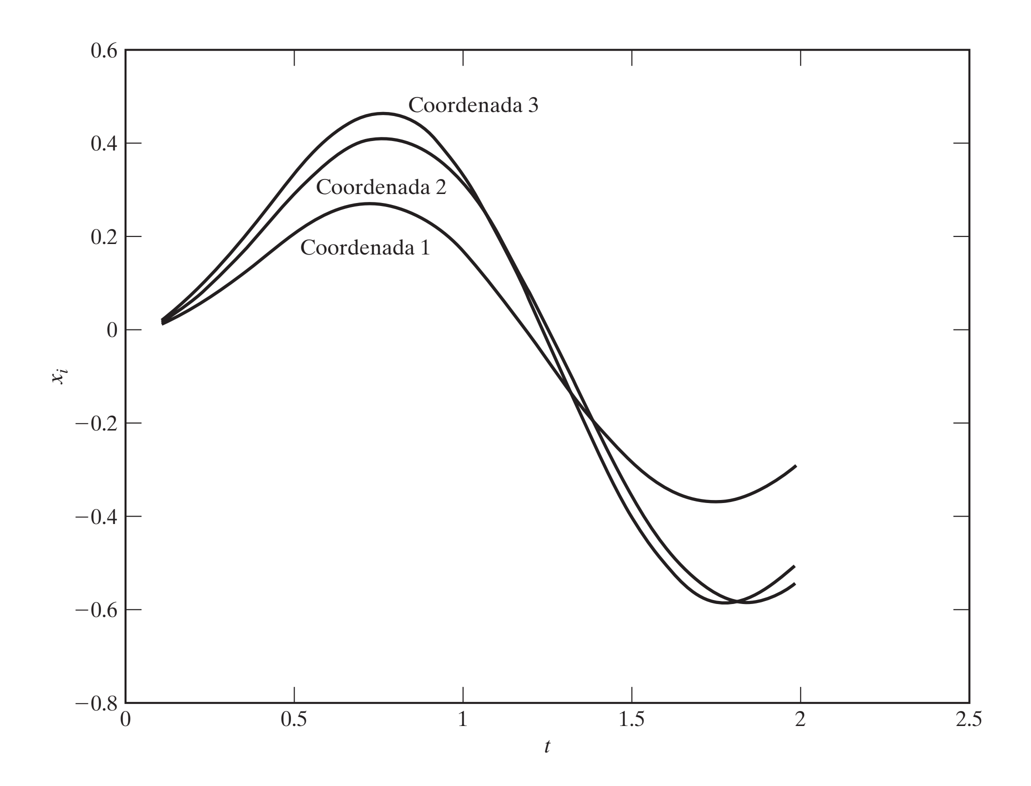
Desarrolle un programa MATLAB, llamado **Program8.m** para determinar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad mediante un análisis modal. Use el programa para encontrar la solución de un sistema con los siguientes datos:

Matriz de masa:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz modal (con los modos como columnas; los modos no se hacen m-ortogonales):

$$[ev] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.8019 & 0.4450 & -1.2468 \\ 2.2470 & -0.8020 & 0.5544 \end{bmatrix}$$



Frecuencias naturales = $\omega_1 = 0.89008$, $\omega_2 = 1.4942$, $\omega_3 = 3.6050$
Relaciones de amortiguamiento modal = $\zeta_i = 0.01$, $i = 1, 2, 3$
Vector de fuerzas aplicadas a las diferentes masas:

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \cos \omega t; \qquad F_0 = 2.0, \qquad \omega = 3.5$$

Condiciones iniciales: $\vec{x}(0) = \vec{0}, \dot{\vec{x}}(0) = \vec{0}$

Solución: Se desarrolla el programa **`Program8.m`** para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = grados de libertad del sistema

nvec = cantidad de modos que se utilizarán en el análisis modal

xm = matriz de masa de tamaño $n \times n$

ev = matriz modal de tamaño $n \times nvec$

z = vector de tamaño $nvec$ = vector de relaciones de amortiguamiento modal

om = vector de tamaño $nvec$ = vector de frecuencias naturales

f = vector de fuerzas aplicadas a masas, de tamaño n

x_0 = desplazamientos iniciales de masas, vector de tamaño n

xd_0 = velocidades iniciales de masas, vector de tamaño n

nstep = cantidad de estaciones de tiempo o puntos de integración $t_1, t_2, \ldots t_{\text{nstep}}$

delt = intervalo entre estaciones de tiempo consecutivas

t = matriz de tamaño nstep que contiene tiempos $t_1, t_2, ..., t_{\text{nstep}}$

El programa arroja los siguientes resultados:

x = matriz de tamaño $n \times$ nstep = desplazamientos de las masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ en varias estaciones de tiempo $t_1, t_2, \ldots, t_{\text{nstep}}$

```
>> program8

Respuesta de un sistema obtenida mediante análisis modal

Coordenada 1
 1.21920e-002  4.62431e-002  9.57629e-002  1.52151e-001  2.05732e-001
 2.47032e-001  2.68028e-001  2.63214e-001  2.30339e-001  1.70727e-001
 8.91432e-002 -6.79439e-003 -1.07562e-001 -2.02928e-001 -2.83237e-001
-3.40630e-001 -3.70023e-001 -3.69745e-001 -3.41725e-001 -2.91231e-001

Coordenada 2
 1.67985e-002  6.40135e-002  1.33611e-001  2.14742e-001  2.94996e-001
 3.61844e-001  4.04095e-001  4.13212e-001  3.84326e-001  3.16843e-001
 2.14565e-001  8.53051e-002 -5.99475e-002 -2.08242e-001 -3.46109e-001
-4.61071e-001 -5.43061e-001 -5.85566e-001 -5.86381e-001 -5.47871e-001

Coordenada 3
 1.99158e-002  7.57273e-002  1.57485e-001  2.51794e-001  3.43491e-001
 4.17552e-001  4.60976e-001  4.64416e-001  4.23358e-001  3.38709e-001
 2.16699e-001  6.81361e-002 -9.29091e-002 -2.50823e-001 -3.90355e-001
-4.98474e-001 -5.65957e-001 -5.88490e-001 -5.67173e-001 -5.08346e-001
```

■

Resumen del capítulo

El análisis de sistemas de varios grados de libertad requiere manipulaciones algebraicas tediosas. Para simplificar las manipulaciones se puede utilizar la representación matricial. Derivamos las ecuaciones de movimiento por medio de tres métodos diferentes: la segunda ley del movimiento de Newton, los coeficientes de influencia y las ecuaciones de Lagrange. Presentamos el cálculo de las frecuencias naturales con la solución del problema de valor eigen. Utilizamos el procedimiento de análisis modal para la vibración libre y forzada de sistemas no amortiguados y sistemas proporcionalmente amortiguados. Por último, presentamos la solución de vibración libre y forzada de problemas de varios grados de libertad utilizando MATLAB.

Ahora que ya terminó este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación.

Referencias

6.1 F. W. Beaufait, *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

6.2 R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain* (5a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1975.

6.3 D. A. Wells, *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Nueva York, 1967.

6.4 J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem,* Clarendon Press, Oxford, 1965.

6.5 A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis,* McGraw-Hill, Nueva York, 1965.

6.6 L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, Nueva York, 1967.

6.7 J. W. Strutt, Lord Rayleigh, *The Theory of Sound,* Macmillan, Londres, 1877 (reimpreso por Dover Publications, Nueva York, en 1945).

6.8 W. C. Hurty y M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

6.9 T. K. Caughey, "Classical normal modes in damped linear dynamic systems", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, 1960, págs. 269-271.

6.10 A. Avakian y D. E. Beskos, "Use of dynamic stiffness influence coefficients in vibrations of non-uniform beams", documento para el editor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, 1976, págs. 292-295.

6.11 I. Gladwell y P. M. Hanson, "Some error bounds and numerical experiments in modal methods for dynamics of systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, págs. 9-36.

6.12 R. Bajan, A. R. Kukreti y C. C. Feng, "Method for improving incomplete modal coupling", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, 1983, págs. 937-949.

6.13 E. J. Routh, *Advanced Rigid Dynamics*, Macmillan, Nueva York, 1905.

6.14 D. W. Nicholson y D. J. Inman, "Stable response of damped linear systems", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, noviembre de 1983, págs. 19-25.

6.15 P. C. Chen y W. W. Soroka, "Multidegree dynamic response of a system with statistical properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, 1974, págs. 547-556.

6.16 S. Mahalingam y R. E. D. Bishop, "The response of a system with repeated natural frequencies to force and displacement excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 36, 1974, págs. 285-295.

6.17 S. G. Kelly, *Fundamentals of Mechanical Vibrations,* McGraw-Hill, Nueva York, 1993.

6.18 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

Preguntas de repaso

6.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Defina los coeficientes de influencia de flexibilidad y rigidez. ¿Cuál es la relación entre ellos?
2. Escriba las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad en forma matricial utilizando
   a. la matriz de flexibilidad y
   b. la matriz de rigidez
3. Exprese las energías potencial y cinética de un sistema de n grados de libertad, mediante notación matricial.
4. ¿Qué es una matriz de masa generalizada?
5. ¿Por qué la matriz de masa $[m]$ es siempre definida positiva?
6. .¿La matriz de rigidez $[k]$ es siempre positiva definida? ¿Por qué?
7. ¿Cuál es la diferencia entre coordenadas generalizadas y coordenadas cartesianas?
8. Establezca las ecuaciones de Lagrange.
9. ¿Qué es un problema de valor eigen?
10. ¿Qué es una forma de modo? ¿Cómo se calcula?
11. ¿Cuántas frecuencias naturales distintas pueden existir para un sistema de n grados de libertad?
12. ¿Qué es una matriz dinámica? ¿Cuál es su uso?
13. ¿Cómo se deriva la ecuación de frecuencia para un sistema de varios grados de libertad?
14. ¿Qué significa ortogonalidad de modos normales? ¿Qué son los vectores modales ortonormales?
15. ¿Qué es una base en un espacio de n dimensiones?
16. ¿Qué es el teorema de expansión? ¿Cuál es su importancia?
17. Explique el procedimiento de análisis modal.
18. ¿Qué es un modo de cuerpo rígido? ¿Cómo se determina?
19. ¿Qué es un sistema degenerado?
20. ¿Cómo podemos hallar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad utilizando solamente los primeros modos?

21. Defina la función de disipación de Rayleigh.
22. Defina estos términos: *amortiguamiento proporcional*, *relación de amortiguamiento modal*, *factor de participación modal*.
23. ¿Cuándo obtenemos valores eigen complejos?
24. ¿Cómo se usa el criterio de Routh-Hurwitz?

6.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Para un sistema de varios grados de libertad, se puede escribir una ecuación de movimiento por cada grado de libertad.
2. La ecuación de Lagrange no se puede utilizar para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad.
3. Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de un sistema de varios grados de libertad siempre son simétricas.
4. El producto de las matrices de rigidez y flexibilidad de un sistema siempre es una matriz de identidad.
5. El análisis modal de un sistema de n grados de libertad se puede realizar por medio de r modos con $r < n$.
6. Para un sistema amortiguado de varios grados de libertad, todos los valores eigen pueden ser complejos.
7. La relación de amortiguamiento modal indica amortiguamiento en un modo normal particular.
8. Un sistema de varios grados de libertad puede tener seis de las frecuencias naturales iguales a cero.
9. Las coordenadas generalizadas siempre tendrán la longitud unitaria.
10. Las coordenadas generalizadas son independientes de las condiciones de restricción del sistema.
11. La matriz de masa generalizada de un sistema de varios grados de libertad siempre es diagonal.
12. Las energías potencial y cinética de un sistema de varios grados de libertad siempre son cantidades cuadráticas.
13. La matriz de masa de un sistema siempre es simétrica y definida positiva.
14. La matriz de rigidez de un sistema siempre es simétrica y definida positiva.
15. El modo de cuerpo rígido también se llama modo cero.
16. Un sistema no restringido también se conoce como sistema semidefinido.
17. La segunda ley del movimiento de Newton siempre se puede utilizar para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio.

6.3 Escriba en cada uno de los siguientes espacios en blanco la palabra correcta.

1. La constante de resorte indica la ________ necesaria para producir un alargamiento unitario.
2. El coeficiente de influencia de flexibilidad a_{ij} indica la deflexión en el punto ________ debido a una carga unitaria aplicada en el punto _________.
3. La fuerza en el punto i producida por un desplazamiento unitario en el punto j, cuando todos los puntos además del punto j están fijos, se conoce como coeficiente de influencia de __________.
4. Las formas de modo de un sistema de varios grados de libertad son ________.
5. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad se pueden expresar en función de los coeficientes de ________.
6. Las ecuaciones de Lagrange se expresan en función de coordenadas __________.
7. El valor de la delta de Kronecker (δ_{ij}) es 1 para todas las $i = j$ y _______para todas las $i \neq j$.
8. La matriz de rigidez de un sistema semidefinido es _______.
9. Un sistema de varios grados de libertad puede tener a lo sumo ______de cuerpo rígido.

10. Cuando el vector de solución se indica como una combinación lineal de los modos normales como $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\vec{X}^{(i)}$ las coordenadas generalizadas $q_i(t)$ también se conocen como coeficientes de participación de _________.
11. Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio de n dimensiones se llama ________.
12. La representación de un vector de n dimensiones arbitrario como una combinación lineal de n vectores linealmente independientes se conoce como teorema de _________.
13. El análisis ________ está basado en el teorema de expansión.
14. El análisis modal básicamente __________ las ecuaciones de movimiento.
15. Los valores eigen de un sistema de varios grados de libertad forman un _________ en el espacio de n dimensiones.
16. La aplicación de las ecuaciones de Lagrange requiere la disponibilidad de ________ expresiones.
17. La ecuación en forma de determinante $|[k] - \omega^2[m]| = 0$, se conoce como ecuación _________.
18. La simetría de las matrices de rigidez y flexibilidad se debe al teorema de reciprocidad _________.
19. El teorema de reciprocidad de Maxwell establece que los coeficientes de influencia son _______.
20. La matriz de rigidez es positiva definida sólo si el sistema es ________.
21. Durante la vibración libre de un sistema no amortiguado, todas las coordenadas tendrán movimiento ________.
22. En amortiguamiento proporcional, se supone que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de ______ y ________.

6.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones dadas:

1. La cantidad de frecuencias naturales distintas para un sistema de n grados de libertad puede ser
   a. 1 **b.** ∞ **c.** n
2. La matriz dinámica $[D]$ está dada por
   a. $[k]^{-1}[m]$ **b.** $[m]^{-1}[k]$ **c.** $[k][m]$
3. La ortogonalidad de los modos implica
   a. $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$ únicamente
   b. $\vec{X}^{(i)^T}[k]\vec{X}^{(j)} = 0$ únicamente
   c. $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$ y $\vec{X}^{(i)^T}[k]\vec{X}^{(j)} = 0$
4. La matriz modal, $[X]$, está dada por
   a. $[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} & \vec{X}^{(2)} & \cdots & \vec{X}^{(n)} \end{bmatrix}$
   b. $[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)^T} \\ \vec{X}^{(2)^T} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(n)^T} \end{bmatrix}$
   c. $[X] = [k]^{-1}[m]$
5. La función de disipación de Rayleigh se utiliza para generar una
   a. matriz de rigidez
   b. matriz de amortiguamiento
   c. matriz de masa

6. La ecuación característica de un sistema de n grados de libertad es

a. una ecuación trascendental
b. un polinomio de grado n
c. una ecuación diferencial de orden n

7. La frecuencia natural fundamental de un sistema es
a. el valor máximo **b.** el valor mínimo **c.** cualquier valor

8. El amortiguamiento negativo conduce a

a. inestabilidad
b. convergencia rápida
c. oscilaciones

9. El criterio de Routh-Hurwitz se puede utilizar para investigar

a. la convergencia de un sistema
b. las oscilaciones de un sistema
c. la estabilidad de un sistema

10. Las matrices de rigidez y flexibilidad están relacionadas como
a. $[k] = [a]$ **b.** $[k] = [a]^{-1}$ **c.** $[k] = [a]^T$

11. Un sistema para el cual $[k]$ es positiva y $[m]$ es positiva definida se llama

a. sistema semidefinido
b. sistema positivo definido
c. sistema indefinido

12. $[m]$-ortogonalidad de vectores modales implica

a. $\overline{X}^{(i)^T}[m]\overline{X}^{(i)} = 0$
b. $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(j)} = 0$
c. $[X]^T[m][X] = [\omega_i^2]$

13. Se puede utilizar el análisis modal de manera conveniente para determinar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad

a. sometido a condiciones forzadas arbitrarias
b. sometido a condición de vibración libre
c. implicando varios modos

6.5 Correlacione los elementos de las dos columnas siguientes:

1. $\frac{1}{2}\dot{\vec{X}}^T[m]\dot{\vec{X}}$	**a.** igual a cero produce los valores característicos
2. $\frac{1}{2}\vec{X}^T[m]\vec{X}$	**b.** igual a $[\omega_i^2]$ cuando los modos son normalizados
3. $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(j)}$	**c.** energía cinética del sistema
4. $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(i)}$	**d.** igual a cero cuando los modos son ortogonales
5. $[X]^T[k][X]$	**e.** igual a la matriz dinámica $[D]$
6. $[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x}$	**f.** energía de deformación del sistema
7. $\lvert[k] - \omega^2[m]\rvert$	**g.** igual al vector de fuerza aplicada $\vec{F}$
8. $[k]^{-1}[m]$	**h.** sigual a uno cuando los modos son ortogonales

Problemas

Sección 6.3 Uso de la segunda ley de Newton para derivar ecuaciones de movimiento

6.1-6.5 Derive las ecuaciones de movimiento por medio de la segunda ley del movimiento de Newton, para cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 6.18 a 6.22.

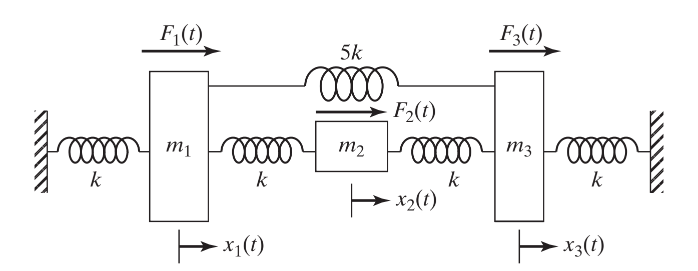


Figura 6.18

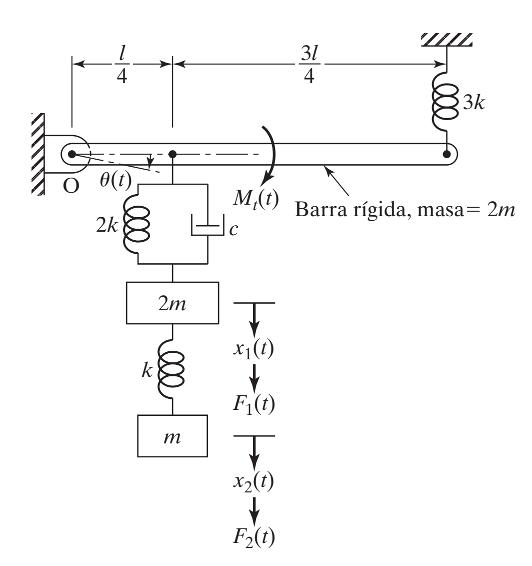


Figura 6.19

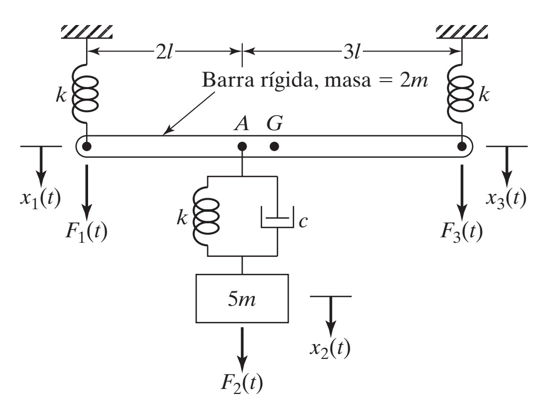


Figura 6.20

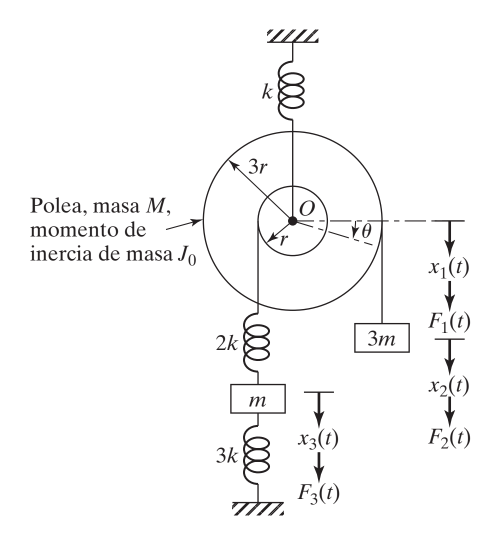


Figura 6.21

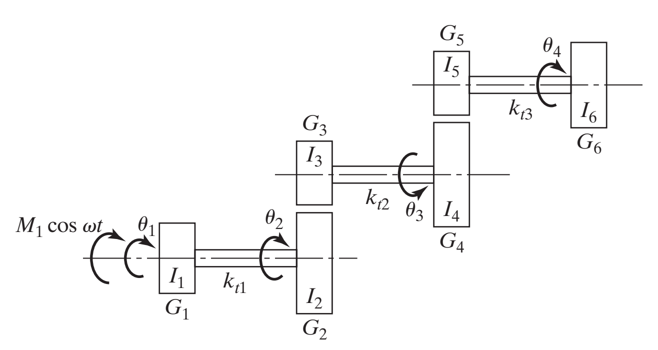


Figura 6.22

6.6 Un automóvil se modela como se muestra en la figura 6.23. Derive las ecuaciones de movimiento por medio de la segunda ley del movimiento de Newton.

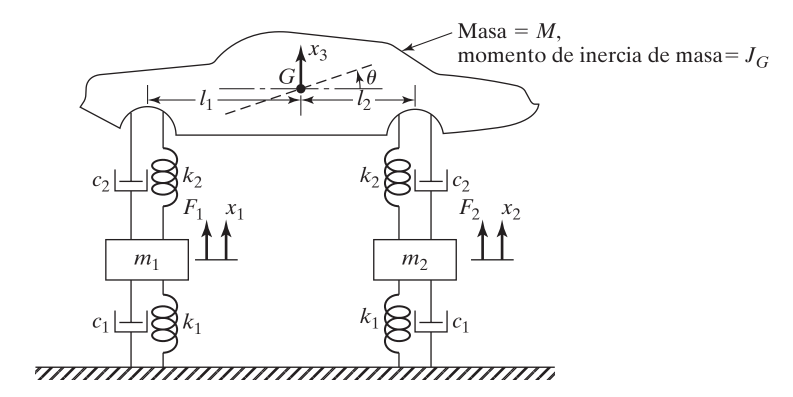


Figura 6.23

6.7 Las ecuaciones de movimiento derivadas utilizando los desplazamientos de las masas x_1, x_2 y x_3 como grados de libertad en la figura 6.12 (ejemplo 6.10) conducen a matrices de masa y rigidez simétricas en la ecuación (E.3) del ejemplo 6.10. Exprese las ecuaciones de movimiento, (E.3) del ejemplo 6.10, utilizando x_1, $x_2 - x_1$ y $x_3 - x_2$ como grados de libertad en la forma:

$$[\overline{m}]\ddot{\vec{y}} + [\overline{k}]\vec{y} = \vec{0}$$

donde

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Demuestre que las matrices de masa y rigidez resultantes $[\overline{m}]$ y $[\overline{k}]$ son no simétricas.

6.8 Un análisis de vibración simplificado de un avión considera los movimientos de rebote y cabeceo (figura 6.24(a)). Para esto se utiliza un modelo compuesto de una barra rígida (correspondiente al fuselaje del avión) soportada por dos resortes (correspondientes a las rigidices de los trenes de aterrizaje principal y delantero) como se muestra en la figura 6.24(b). El análisis se puede realizar utilizando tres sistemas de coordenadas diferentes como se muestra en la figura 6.24(c)-(e). Derive las ecuaciones de movimiento en los tres sistemas de coordenadas e identifique el tipo de acoplamiento asociado con cada sistema de coordenadas.

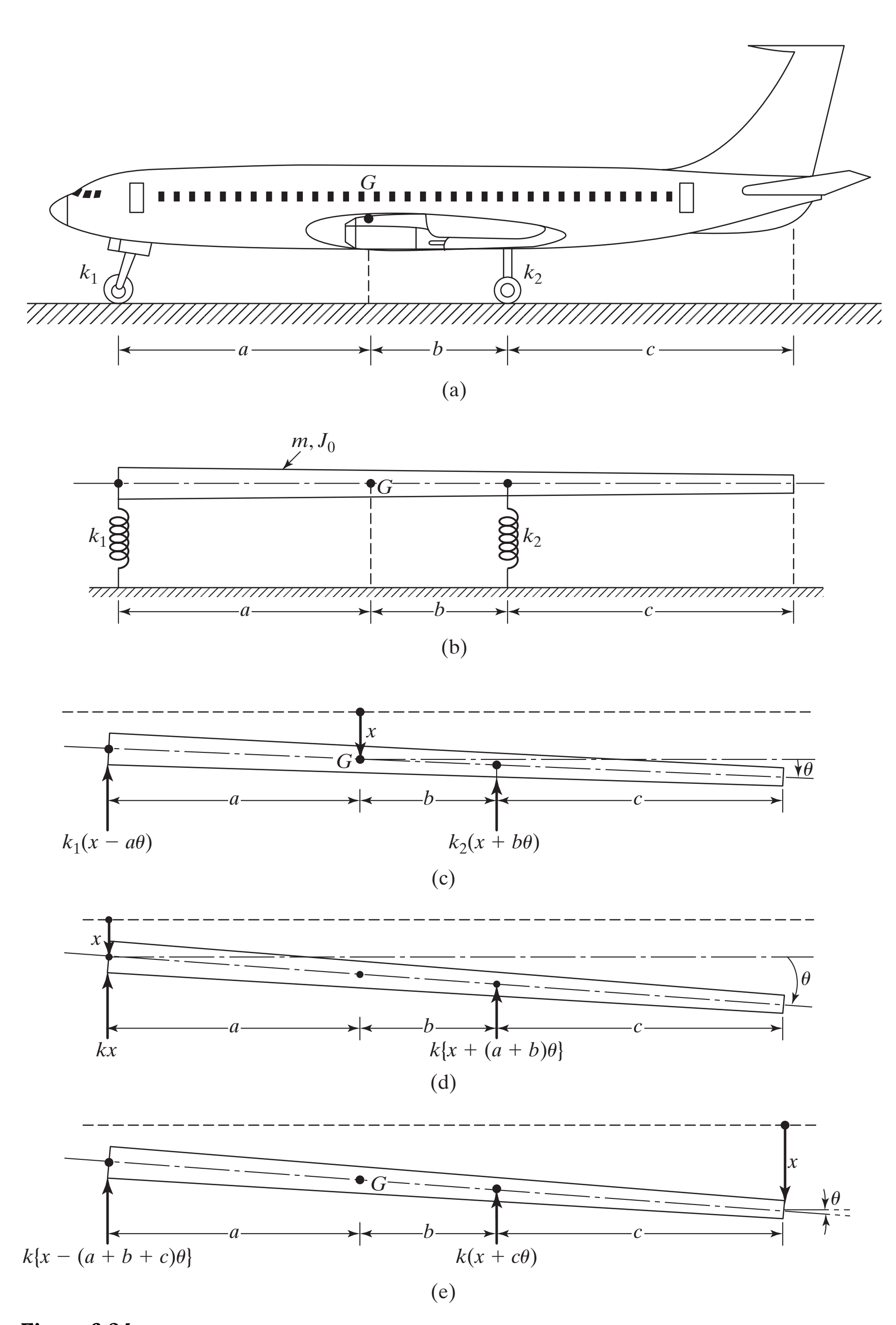


Figura 6.24

6.9 Considere el sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 6.25 con $m_1 = m_2 = 1$ y $k_1 = k_2 = 4$. Las masas m_1 y m_2 se mueven sobre una superficie irregular para la cual las constantes de amortiguamiento viscoso se pueden suponer como $c_1 = c_2 = 2$.

a. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.

b. Encuentre las frecuencias y las formas de modo del sistema no amortiguado.

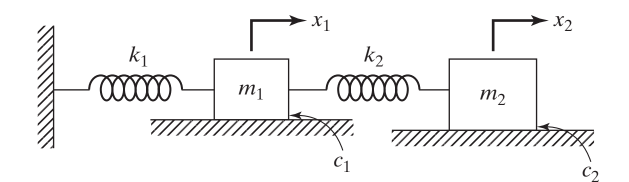


Figura 6.25

6.10 Para un análisis simplificado de la vibración de un avión en la dirección vertical, se puede utilizar un modelo de tres grados de libertad, como se muestra en la figura 6.26. Las tres masas indican las masas de las dos alas ($m_1 = m_3 = m$) y el fuselaje ($m_2 = 5m$). Las rigideces $k_1 = k_2 = k$ corresponden a las dos alas, las cuales se pueden modelar como vigas en voladizo de modo que $k_1 = k_2 = k = \dfrac{3EI}{l^3}$.

a. Derive las ecuaciones de movimiento del avión utilizando el modelo de tres grados de libertad.

b. Utilizando las ecuaciones de movimiento derivadas en el inciso (*a*), encuentre las frecuencias y modos naturales del avión. Interprete los resultados.

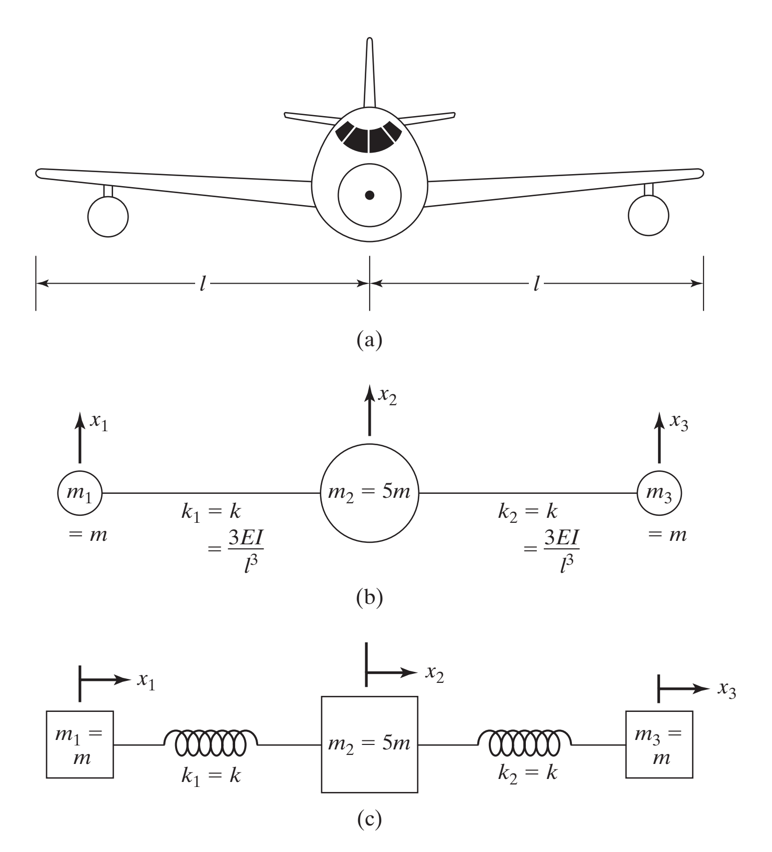


Figura 6.26

6.11 En la figura 6.27 se muestra un modelo simplificado del tren de aterrizaje principal de un pequeño avión, con $m_1 = 100$ kg, $m_2 = 5000$ kg, $k_1 = 10^4$ N/m y $k_2 = 10^6$ N/m.

a. Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.

b. Encuentre las frecuencias y formas de modo del sistema.

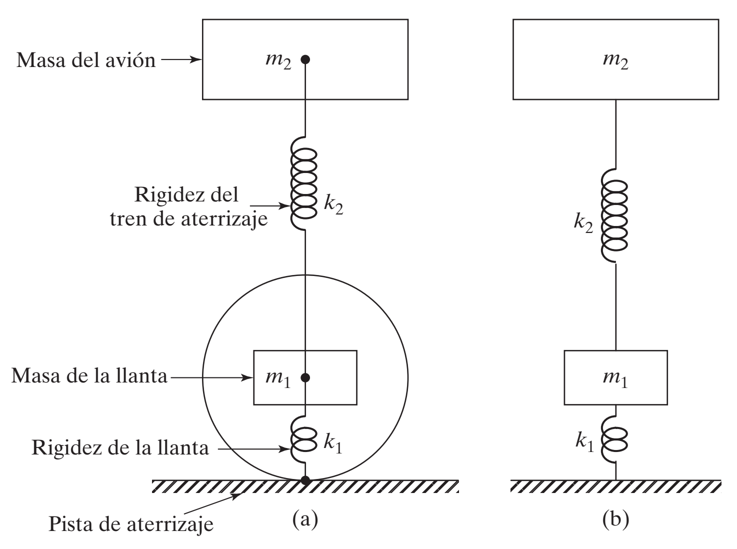


Figura 6.27

Sección 6.4 Coeficientes de influencia

6.12-6.17 Derive la matriz de rigidez de cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 6.18 a 6.23 utilizando las coordenadas indicadas.

6.18 Derive la matriz de flexibilidad del sistema que se muestra en la figura 5.39.

6.19 Derive la matriz de rigidez del sistema que se muestra en la figura 5.39.

6.20 Derive la matriz de flexibilidad del sistema que se muestra en la figura 5.42.

6.21 Derive la matriz de rigidez del sistema que se muestra en la figura 5.42.

6.22 Derive la matriz de masa del sistema que se muestra en la figura 5.42

6.23 Encuentre los coeficientes de influencia de flexibilidad y rigidez del sistema torsional que se muestra en la figura 6.28. También escriba las ecuaciones de movimiento del sistema.

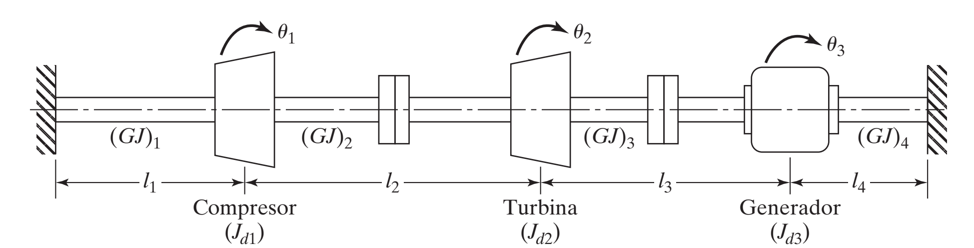


Figura 6.28

6.24 Encuentre los coeficientes de influencia de flexibilidad y rigidez del sistema que se muestra en la figura 6.29. También derive las ecuaciones de movimiento del sistema.

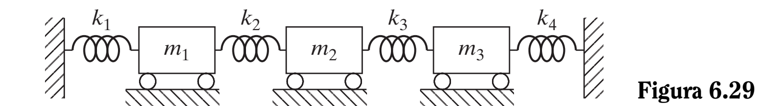


Figura 6.29

6.25 El ala de un avión, figura 6.30(a), se modela como un sistema de masa concentrada de tres grados de libertad como se muestra en la figura 6.30(b). Derive la matriz de flexibilidad y las ecuaciones de movimiento del ala suponiendo que todas las $A_i = A$, $(EI)_i = EI$, $l_i = l$ y que la raíz está fija.

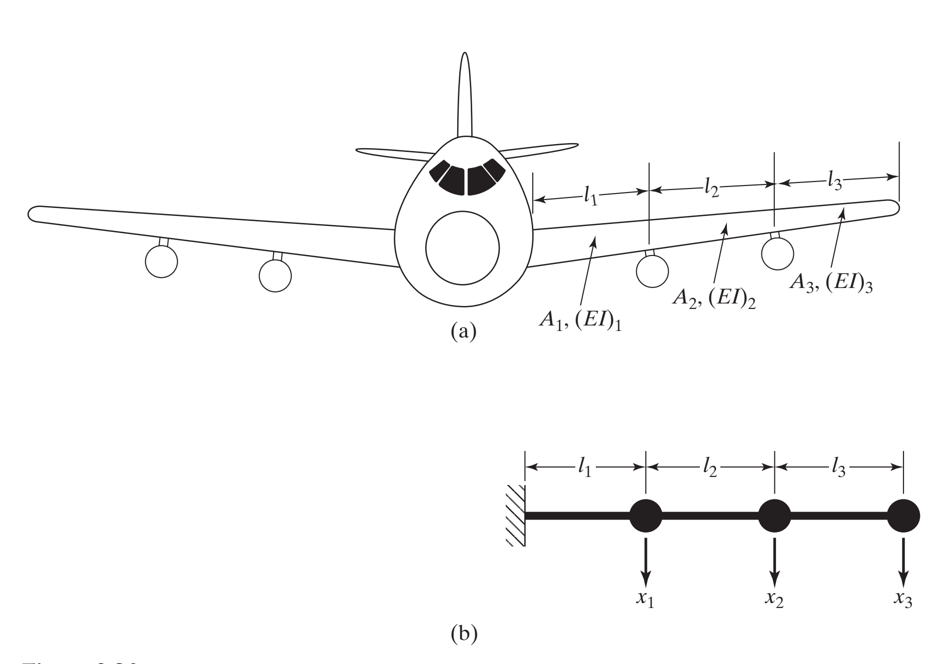


Figura 6.30

6.26 Determine la matriz de flexibilidad de la barra uniforme que se muestra en la figura 6.31. Ignore la masa de la viga comparada con las masas concentradas colocadas sobre la viga y suponga que todas las $l_i = l$.

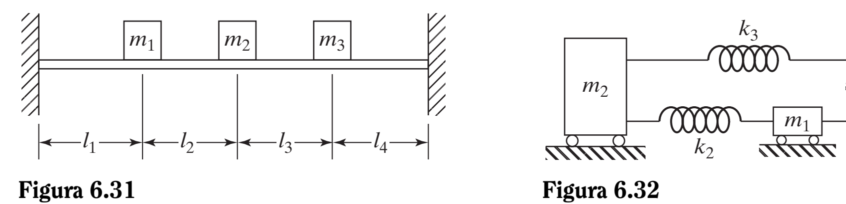


Figura 6.31 **Figura 6.32**

6.27 Derive las matrices de flexibilidad y rigidez del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.32 suponiendo que todas las superficies que están en contacto están libres de fricción.

6.28 Derive las ecuaciones de movimiento de la cuerda estirada que lleva tres masas, como se muestra en la figura 6.33. Suponga que los extremos de la cuerda están fijos.

6.29 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 6.34.

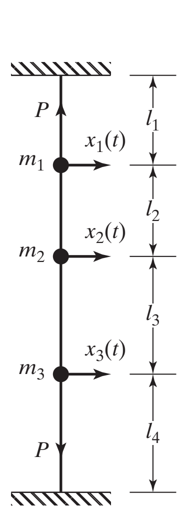


Figura 6.33

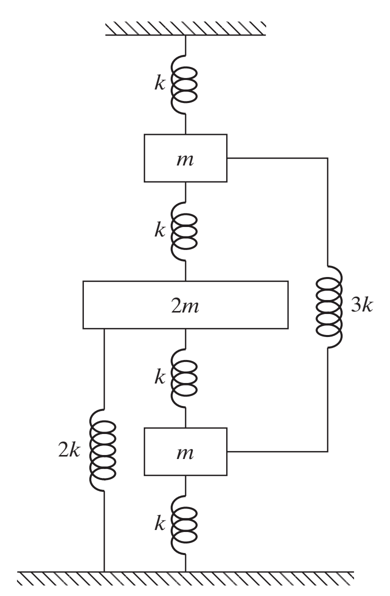


Figura 6.34

6.30 Cuatro resortes idénticos, cada uno con una rigidez k, están dispuestos simétricamente a 90° uno de otro, como se muestra en la figura 2.65. Encuentre el coeficiente de influencia del punto de unión en una dirección arbitraria.

6.31 Demuestre que la matriz de rigidez del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.3(a) es una matriz de banda a lo largo de la diagonal.

6.32-6.36 Derive la matriz de masa de cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 6.18 a 6.22 utilizando las coordenadas indicadas.

6.37 El coeficiente de influencia de masa inverso b_{ij} se define como la velocidad inducida en el punto i por un impulso unitario aplicado en el punto j. A partir de esta definición derive la matriz de masa inversa del sistema que se muestra en la figura 6.4(a).

Sección 6.6 Coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas

6.38 Para el edificio de cuatro pisos sometido a cortante que se muestra en la figura 6.35, no hay rotación de la sección horizontal al nivel de los pisos. Suponiendo que los pisos son rígidos y que la masa total está concentrada en los niveles de los pisos, derive las ecuaciones de movimiento del edificio utilizando (a) la segunda ley del movimiento de Newton y (b) las ecuaciones de Lagrange.

Sección 6.7 Uso de las ecuaciones de Lagrange para derivar ecuaciones de movimiento

6.39 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 6.36 utilizando las ecuaciones de Lagrange con x y θ como coordenadas generalizadas.

6.40 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 5.12(a), utilizando las ecuaciones de Lagrange con (a) x_1 y x_2 como coordenadas generalizadas, y (b) x y θ como coordenadas generalizadas.

6.41 Derive las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 6.29 utilizando las ecuaciones de Lagrange.

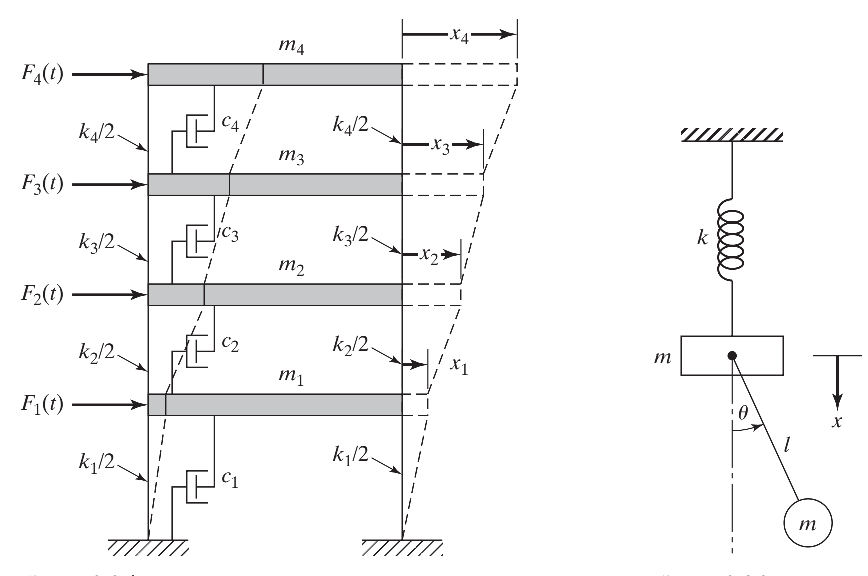


Figura 6.35 **Figura 6.36**

6.42 Derive las ecuaciones de movimiento del péndulo triple que se muestra en la figura 6.10 utilizando las ecuaciones de Lagrange.

6.43 Cuando un avión (vea la figura 6.37(a)) experimenta vibraciones simétricas, el fuselaje se puede idealizar como una masa central concentrada M_0 y las alas se pueden modelar como barras rígidas con masas M en sus extremos, como se muestra en la figura 6.37(b). La flexibilidad entre las alas y el fuselaje se puede representar por medio de dos resortes torsionales de rigidez k_t cada uno. (a) Derive las ecuaciones de movimiento del avión, utilizando las ecuaciones de Lagrange con x y θ como coordenadas generalizadas. (b) Encuentre las frecuencias y modos naturales del avión. (c) Encuentre la constante de resorte torsional para que tenga la frecuencia natural de vibración, en modo torsional, mayor que 2 Hz cuando $M_0 = 1\,000$ kg, $M = 500$ kg y $l = 6$ m.

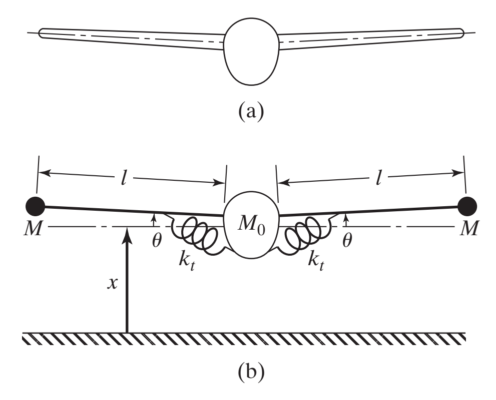


Figura 6.37

6.44-6.48 Use las ecuaciones de Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento de cada uno de los sistemas que se muestran en las figuras 6.18 a 6.22.

Sección 6.9 Problema de valor eigen

6.49 Formule el problema de valor eigen del ejemplo 6.11 en función de las coordenadas $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - x_1$ y $q_3 = x_3 - x_2$, y solucione el problema resultante. Compare los resultados obtenidos con los del ejemplo 6.11 y saque conclusiones.

6.50 Derive la ecuación de frecuencia del sistema que se muestra en la figura 6.29.

Sección 6.10 Solución del problema de valor eigen

6.51 Encuentre las frecuencias y formas de modo del sistema que se muestra en la figura 6.6(a) cuando $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, y $m_3 = 3m$. Trace las formas de modo.

6.52 Formule la ecuación matricial y determine los tres modos principales de vibración para el sistema que se muestra en la figura 6.6(a) con $k_1 = 3k$, $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = 3m$ y $m_2 = m_3 = m$. Verifique la ortogonalidad de los modos determinados.

6.53 Encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 6.10 con $l_1 = 20$ cm, $l_2 =$ 30 cm, $l_3 = 40$ cm, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg y $m_3 = 3$ kg.

6.54* (a) Encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 6.31 con $m_1 = m_2 = m_3 = m$ y $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$. (b) Encuentre las frecuencias naturales de la viga cuando $m = 10$ kg, $l =$ 0.5 m, la sección trasversal es una sección circular sólida con diámetro de 2.5 cm y el material es acero. (c) Considere utilizar una sección transversal rectangular hueca, rectangular sólida, o circular hueca para la viga, para lograr las mismas frecuencias naturales que en (b). Identifique la sección transversal correspondiente al peso mínimo de la viga.

6.55 La ecuación de frecuencia de un sistema de tres grados de libertad está dada por

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 & -4 \\ -1 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0$$

Encuentre las raíces de esta ecuación.

6.56 Determine los valores eigen y vectores eigen del sistema que se muestra en la figura 6.29, con $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

6.57 Encuentre las frecuencias y formas de modo del sistema que se muestra en la figura 6.29 para $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ y $m_3 = 2m$.

6.58 Encuentre las frecuencias naturales y modos principales del péndulo triple que se muestra en la figura 6.10, suponiendo que $l_1 = l_2 = l_3 = l$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

6.59 Encuentre las frecuencias y modos naturales del sistema considerado en el problema 6.27 con $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$ y $k_3 = 2k$.

6.60 Demuestre que las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 6.6(a) con $k_1 = 3k$, $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = 4m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = m$, son $\omega_1 = 0.46\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, y $\omega_3 = 1.34\sqrt{k/m}$. Encuentre los vectores eigen del sistema.

---

* El asterisco indica un problema sin respuesta única.

6.61 Encuentre las frecuencias naturales del sistema considerado en el problema 6.28 con $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$ y $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.

6.62 Encuentre las frecuencias naturales y modos principales del sistema torsional que se muestra en la figura 6.28 para $(GJ)_i = GJ$, $i = 1, 2, 3, 4$, $J_{d1} = J_{d2} = J_{d3} = J_0$ y $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$.

6.63 La matriz de masa $[m]$ y la matriz de rigidez $[k]$ de una barra uniforme son

$$[m] = \frac{\rho A l}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \frac{2AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde ρ es la densidad, A es el área de sección transversal, E es el módulo de Young y l es la longitud de la barra. Encuentre las frecuencias naturales del sistema al buscar las raíces de la ecuación característica. Incluso encuentre los modos principales.

6.64 La matriz de masa de un sistema vibrador

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y los vectores eigen por

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Encuentre la matriz modal $[m]$-ortonormal del sistema.

6.65 Para el sistema que se muestra en la figura 6.38, (a) determine el polinomio característico $\Delta(\omega^2) = \det|[k] - \omega^2[m]|$; (b) trace $\Delta(\omega^2)$ desde $\omega^2 = 0$ hasta $\omega^2 = 4.0$ (aplicando incrementos $\Delta\omega^2 = 0.2$), y (c) encuentre ω_1^2, ω_2^2, y ω_3^2.

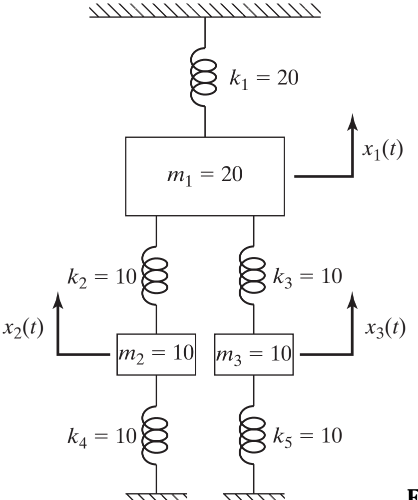


Figura 6.38

6.66 (a) Se sabe que dos de los vectores eigen de un sistema vibratorio deben ser

$$\begin{Bmatrix} 0.2754946 \\ 0.3994672 \\ 0.4490562 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} 0.6916979 \\ 0.2974301 \\ -0.3389320 \end{Bmatrix}$$

Compruebe que éstos son ortogonales con respecto a la matriz de masa

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre el vector eigen $[m]$-ortogonal restante. (b) Si la matriz de rigidez del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

determine todas las frecuencias naturales del sistema, utilizando los vectores eigen del inciso (a).

6.67 Encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 16.18 para $m_i = m, i = 1, 2, 3$.

6.68 Encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 6.19 con $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $k = 1\,000$ N/m y $c = 100$ N-s/m.

6.69 Considere el problema de valor eigen

$$[k] - \omega_i^2[m])\vec{X}^{(i)} = \vec{0}$$

donde

$$[k] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre las frecuencias naturales buscando las raíces de la ecuación característica

$$|[m]^{-1}[k] - \omega^2[I]| = 0$$

Compare sus resultados con los obtenidos en el ejemplo 6.11.

6.70 Encuentre los valores eigen y los vectores eigen de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: El problema de valor eigen asociado con la matriz $[A]$ se define como

$$[[A] - \lambda[I]]X = 0$$

donde λ es el valor eigen y $\vec{X}$ es el vector eigen.

6.71 Considere el problema de valor eigen

$$[[k] - \omega^2[m]]\,\vec{X} = \vec{0}$$

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Encuentre las frecuencias y las formas de modo del sistema:

a. resolviendo la ecuación

$$[[m]^{-1}[k] - \omega^2[I]]\vec{X} = \vec{0}$$

b. resolviendo la ecuación

$$[-\omega^2[k]^{-1}[m] + [I]]\vec{X} = \vec{0}$$

Compare los dos conjuntos de resultados y explique sus observaciones.

6.72 Considere el problema de valor eigen

$$\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(E.1)}$$

a. Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema.

b. Cambie las coordenadas en la ecuación (E.1) como $X_1 = Y_1$ y $X_2 = 3Y_2$ y exprese el problema de valor eigen en función del vector eigen $\vec{Y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$, resuélvalo, y encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo.

c. Compare los resultados encontrados en los incisos (a) y (b) y proponga sus observaciones.

6.73 Considere el problema de valor eigen

$$\lambda[m]\vec{X} = [k]\vec{X} \qquad \text{(E.1)}$$

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \lambda = \omega^2$$

La ecuación (E.1) se puede expresar como

$$[D]\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

donde

$$[D] = \left([m]^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}[k]\left([m]^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

se llama *matriz de rigidez normalizada*. Determine la matriz de rigidez normalizada de masa y úsela para hallar los vectores eigen ortonormales del problema formulado en la ecuación (E.1).

Sugerencia: La raíz cuadrada de una matriz diagonal $[m]$ de orden n, está dada por

$$[m]^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_{11}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \sqrt{m_{nn}} \end{bmatrix}$$

6.74 Una matriz definida positiva simétrica, como la matriz de masa de un sistema de varios grados de libertad $[m]$, se puede expresar como el producto de una matriz triangular inferior, $[L]$, y una matriz triangular superior $[L]^T$, como

$$[m] = [L][L]^T \tag{E.1}$$

utilizando un procedimiento conocido como *método de Choleski* [6.18]. Para una matriz de orden 3×3, la ecuación (E.1) se escribe como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Multiplicando las matrices del lado derecho de la ecuación (E.2) e igualando cada uno de los elementos de la matriz 3×3 resultante al elemento correspondiente de la matriz del lado izquierdo de la ecuación (E.2), se puede identificar la matriz $[L]$. Utilizando este procedimiento, descomponga la matriz

$$[m] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

en la forma $[L][L]^T$.

Sección 6.12 Sistemas no restringidos

6.75 Encuentre las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema que se muestra en la figura 6.14 con $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ y $k_1 = k_2 = k$.

6.76 Encuentre la matriz modal para el sistema semidefinido que se muestra en la figura 6.39 para $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$, k_{t1}, $= k_t$, y $k_{t2} = 2k_t$.

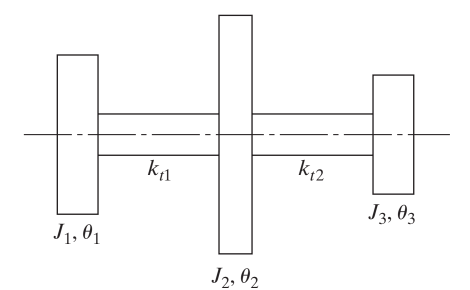


Figura 6.39

Sección 6.13 Vibración libre de sistemas no amortiguados

6.77 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.29 para $k_1 = k$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ y $m_3 = 2m$ para las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$.

6.78 Encuentre la respuesta de vibración libre del péndulo triple que se muestra en la figura 6.10 para $l_i = l$ $(i = 1, 2, 3)$ y $m_i = m$ $(i = 1, 2, 3)$ para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = \theta_{30}$, $\dot{\theta}_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

6.79 Encuentre la respuesta de vibración libre de la cuerda tensada que se muestra en la figura 6.33 para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$ y $l_i = l$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Suponga las condiciones iniciales como $x_1(0) = x_3(0) = 0$, $x_2(0) = x_{20}$, $\dot{x}_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

6.80 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.6(a) para $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ correspondiente a las condiciones iniciales $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$, $x_i(0) = 0\,(i = 1, 2, 3)$, y $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$.

6.81 Encuentre la respuesta de vibración libre del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.32 para $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$, $k_1 = k_2 = k$ y $k_3 = 2k$ correspondiente a las condiciones iniciales $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_{30}$, y $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

6.82 En el sistema de carros de carga que se muestra en la figura 6.14, el primer carro adquiere una velocidad $\dot{x}_0$ debido a un impacto. Encuentre la vibración libre resultante del sistema. Suponga $m_i = m$ $(i = 1, 2, 3)$ y $k_1 = k_2 = k$.

6.83 Encuentre la respuesta de vibración libre de un sistema de tres grados de libertad regido por la ecuación

$$10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ddot{\vec{x}}(t) + 100\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x}(t) = \vec{0}$$

Suponga las condiciones iniciales como $x_i(0) = 0.1$ y $\dot{x}_i(0) = 0$; $i = 1, 2, 3$.

Nota: En los ejemplos 6.11 y 6.12 se dan las frecuencias naturales y formas de modo del sistema.

6.84 Utilizando el análisis modal, determine la respuesta de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad con las siguientes ecuaciones de movimiento

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ddot{\vec{x}}(t) + 8\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\vec{x}(t) = \vec{0}$$

con las condiciones iniciales

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

6.85 Considere las ecuaciones de vibración libre de un sistema no amortiguado de dos grados de libertad:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0}$$

con

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre los vectores eigen ortonormales por medio de la matriz de rigidez de masa normalizada.

b. Determine las coordenadas principales del sistema y obtenga las ecuaciones modales.

6.86 Para el sistema de dos grados de libertad considerado en el problema 6.85, encuentre la respuesta de vibración libre $x_1(t)$ y $x_2(t)$, por medio de la ecuación modal derivada en el problema 6.85 para las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

6.87 Encuentre la respuesta de vibración libre del modelo de avión de tres grados de libertad considerado en el problema 6.10 para los siguientes datos: $m = 5000$ kg, $l = 5$ m, $E = 7$ Gpa, $I = 8 \times 10^{-6}$ m^4. Suponga que las condiciones iniciales corresponden a las de una ráfaga de viento, lo que da por resultado $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.1$ m, $x_3(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3 = 0$.

6.88 La solución de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad se determina resolviendo la ecuación

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0} \tag{E.1}$$

con $\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$, utilizando las condiciones iniciales

$$\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0 = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(t = 0) = \dot{\vec{x}}_0 = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix}.$$

Si ω_1 y ω_2 son las frecuencias naturales y $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son las formas de modo del sistema obtenidas a partir de la ecuación característica

$$[[m]s^2 + [k]]\vec{u} = \vec{0} \tag{E.2}$$

con $s = \pm\omega_1, \pm\omega_2$ (raíces características), la solución de la ecuación (E.1), $\vec{x}(t)$, se puede hallar como una combinación lineal de diferentes soluciones como:

$$\vec{x}(t)\colon \quad C_1\vec{u}_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2\vec{u}_1 e^{+i\omega_1 t} + C_3\vec{u}_2 e^{-i\omega_2 t} + C_4\vec{u}_2 e^{+i\omega_2 t} \tag{E.3}$$

donde C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, con constantes. Demuestre que la solución se puede expresar, en forma equivalente, como

$$\vec{x}(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1)\vec{u}_1 + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2)\vec{u}_2 \tag{E.4}$$

donde A_1, A_2, ϕ_1 y ϕ_2 son constantes.

Sección 6.14 Vibración forzada de sistemas no amortiguados mediante análisis modal

6.89 Determine las amplitudes de movimiento de las tres masas de la figura 6.40 cuando se aplica una fuerza armónica $F(t) = F_0$ sen ωt a la masa inferior izquierda con $m = 1$ kg, $k = 1\,000$ N/m, $F_0 = 5$ N y $\omega = 10$ rad/s utilizando el método de superposición de modo.

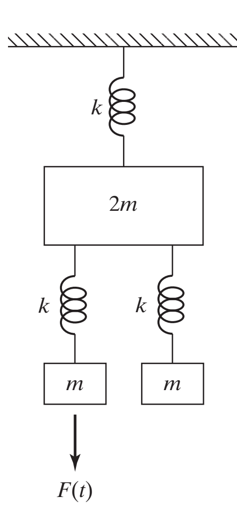


Figura 6.40

6.90 (a) Determine las frecuencias naturales y las formas de modo del sistema torsional que se muestran en la figura 6.11 para $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$ y $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$. (b) Si un par de torsión $M_{t3}(t) = M_{t0} \cos \omega t$, con $M_{t0} = 500$ N-m y $\omega = 100$ rad/s, actúa en el generador (J_3), encuentre la amplitud de cada componente. Suponga $M_{t1} = M_{t2} = 0$, $k_t = 100$ N-m/rad y $J_0 = 1$ kg-m^2.

6.91 Con los resultados de los problemas 6.24 y 6.56, determine la matriz modal $[X]$ del sistema que se muestra en la figura 6.29 y derive las ecuaciones de movimiento desacopladas.

6.92 Se puede obtener una solución aproximada de un sistema de varios grados de libertad siguiendo el método de aceleración de modo. De acuerdo con este método, las ecuaciones de movimiento de un sistema no amortiguado, por ejemplo, se expresan como

$$\vec{x} = [k]^{-1}(\vec{F} - [m]\ddot{\vec{x}}) \tag{E.1}$$

y $\vec{x}$ se representa con los primeros r modos ($r < n$) como

$$\underset{n\times 1}{\ddot{\vec{x}}} = \underset{n\times r}{[X]}\ \underset{r\times 1}{\ddot{\vec{q}}} \tag{E.2}$$

Puesto que $([k] - \omega_i^2[m])\vec{X}^{(i)} = \vec{0}$. La ecuación (E.1) se escribe como

$$\vec{x}(t) = [k]^{-1}\vec{F}(t) - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\omega_i^2}\vec{X}^{(i)}\ddot{q}_i(t) \tag{E.3}$$

Encuentre la respuesta aproximada del sistema descrito en el ejemplo 6.19 (sin amortiguamiento), utilizando el método de aceleración de modo con $r = 1$.

6.93 Determine la respuesta del sistema en el problema 6.51 a las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$, $\dot{x}_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$, y $\dot{x}_3(0) = -1$. Suponga $k/m = 1$.

6.94 Demuestre que las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas $q_i(t)$ se pueden expresar en función de las correspondientes de las coordenadas físicas $x_i(t)$ en el análisis modal como

$$\vec{q}(0) = [X]^T[m]\vec{x}(0), \qquad \dot{\vec{q}}(0) = [X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0)$$

6.95 En la figura 6.41 se muestra un modelo simplificado de una bicicleta con su ciclista. Encuentre el movimiento vertical del ciclista cuando la bicicleta pasa por un desnivel en la carretera, como se muestra en la figura.

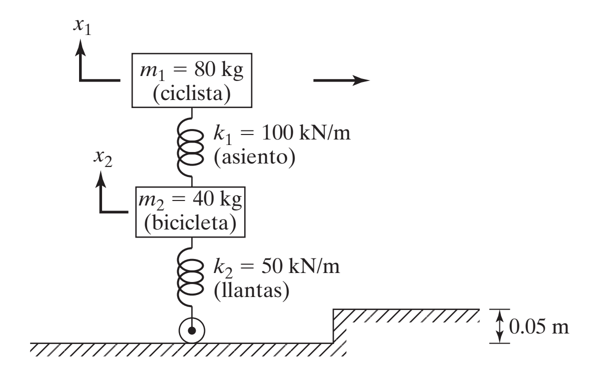


Figura 6.41

6.96 Encuentre la respuesta del péndulo triple que se muestra en la figura 6.10 para $l_i = 0.5$ m ($i = 1, 2, 3$) y $m_i = 1$ kg ($i = 1, 2, 3$) cuando se aplica un momento en la forma de un pulso rectangular de 0.1 N-m de magnitud y 0.1 s de duración a lo largo de la dirección de θ_3. Suponga que el péndulo está en reposo en el instante $t = 0$.

6.97 Encuentre la respuesta del sistema de resorte-masa que se muestra en la figura 6.6(a) para $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_1 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ con $k = 10^4$ N/m y $m = 2$ kg cuando se aplica una fuerza en la forma de un pulso rectangular de 1 000 N de magnitud y 0.25 s de duración a la masa m_1 en la dirección de x_1.

6.98 Considere un sistema de dos grados de libertad con la ecuación de movimiento $[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{f}(t)$ con

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

a. Derive las ecuaciones modales para la respuesta de vibración forzada del sistema.

b. Determine las condiciones que deben satisfacer $f_1(t)$ y $f_2(t)$ para que puedan influir en ambos modos.

Sección 6.15 Vibración forzada de sistemas viscosamente amortiguados

6.99 Encuentre la respuesta de estado estable del sistema que se muestra en la figura 6.17 con $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100$ N/m, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ N-s/m, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, $F_1(t) = F_0 \cos \omega t$, $F_0 = 10$ N y $\omega = 1$ rad/s. Suponga que el resorte k_4 y el amortiguador c_4 están conectados a un muro rígido por el extremo derecho. Use el método de impedancia mecánica descrito en la sección 5.6 para obtener la solución.

6.100 El ala de un avión, figura 6.42(a), se modela como un sistema de masa concentrada de doce grados de libertad como se muestra en la figura 6.42(b).Los primeros tres modos naturales, obtenidos experimentalmente, se dan a continuación.

	Grados de libertad												
Forma de modo	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$\vec{X}^{(1)}$	0.0	0.126	0.249	0.369	0.483	0.589	0.686	0.772	0.846	0.907	0.953	0.984	1.000
$\vec{X}^{(2)}$	0.0	−0.375	−0.697	−0.922	−1.017	−0.969	−0.785	−0.491	−0.127	0.254	0.599	0.860	1.000
$\vec{X}^{(3)}$	0.0	0.618	1.000	1.000	0.618	0.000	−0.618	−1.000	−1.000	−0.618	0.000	0.618	1.000

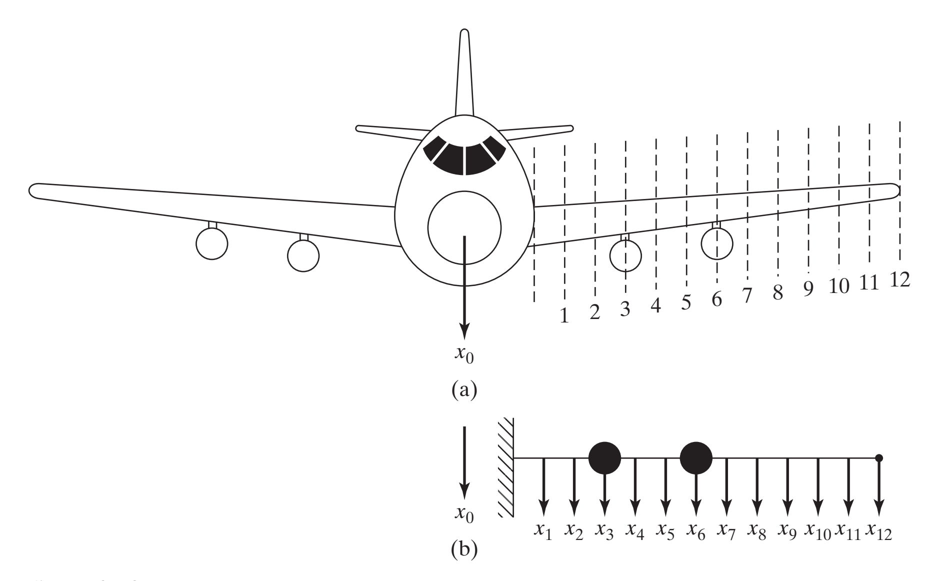


Figura 6.42

Las frecuencias naturales correspondientes a los tres modos son $\omega_1 = 225$ rad/s, $\omega_2 = 660$ rad/s y $\omega_3 =$ 1 100 rad/s. Si el fuselaje de un avión se somete a un movimiento vertical conocido $x_0(t)$, derive las ecuaciones desacopladas para determinar la respuesta dinámica del ala representándola como una combinación lineal de los primeros tres modos normales. *Sugerencia:* La ecuación de movimiento del ala del avión se escribe de modo parecido a la ecuación (3.64) como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c](\dot{\vec{x}} - \dot{x}_0\vec{u}_1) + [k](\vec{x} - x_0\vec{u}_1) = \vec{0}$$

o

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = -x_0[m]\vec{u}_1$$

donde $\vec{u}_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}^T$ es un vector unitario.

Sección 6.17 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

6.101 Utilizando MATLAB, encuentre los valores y vectores eigen con matrices de masa y rigidez dadas en el ejemplo 6.13.

6.102 Utilizando MATLAB, encuentre y trace la respuesta de vibración libre del sistema descrito en el problema 6.79 con los siguientes datos: $x_{20} = 0.5$, $P = 100$, $l = 5$, $m = 2$.

6.103 Utilizando la función **`ode23`** de MATLAB, encuentre y trace la respuesta de vibración forzada del sistema descrito en el problema 6.89.

6.104 Utilizando la función **`roots`** de MATLAB, encuentre las raíces de la siguiente ecuación:

$$f(x) = x^{12} - 2 = 0$$

6.105 Encuentre la respuesta de vibración forzada de un sistema viscosamente amortiguado de tres grados de libertad con ecuaciones de movimiento:

$$10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\ddot{\vec{x}}(t) + 5\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\dot{\vec{x}}(t) + 20\begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} 5\cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Suponga condiciones iniciales cero.

6.106 Utilizando la función **`ode23`** de MATLAB, resuelva el problema 6.99 y trace $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

6.107 Utilizando el programa **`Program7.m`**, genere el polinomio característico correspondiente a la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

6.108 Utilizando el programa **`Program8.m`**, encuentre la respuesta de estado estable de un sistema de tres grados de libertad con los siguientes datos:

$$\omega_1 = 25.076 \text{ rad/s}, \qquad \omega_2 = 53.578 \text{ rad/s}, \qquad \omega_3 = 110.907 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_i = 0.001, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 41.4 & 0 & 0 \\ 0 & 38.8 & 0 \\ 0 & 0 & 25.88 \end{bmatrix}, \qquad [ev] = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1.303 & 0.860 & -1.000 \\ 1.947 & -1.685 & 0.183 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000\cos 5\,t \\ 10000\cos 10\,t \\ 20000\cos 20\,t \end{Bmatrix}$$

6.109 Encuentre y trace la respuesta $x_1(t)$ y $x_2(t)$, de un sistema con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen } 2t \quad \text{(E.1)}$$

utilizando las condiciones iniciales:

$$\vec{x}(t = 0) = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{m} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(t = 0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{m/s}$$

Resuelva numéricamente las ecuaciones diferenciales (E.1), utilizando una función MATLAB adecuada.

6.110 Escriba un programa de computadora para determinar los vectores eigen mediante los valores eigen conocidos en la ecuación (6.61). Encuentre las formas de modo del problema 6.57 aplicando este programa.

6.111 Escriba un programa de computadora para generar la matriz $[m]$-modal ortogonal $[X]$. El programa deberá aceptar la cantidad de grados de libertad, los modos normales y la matriz de masa como datos de entrada. Resuelva el problema 6.64 aplicando este programa.

6.112 Las ecuaciones de movimiento de un sistema no amortiguado en unidades SI están dadas por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\vec{x}} + \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ sen } \omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la subrutina MODAL, encuentre la respuesta de estado estable del sistema cuando $\omega = 5$ rad/s.

6.113 Encuentre la respuesta del sistema en el problema 6.112 al variar ω entre 1 y 10 rad/s en incrementos de 1 rad/s. Trace las gráficas que muestren las variaciones de las magnitudes de los primeros picos de $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ con respecto a ω.

6.114 Encuentre las frecuencias naturales de vibración y los modos de forma correspondientes de la viga que se muestra en la figura 6.9 utilizando la matriz de masa

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \equiv m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de flexibilidad dada por la ecuación (E.4) del ejemplo 6.6.

Proyecto de diseño

6.115 Una pesada máquina herramienta instalada en el primer piso de un edificio, figura 6.43(a), se ha modelado como un sistema de tres grados de libertad como se indica en la figura 6.43(b). (a) Para $k_1 = 5\,000$ lb/pulg, $k_2 = 500$ lb/pulg, $k_3 = 2\,000$ lb/pulg, $c_1 = c_2 = c_3 = 10$ lb-seg/pulg, $m_f = 50$ lb-seg^2/pulg, $m_b = 10$ lb-seg^2/pulg, $m_h = 2$ lb-seg^2/pulg, y $F(t) = 1\,000 \cos 60t$, lb, encuentre la vibración de estado estable del sistema utilizando el método de impedancia mecánica descrito en la sección 5.6. (b) Si la respuesta máxima del cabezal de la máquina herramienta (x_3) se tiene que reducir 25%, ¿cómo deberá cambiar la rigidez del montaje (k_2)? (c) ¿Hay alguna forma mejor de lograr el objetivo mencionado en (b)? Proporcione los detalles.

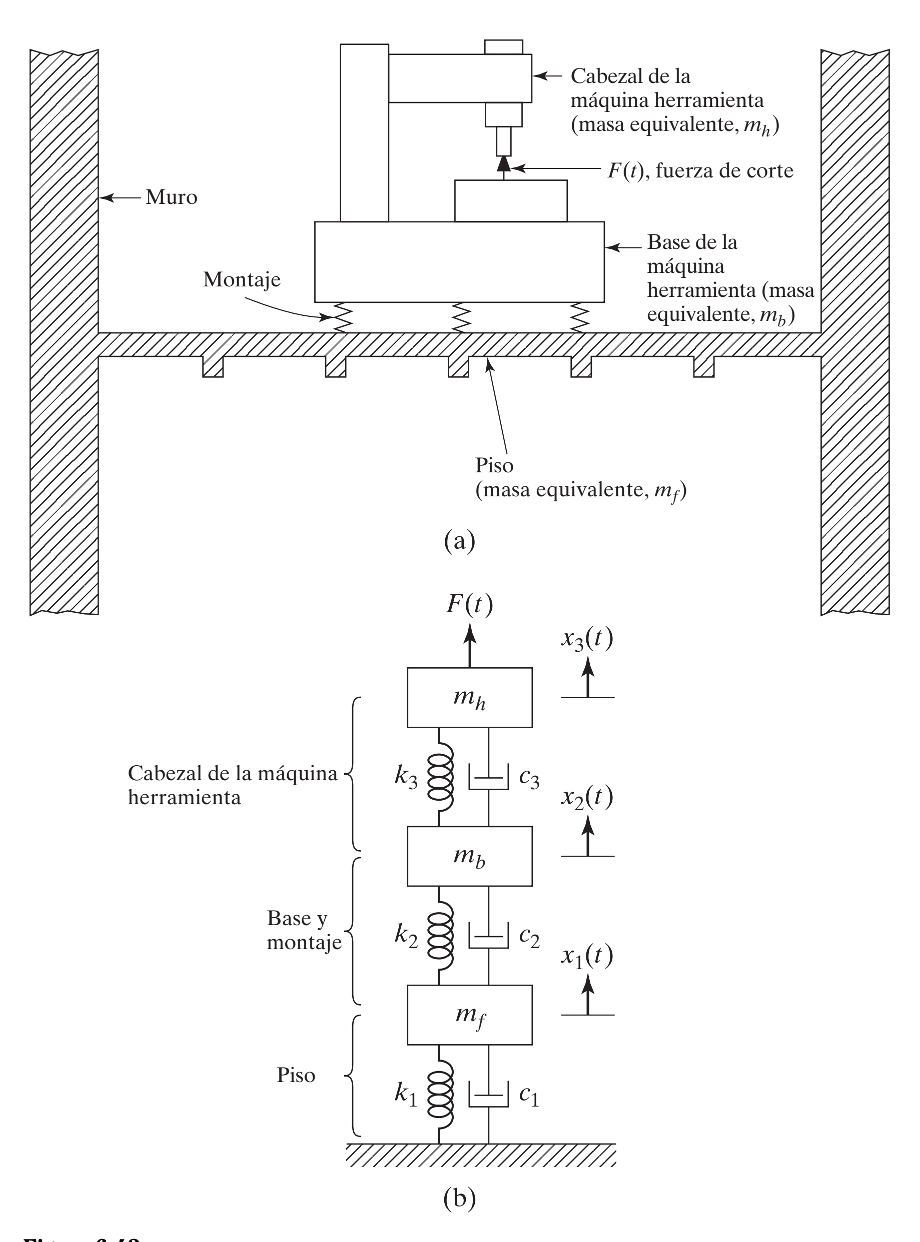


Figura 6.43

CAPÍTULO 7

Determinación de frecuencias y modos naturales

John William Strutt, Lord Rayleigh
(1842-1919)

Físico inglés, se desempeñó como profesor de física experimental en la Universidad de Cambridge, fue profesor de filosofía natural en la Royal Institution de Londres, presidente de la Royal Society y rector de la Universidad de Cambridge. Sus trabajos en óptica y acústica son muy conocidos, y su obra *Theory of Sound* (1877) se considera una referencia obligada aun en la actualidad. Al método de comparar frecuencias naturales de vibración aproximadas de cuerpos vibratorios aplicando un método de energía se le conoce como "Método de Rayleigh". (Cortesía de *Applied Mechanics Review*).

Esquema del capítulo

En este capítulo se describen varios métodos de determinar las frecuencias naturales y modos naturales de sistemas de varios grados de libertad. Específicamente, se presentan la fórmula de Dunkerley, el método de Rayleigh, el método de Holzer, el método de iteración matricial y el método de Jacobi. La derivación de la fórmula de Dunkerley se basa en que las altas frecuencias naturales de la mayoría de los sistemas son grandes comparadas con sus frecuencias fundamentales. Proporciona un valor, siempre menor que el valor exacto, de la frecuencia fundamental. El método de Rayleigh, cuyo origen es el principio de Rayleigh, también da un valor aproximado de la frecuencia natural fundamental, el cual siempre es mayor que el valor exacto. Se hace una comprobación del cociente de Rayleigh y su permanencia en la proximidad de un valor eigen. También se demuestra que el cociente de Rayleigh nunca es menor que el primer valor eigen y nunca mayor que el valor eigen más alto. Se presenta el uso de la curva de deflexión estática para estimar las frecuencias naturales fundamentales de vigas y flechas siguiendo el método de Rayleigh. El método de Holzer, basado en un esquema de prueba y error, se presenta para encontrar las frecuencias naturales de sistemas no amortiguados, amortiguados, semidefinidos o sistemas torsionales y traslacionales ramificados. Se estudia el método de iteración matricial y sus extensiones para hallar las frecuencias naturales mínimas, máximas e intermedias. Se proporciona una comprobación de la convergencia del método a la frecuencia mínima. Se describe el método de Jacobi, el cual encuentra todos los valores eigen y vectores eigen de matrices simétricas reales. Se define el problema de valor eigen estándar y se presenta el método de derivarlo a partir del problema de valor eigen general, basado en el método de descomposición de Choleski. Por último, se ilustra el uso de MATLAB para hallar los valores eigen y vectores eigen de sistemas de varios grados de libertad con varios ejemplos numéricos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Encontrar la frecuencia fundamental aproximada de un sistema compuesto en función de las frecuencias naturales de las partes componentes aplicando la fórmula de Dunkerley.
- Entender el principio de Rayleigh y las propiedades del cociente de Rayleigh, así como calcular la frecuencia natural fundamental de un sistema aplicando el método de Rayleigh.
- Encontrar las frecuencias naturales aproximadas de vibración y los vectores modales según el método de Holzer.
- Determinar las frecuencias mínima, intermedia y máxima de un sistema por medio del método de iteración matricial y sus extensiones (utilizando el procedimiento de deflación matricial).
- Encontrar todos los valores eigen y los vectores eigen de un sistema de varios grados de libertad utilizando el método de Jacobi.
- Convertir un problema de valor eigen general en un problema de valor eigen estándar basado en el método de descomposición de Choleski.
- Resolver problemas de valor eigen utilizando MATLAB.

7.1 Introducción

En el capítulo anterior, las frecuencias naturales (valores eigen) y los modos naturales (vectores eigen) de un sistema de varios grados de libertad se hallaron al establecer el determinante característico igual a cero. Aunque éste es un método exacto, la expansión del determinante característico y

la solución de la ecuación polinomial de grado *enésimo* resultante para obtener las frecuencias naturales pueden volverse bastante tediosas para grandes valores de n. Se han desarrollado varios métodos analíticos y numéricos para calcular las frecuencias y modos naturales de sistemas de varios grados de libertad. En este capítulo analizaremos la fórmula de Dunkerley, el método de Rayleigh, el método de Holzer, el método de iteración matricial y el método de Jacobi. La fórmula de Dunkerley y el método de Rayleigh son útiles sólo para estimar la frecuencia natural fundamental. El método de Holzer es en esencia un método tabular que se puede utilizar para hallar soluciones parciales o totales de problemas de valor eigen. El método matricial encuentra una frecuencia natural a la vez, por lo general comenzando desde el valor más bajo. Por tanto, el método se puede terminar después de hallar el número requerido de frecuencias naturales y modos naturales. Cuando se requieran todas las frecuencias y modos naturales, se puede utilizar el método de Jacobi, el cual encuentra todos los valores eigen y vectores eigen de manera simultánea.

7.2 Fórmula de Dunkerley

La fórmula de Dunkerley provee el valor aproximado de la frecuencia fundamental de un sistema compuesto en función de las frecuencias naturales de sus partes componentes. Se deriva aprovechando que las altas frecuencias naturales de la mayoría de los sistemas vibratorios son grandes comparadas con sus frecuencias fundamentales [7.1-7.3]. Para derivar la fórmula de Dunkerley, considere un sistema general de n grados de libertad cuyos valores eigen se pueden determinar resolviendo la ecuación de frecuencia (6.63):

$$|-[k] + \omega^2[m]| = 0$$

o

$$\left| -\frac{1}{\omega^2}[I] + [a][m] \right| = 0 \tag{7.1}$$

Para un sistema de masa concentrada con una matriz de masa diagonal, la ecuación (7.1) se escribe como

$$\left| -\frac{1}{\omega^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \right| = 0$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{11}m_1\right) & a_{12}m_2 & \cdots & a_{1n}m_n \\ a_{21}m_1 & \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{22}m_2\right) & \cdots & a_{2n}m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & \cdots & \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{nn}m_n\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.2}$$

La expansión de la ecuación (7.2) conduce a

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1}$$
$$+ (a_{11}a_{22}m_1m_2 + a_{11}a_{33}m_1m_3 + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn}m_{n-1}m_n$$
$$- a_{12}a_{21}m_1m_2 - \cdots - a_{n-1,n}a_{n,n-1}m_{n-1}m_n)\left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{n-2}$$
$$- \cdots = 0 \tag{7.3}$$

Ésta es una ecuación polinomial de grado *enésimo* en $(1/\omega^2)$. Si las raíces de la ecuación (7.3) se indican como $1/\omega_1^2, 1/\omega_2^2, \ldots, 1/\omega_n^2$. Por lo tanto

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} - \cdots = 0 \tag{7.4}$$

Igualando el coeficiente de $(1/\omega^2)^{n-1}$ en las ecuaciones (7.4) y (7.3) se obtiene

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \tag{7.5}$$

En la mayoría de los casos, las frecuencias altas $\omega_2, \omega_3, ..., \omega_n$ son considerablemente más grandes que la frecuencia fundamental ω_1, y por lo tanto

$$\frac{1}{\omega_i^2} \ll \frac{1}{\omega_1^2}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

Por lo tanto, la ecuación (7.5) se puede escribir aproximadamente como

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \tag{7.6}$$

Esta ecuación se conoce como *fórmula de Dunkerley*. La frecuencia fundamental proporcionada por la ecuación (7.6) siempre será menor que el valor exacto. En algunos casos convendrá más volver a escribir la ecuación (7.6) como

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq \frac{1}{\omega_{1n}^2} + \frac{1}{\omega_{2n}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2} \tag{7.7}$$

donde $\omega_{in} = (1/a_{ii}m_i)^{1/2} = (k_{ii}/m_i)^{1/2}$ indica la frecuencia natural de un sistema de un solo grado de libertad compuesto de la masa m_i y el resorte de rigidez k_{ii}, $i = 1, 2, ..., n$. El uso de la fórmula de Dunkerley para determinar la frecuencia mínima de sistemas elásticos se presenta en las referencias [7.4, 7.5].

Ejemplo 7.1 Frecuencia fundamental de una viga

Calcule la frecuencia natural fundamental de una viga simplemente apoyada que carga tres masas idénticas equidistantes, como se muestra en la figura 7.1.

Solución: Los coeficientes de influencia de flexibilidad (vea el ejemplo 6.6) requeridos para la aplicación de la fórmula de Dunkerley están dados por

$$a_{11} = a_{33} = \frac{3}{256}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{22} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI} \tag{E.1}$$

Utilizando $m_1 = m_2 = m_3 = m$, la ecuación (7.6) resulta

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq \left(\frac{3}{256} + \frac{1}{48} + \frac{3}{256}\right)\frac{ml^3}{EI} = 0.04427\,\frac{ml^3}{EI}$$

$$\omega_1 \simeq 4.75375\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Este valor se compara con el valor exacto de la frecuencia fundamental $4.9326\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ (vea el problema 6.54)

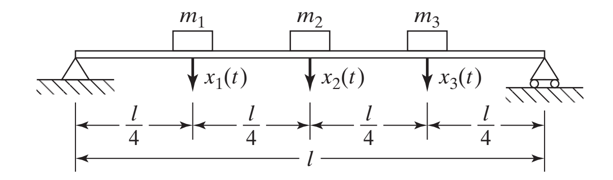


Figura 7.1 Viga que carga masas.

■

7.3 Método de Rayleigh

El método de Rayleigh se presentó en la sección 2.5 para hallar las frecuencias naturales de sistemas de un solo grado de libertad. El método se puede ampliar para encontrar el valor aproximado de la frecuencia natural fundamental de un sistema discreto.[1] El método está basado en el *principio de Rayleigh*, el cual se puede enunciar como sigue [7.6]:

> *La frecuencia de vibración de un sistema conservador vibratorio respecto a una posición de equilibrio tiene en valor estacionario de un modo natural. Este valor estacionario, de hecho, es un valor mínimo en la proximidad del modo natural fundamental.*

Ahora derivaremos una expresión para el valor apropiado de la primera frecuencia natural de un sistema de varios grados de libertad de acuerdo con el método de Rayleigh.

---

[1]El método de Rayleigh para sistemas continuos se presenta en la sección 9.7 del sitio web de este libro.

Las energías cinética y potencial de un sistema discreto de n grados de libertad se expresan como

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}} \tag{7.8}$$

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} \tag{7.9}$$

Para encontrar las frecuencias naturales, suponga que el movimiento armónico es

$$\vec{x} = \vec{X}\cos\omega t \tag{7.10}$$

donde $\vec{X}$ indica el vector de amplitudes (modo de forma) y ω representa la frecuencia natural de vibración. Si el sistema es conservador, la energía cinética máxima es igual a la energía potencial máxima:

$$T_{\text{máx}} = V_{\text{máx}} \tag{7.11}$$

Sustituyendo la ecuación (7.10) en las ecuaciones (7.8) y (7.9), encontramos

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\vec{X}^T[m]\vec{X}\omega^2 \tag{7.12}$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\vec{X}^T[k]\vec{X} \tag{7.13}$$

Igualando $T_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}$, obtenemos[2]

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}} \tag{7.14}$$

El lado derecho de la ecuación se conoce como *cociente de Rayleigh* y se indica como $R(\vec{X})$.

7.3.1 Propiedades del cociente de Rayleigh

Como ya antes se expresó, $R(\vec{X})$ tiene un valor estacionario cuando el vector arbitrario $\vec{X}$ se acerca a cualquier vector eigen $\vec{X}^{(r)}$. Para comprobarlo, expresamos el vector arbitrario $\vec{X}$ en función de los modos normales del sistema, $\vec{X}^{(i)}$, como

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} + c_3\vec{X}^{(3)} + \cdots \tag{7.15}$$

Entonces

$$\vec{X}^T[k]\vec{X} = c_1^2\vec{X}^{(1)^T}[k]\vec{X}^{(1)} + c_2^2\vec{X}^{(2)^T}[k]\vec{X}^{(2)} + c_3^2\vec{X}^{(3)^T}[k]\vec{X}^{(3)} + \cdots \tag{7.16}$$

[2]La ecuación (7.14) también se puede obtener a partir de la relación $[k]\vec{X} = \omega^2[m]\vec{X}$. Premultiplicando esta ecuación por $\vec{X}^T$ y resolviendo la ecuación resultante se obtiene la ecuación (7.14).

y

$$\vec{X}^T[m]\vec{X} = c_1^2\vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + c_2^2\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + c_3^2\vec{X}^{(3)^T}[m]\vec{X}^{(3)} + \cdots \tag{7.17}$$

como los términos cruzados de la forma $c_ic_j\vec{X}^{(i)^T}[k]\vec{X}^{(j)}$ y $c_ic_j\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(j)}$, $i \neq j$, son cero de acuerdo con la propiedad de ortogonalidad. Utilizando las ecuaciones (7.16) y (7.17) y la relación

$$\vec{X}^{(i)^T}[k]\vec{X}^{(i)} = \omega_i^2\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(i)} \tag{7.18}$$

el cociente de Rayleigh de la ecuación (7.14) se expresa como

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{c_1^2\,\omega_1^2\vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + c_2^2\omega_2^2\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots}{c_1^2\vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + c_2^2\,\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots} \tag{7.19}$$

Si los modos normales se normalizan, esta ecuación se escribe como

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{c_1^2\omega_1^2 + c_2^2\omega_2^2 + \cdots}{c_1^2 + c_2^2 + \cdots} \tag{7.20}$$

Si $\vec{X}$ difiere poco del vector eigen $\vec{X}^{(r)}$, el coeficiente c_r será mucho mayor que los coeficientes restantes c_i $(i \neq r)$ y la ecuación (7.20) se escribe como

$$R(\vec{X}) = \frac{c_r^2\omega_r^2 + c_r^2 \sum\limits_{\substack{i=1,2,\ldots\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i}{c_r}\right)^2 \omega_i^2}{c_r^2 + c_r^2 \sum\limits_{\substack{i=1,2,\ldots\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i}{c_r}\right)^2} \tag{7.21}$$

Dado que $|c_i/c_r| = \varepsilon_i \ll 1$, donde ε_i es un número pequeño para todas las i r, la ecuación (7.21) proporciona

$$R(\vec{X}) = \omega_r^2\{1 + 0(\varepsilon^2)\} \tag{7.22}$$

donde $0(\varepsilon^2)$ representa una expresión en ε del segundo orden o mayor. La ecuación (7.22) indica que si el vector arbitrario $\vec{X}$ difiere del vector eigen $\vec{X}^{(r)}$ en una pequeña cantidad del primer orden, $R(\vec{X})$ difiere del valor eigen ω_r^2 en una pequeña cantidad del segundo orden. Esto significa que el cociente de Rayleigh tiene un valor estacionario en la proximidad de un vector eigen.

El valor estacionario es en realidad un valor mínimo cerca del modo fundamental $\vec{X}^{(1)}$. Para ver esto, sea $r = 1$ en la ecuación (7.21) y escribimos

$$R(\vec{X}) = \frac{\omega_1^2 + \sum\limits_{i=2,3,\ldots} \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^2 \omega_i^2}{\left\{1 + \sum\limits_{i=2,3,\ldots} \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^2\right\}}$$

$$\simeq \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\ldots} \varepsilon_i^2 \omega_i^2 - \omega_1^2 \sum_{i=2,3,\ldots} \varepsilon_i^2$$

$$\simeq \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\ldots} (\omega_i^2 - \omega_1^2)\varepsilon_i^2 \tag{7.23}$$

Puesto que, por lo general, $\omega_i^2 > \omega_1^2$ con $i = 2, 3, ...$, la ecuación (7.23) conduce a

$$R(\vec{X}) \geq \omega_1^2 \tag{7.24}$$

la cual muestra que el cociente de Rayleigh nunca es menor que el primer valor eigen. Procediendo de la misma manera, podemos mostrar que

$$R(\vec{X}) \leq \omega_n^2 \tag{7.25}$$

lo que significa que el cociente de Rayleigh nunca es más alto que el valor eigen más alto. Así que el cociente de Rayleigh constituye un límite superior para ω_1^2 y un límite inferior para ω_n^2.

7.3.2 Cálculo de la frecuencia natural fundamental

Se puede utilizar la ecuación (7.14) para determinar un valor aproximado de la primera frecuencia natural (ω_1) del sistema. Para esto, seleccionamos un vector de prueba $\vec{X}$ para representar el primer modo natural $\vec{X}^{(1)}$ y lo sustituimos en el lado derecho de la ecuación (7.14). Esto da el valor aproximado de ω_1^2. Debido a que el cociente de Rayleigh es estacionario, se pueden obtener estimaciones notablemente buenas de ω_1^2 incluso si el vector de prueba $\vec{X}$ se desvía mucho del verdadero modo natural $\vec{X}^{(1)}$. Obviamente, el valor estimado de la frecuencia fundamental ω_1 es más preciso si el vector de prueba $(\vec{X})$ seleccionado se parece mucho al modo natural verdadero $\vec{X}^{(1)}$. El método de Rayleigh se compara con el método de Dunkerley u otros métodos en las referencias [7.7-7.9].

Ejemplo 7.2 Frecuencia fundamental de un sistema de tres grados de libertad

Estime la frecuencia fundamental de vibración del sistema que se muestra en la figura 7.2. Suponga que $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$, y la forma de modo es

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Solución: Las matrices de masa y rigidez del sistema son

$$[k] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

$$[m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

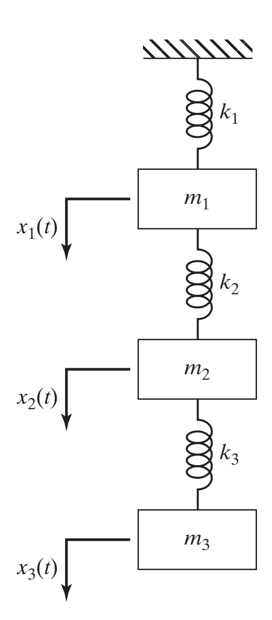


Figura 7.2 Sistema de resorte-masa de tres grados de libertad.

Sustituyendo la forma de modo supuesta en la expresión para el cociente de Rayleigh, obtenemos

$$R(\vec{X}) = \omega^2 = \frac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}} = \frac{(1\;2\;3)k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}{(1\;2\;3)m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}} = 0.2143\,\frac{k}{m} \tag{E.3}$$

$$\omega_1 = 0.4629\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{E.4}$$

Este valor es 4.0225 por ciento mayor que el valor exacto de 0.4450 $\sqrt{k/m}$. La forma de modo fundamental exacto (vea el ejemplo 6.10) en este caso es

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \tag{E.5}$$

■

7.3.3 Frecuencia fundamental de vigas y flechas

Aunque el procedimiento antes descrito es aplicable a todos los sistemas discretos, se puede derivar una ecuación más simple para la frecuencia fundamental de la vibración lateral de una flecha o una viga que cargue varias masas como poleas, engranes o volantes. En estos casos, la curva de deflexión estática se utiliza como una aproximación de la curva de deflexión dinámica.

Considere una flecha que carga varias masas, como se muestra en la figura 7.3. Se supone que la flecha tiene una masa insignificante. La energía potencial del sistema es la energía de deformación de la flecha deformada, la cual es igual al trabajo realizado por las cargas estáticas. Así pues

$$V_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\,(m_1 g w_1 + m_2 g w_2 + \cdots) \tag{7.26}$$

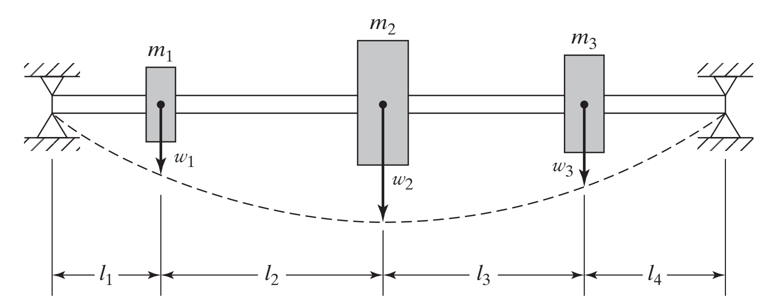


Figura 7.3 Flecha con masas.

donde $m_i g$ es la carga estática producida por la masa m_i y w_i es la deflexión estática total de la masa m_i debido a todas las masas. Para oscilación armónica (vibración libre), la energía cinética máxima producida por las masas es

$$T_{\text{máx}} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \cdots) \tag{7.27}$$

donde ω es la frecuencia de oscilación. Igualando $V_{\text{máx}}$ y $T_{\text{máx}}$, obtenemos

$$\omega = \left\{ \frac{g(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots)}{(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \cdots)} \right\}^{1/2} \tag{7.28}$$

Ejemplo 7.3 Frecuencia fundamental de una flecha con rotores

Estime la frecuencia fundamental de la vibración lateral de una flecha que cuenta con tres rotores (masas) como se muestra en la figura 7.3, con $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 50$ kg, $m_3 = 40$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 3$ m, $l_3 = 4$ m y $l_4 = 2$ m. La flecha es de acero con una sección transversal sólida de 10 cm de diámetro.

Solución: Según la resistencia de materiales, la deflexión de la viga que se muestra en la figura 7.4 producida por una carga estática P[7.10] está dada por

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pbx}{6EIl}(l^2 - b^2 - x^2); & 0 \le x \le a \quad \text{(E.1)} \\ -\dfrac{Pa(l-x)}{6EIl}[a^2 + x^2 - 2lx]; & a \le x \le l \quad \text{(E.2)} \end{cases}$$

Deflexión producida por el peso de m_1: En la ubicación de la masa m_1 (con $x = 1$m, $b = 9$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)):

$$w_1' = \frac{(20 \times 9.81)(9)(1)}{6EI(10)}(100 - 81 - 1) = \frac{529.74}{EI} \tag{E.3}$$

En la ubicación de m_2 (con $a = 1$, $x = 4$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.2)):

$$w_2' = -\frac{(20 \times 9.81)(1)(6)}{6EI(10)}[1 + 16 - 2(10)(4)] = \frac{1236.06}{EI} \tag{E.4}$$

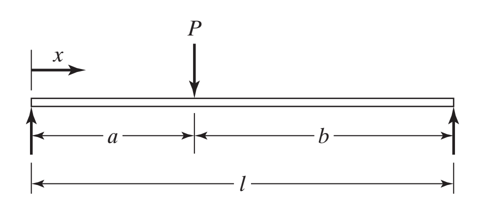


Figura 7.4 Viga sometida a una carga estática.

En la ubicación de m_3 (con $a = 1$ m, $x = 8$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.2)):

$$w_3' = -\frac{(20 \times 9.81)(1)(2)}{6EI(10)}[1 + 64 - 2(10)(8)] = \frac{621.3}{EI} \tag{E.5}$$

Deflexión producida por el peso de m_2: En la ubicación de m_1 (con $x = 1$ m, $b = 6$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)):

$$w_1'' = \frac{(50 \times 9.81)(6)(1)}{6EI(10)}(100 - 36 - 1) = \frac{3090.15}{EI} \tag{E.6}$$

En la ubicación de m_2 (con $x = 4$ m, $b = 6$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)).

$$w_2'' = \frac{(50 \times 9.81)(6)(4)}{6EI(10)}(100 - 36 - 16) = \frac{9417.6}{EI} \tag{E.7}$$

En la ubicación de m_3 (con $a = 4$ m, $x = 8$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.2)):

$$w_3'' = -\frac{(50 \times 9.81)(4)(2)}{6EI(10)}[16 + 64 - 2(10)(8)] = \frac{5232.0}{EI} \tag{E.8}$$

Deflexión producida por el peso de m_3: En la ubicación de m_1 (con $x = 1$ m, $b = 2$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)):

$$w_1''' = \frac{(40 \times 9.81)(2)(1)}{6EI(10)}(100 - 4 - 1) = \frac{1242.6}{EI} \tag{E.9}$$

En la ubicación de m_2 (con $x = 4$ m, $b = 2$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)):

$$w_2''' = \frac{(40 \times 9.81)(2)(4)}{6EI(10)}(100 - 4 - 16) = \frac{4185.6}{EI} \tag{E.10}$$

En la ubicación de m_3 (con $x = 8$ m, $b = 2$ m y $l = 10$ m en la ecuación (E.1)):

$$w_3''' = \frac{(40 \times 9.81)(2)(8)}{6EI(10)}(100 - 4 - 64) = \frac{3348.48}{EI} \tag{E.11}$$

Las deflexiones totales de las masas m_1, m_2 y m_3 son

$$w_1 = w_1' + w_1'' + w_1''' = \frac{4862.49}{EI}$$

$$w_2 = w_2' + w_2'' + w_2''' = \frac{14839.26}{EI}$$

$$w_3 = w_3' + w_3'' + w_3''' = \frac{9201.78}{EI}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.28), determinamos la frecuencia natural fundamental:

$$\omega = \left\{ \frac{9.81(20 \times 4862.49 + 50 \times 14839.26 + 40 \times 9201.78)EI}{20 \times (4862.49)^2 + 50 \times (14839.26)^2 + 40 \times (9201.78)^2} \right\}^{1/2}$$

$$= 0.028222\sqrt{EI} \tag{E.12}$$

Para la flecha, $E = 2.07 \times 10^{11}$ N/m^2 e $I = \pi(0.1)^4/64 = 4.90875 \times 10^{-6}$ m^4 y por consiguiente la ecuación (E.12) resulta

$$\omega = 28.4482 \text{ rad/s}$$

■

7.4 Método de Holzer

El método de Holzer es en esencia un esquema de prueba y error para determinar las frecuencias naturales de sistemas subamortiguados, amortiguados, semidefinidos, fijos, o sistemas vibratorios ramificados que implican desplazamientos lineales y angulares [7.11, 7.12]. El método también se puede programar para aplicaciones de computadora. Primero se supone una frecuencia de prueba del sistema, y se determina una solución donde la frecuencia supuesta satisface las restricciones del sistema. Esto por lo común requiere varias pruebas. Dependiendo de la frecuencia de prueba utilizada, se puede determinar la frecuencia fundamental y también las altas frecuencias del sistema. El método también proporciona los modos.

7.4.1 Sistemas torsionales

Considere el sistema semidefinido torsional no amortiguado que se muestra en la figura 7.5. Las ecuaciones de movimiento de los discos se derivan como sigue:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + k_{t1}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{7.29}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) + k_{t2}(\theta_2 - \theta_3) = 0 \tag{7.30}$$

$$J_3\ddot{\theta}_3 + k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0 \tag{7.31}$$

Como el movimiento es armónico en un modo natural de vibración, suponemos que $\theta_i = \Theta_i \cos(\omega t + \phi)$ en las ecuaciones (7.29) a (7.31) y obtenemos

$$\omega^2 J_1\Theta_1 = k_{t1}(\Theta_1 - \Theta_2) \tag{7.32}$$

$$\omega^2 J_2\Theta_2 = k_{t1}(\Theta_2 - \Theta_1) + k_{t2}(\Theta_2 - \Theta_3) \tag{7.33}$$

$$\omega^2 J_3\Theta_3 = k_{t2}(\Theta_3 - \Theta_2) \tag{7.34}$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} \omega^2 J_i\Theta_i = 0 \tag{7.35}$$

La ecuación (7.35) expresa que la suma de los momentos de torsión de inercia del sistema semidefinido debe ser cero. Esta ecuación se puede tratar como otra forma de la ecuación de frecuencia y la frecuencia de prueba debe satisfacer este requerimiento.

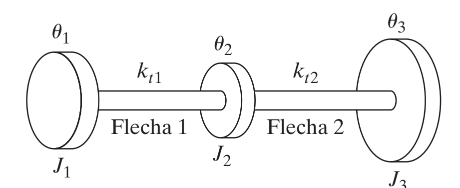


Figura 7.5 Sistema torsional semidefinido.

En el método de Holzer se supone una frecuencia de prueba ω, y $\mathbf{\Theta}_1$ se escoge arbitrariamente como unitaria. Luego se calcula $\mathbf{\Theta}_2$ a partir de la ecuación (7.32) y en seguida se encuentra $\mathbf{\Theta}_3$ a partir de la ecuación (7.33). Así que obtenemos

$$\Theta_1 = 1 \tag{7.36}$$

$$\Theta_2 = \Theta_1 - \frac{\omega^2 J_1 \Theta_1}{k_{t1}} \tag{7.37}$$

$$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{\omega^2}{k_{t2}}(J_1\Theta_1 + J_2\Theta_2) \tag{7.38}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación (7.35) para verificar si la restricción se satisface. Si no se satisface la ecuación (7.35), se supone un nuevo valor de prueba de ω y el proceso se repite. Las ecuaciones (7.35), (7.37) y (7.38) se pueden generalizar para un sistema de n discos como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \tag{7.39}$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{ti-1}}\left(\sum_{k=1}^{i-1} J_k \Theta_k\right), \qquad i = 2, 3, \cdots, n \tag{7.40}$$

De esta forma, el método utiliza las ecuaciones (7.39) y (7.40) repetidamente para diferentes frecuencias de prueba. Si la frecuencia de prueba supuesta no es una frecuencia natural del sistema, la ecuación (7.39) no se satisface. El momento de torsión resultante en la ecuación (7.39) representa un par de torsión aplicado al último disco. Este par de torsión M_i se traza entonces para la ω escogida. Cuando el cálculo se repite con otros valores de ω, la gráfica resultante aparece como se muestra en la figura 7.6. Desde esta gráfica, las frecuencias naturales del sistema se identifican

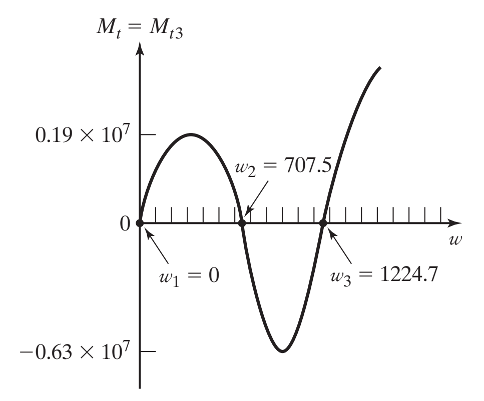


Figura 7.6 Par de torsión resultante contra frecuencia.

como los valores de ω con los cuales $M_t = 0$. Las amplitudes Θ_i ($i = 1, 2, ..., n$) correspondientes a las frecuencias naturales son los modos del sistema.

El método de Holzer también se puede aplicar a sistemas con extremos fijos. En un extremo fijo, la amplitud de vibración debe ser cero. En este caso, las frecuencias naturales se determinan trazando la amplitud resultante (en lugar del par de torsión resultante) contra las frecuencias supuestas. Para un sistema con un extremo libre y el otro fijo, se puede utilizar la ecuación (7.40) para verificar la amplitud en el extremo fijo. En las referencias [7.13, 7.14] se presenta una mejora del método de Holzer.

Ejemplo 7.4 Frecuencias naturales de un sistema torsional

En la figura 7.7 se muestra la disposición del compresor, turbina y generador en una planta termoeléctrica. Encuentre las frecuencias y modos naturales del sistema.

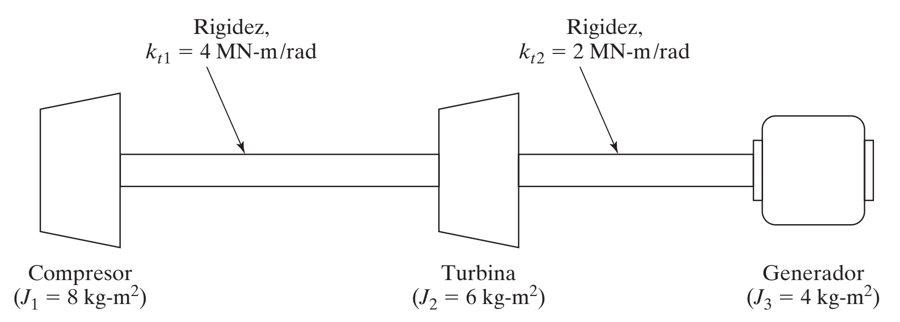


Figura 7.7 Sistema torsional con ambos extremos libres.

Tabla 7.1

Parámetros del sistema	Cantidad	Prueba 1	2	3	···	71	72
		0	10	20		700	710
	ω^2	0	100	400		490000	504100
Estación 1:							
$J_1 = 8$	Θ_1	1.0	1.0	1.0		1.0	1.0
$kt_1 = 4 \times 10^6$	$M_{t1} = \omega^2 J_1 \Theta_1$	0	800	3200		0.392E7	0.403E7
Estación 2:							
$J_2 = 6$	$\Theta_2 = 1 - \frac{M_{t1}}{k_{t1}}$	1.0	0.9998	0.9992		0.0200	−0.0082
$k_{t2} = 2 \times 10^6$	$M_{t2} = M_{t1} + \omega^2 J_2 \Theta_2$	0	1400	5598		0.398E7	0.401E7
Estación 3:							
$J_3 = 4$	$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{M_{t2}}{k_{t2}}$	1.0	0.9991	0.9964		−1.9690	−2.0120
$k_{t3} = 0$	$M_{t3} = M_{t2} + \omega^2 J_3 \Theta_3$	0	1800	7192		0.119E6	−0.494E5

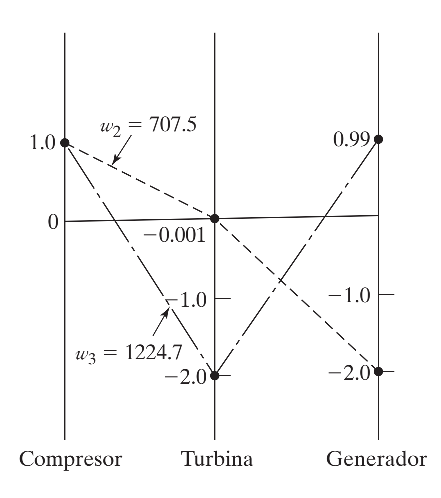


Figura 7.8 Primeros dos modos flexibles.

Solución: Este sistema representa un sistema torsional no restringido o con ambos extremos libres. La tabla 7.1 muestra sus parámetros y la secuencia de los cálculos. Los cálculos para las frecuencias de prueba $\omega = 0$, 10, 30, 700 y 710 se muestran en esta tabla. La cantidad M_{t3} indica el par de torsión a la derecha de la estación 3 (generador), la cual debe ser cero a las frecuencias naturales. La figura 7.6 muestra la gráfica de M_{i3} comparada con ω. Se utilizan valores de prueba muy cercanos en la proximidad de $M_{i3} = 0$ para obtener valores precisos de los primeros dos modos flexibles, que se muestran en la figura 7.8. Observe que el valor $\omega = 0$ corresponde a la rotación de cuerpo rígido.

■

7.4.2 Sistemas de resorte-masa

Aunque el método de Holzer se ha aplicado en gran medida a sistemas torsionales, el procedimiento es igualmente aplicable al análisis de vibración de sistemas de resorte-masa. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de resorte-masa (vea la figura 7.9) se expresan como

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \tag{7.41}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0$$
$$\cdots \tag{7.42}$$

Para movimiento armónico, $x_i(t) = X_i \cos \omega t$, donde X_i es la amplitud de la masa m_i y las ecuaciones (7.41) y (7.42) se escriben como

$$\omega^2 m_1 X_1 = k_1(X_1 - X_2) \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 m_2 X_2 &= k_1(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X_3) \\ &= -\omega^2 m_1 X_1 + k_2(X_2 - X_3) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{7.44}$$

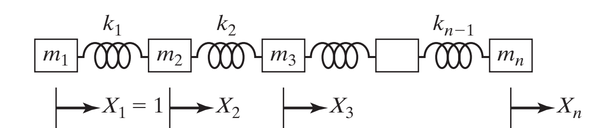


Figura 7.9 Sistema de resorte masa con ambos extremos libres.

El procedimiento para el método de Holzer se inicia con una frecuencia de prueba ω y la amplitud de la masa m_i como $X_1 = 1$. Las ecuaciones (7.43) y (7.44) se pueden utilizar entonces para obtener las amplitudes de las masas m_2, m_3, ··, m_i:

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 m_1 X_1}{k_1} \tag{7.45}$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2}(m_1 X_1 + m_2 X_2) \tag{7.46}$$

$$X_i = X_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}}\left(\sum_{k=1}^{i-1} m_k X_k\right), \qquad i = 2, 3, \ldots, n \tag{7.47}$$

Como en el caso de sistemas torsionales, la fuerza resultante aplicada a la última masa (*enésima*) se calcula como sigue:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \omega^2 m_i X_i \tag{7.48}$$

Los cálculos se repiten con otras frecuencias más de prueba ω. Las frecuencias naturales se identifican como aquellos valores de ω que proporcionan $F = 0$ para un sistema con ambos extremos libres. Para ello, es conveniente trazar una gráfica entre F y ω, utilizando el mismo procedimiento para sistemas de resorte-masa que para sistemas torsionales.

7.5 Método de iteración matricial

El método de iteración matricial asume que las frecuencias naturales son distintas y también separadas de modo que $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$. La iteración se inicia seleccionando un vector de prueba $\vec{X}_1$, el que luego se premultiplica por la matriz dinámica [D]. El vector columna resultante luego se normaliza, por lo común haciendo que uno de sus componentes sea igual a la unidad. El vector columna normalizado se premultiplica por [D] para obtener un tercer vector columna el cual se normaliza del mismo modo que antes y se convierte en otro vector columna de prueba. El proceso se repite hasta que los vectores columna normalizados sucesivos convergen a un vector común: el vector eigen fundamental. El factor de normalización presenta el valor máximo de $\lambda = 1/\omega^2$, es decir, el valor mínimo de la frecuencia natural fundamental [7.15]. La convergencia del proceso se explica como sigue:

De acuerdo con el teorema de expansión, cualquier vector arbitrario de n dimensiones $\vec{X}_1$ se puede expresar como una combinación lineal de n vectores eigen ortogonales del sistema $\vec{X}^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$:

$$\vec{X}_1 = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} + \cdots + c_n\vec{X}^{(n)} \tag{7.49}$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes. En el método de iteración, el vector de prueba $\vec{X}_1$ se selecciona arbitrariamente y es por consiguiente un vector conocido. Los vectores modales $\vec{X}^{(i)}$, aunque desconocidos, son vectores constantes porque dependen de las propiedades del sistema. Las constantes c_i son números desconocidos que se tienen que determinar. De acuerdo con el método de iteración, premultiplicamos $\vec{X}^{(i)}$ por la matriz [D]. Considerando la ecuación (7.49), esto proporciona

$$[D]\vec{X}_1 = c_1[D]\vec{X}^{(1)} + c_2[D]\vec{X}^{(2)} + \cdots + c_n[D]\vec{X}^{(n)} \tag{7.50}$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (6.66) tenemos

$$[D]\vec{X}^{(i)} = \lambda_i[I]\vec{X}^{(i)} = \frac{1}{\omega_i^2}\vec{X}^{(i)}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.51}$$

La sustitución de la ecuación (7.51) en la ecuación (7.50) produce

$$\begin{aligned}[D]\vec{X}_1 &= \vec{X}_2 \\ &= \frac{c_1}{\omega_1^2}\vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^2}\vec{X}^{(2)} + \cdots + \frac{c_n}{\omega_n^2}\vec{X}^{(n)}\end{aligned} \tag{7.52}$$

donde $\vec{X}_2$ es el segundo vector de prueba. Ahora repetimos el proceso y premultiplicamos $\vec{X}_2$ por $[D]$ para obtener las ecuaciones (7.49) y (6.66),

$$\begin{aligned}[D]\vec{X}_2 &= \vec{X}_3 \\ &= \frac{c_1}{\omega_1^4}\vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^4}\vec{X}^{(2)} + \cdots + \frac{c_n}{\omega_n^4}\vec{X}^{(n)}\end{aligned} \tag{7.53}$$

Repitiendo el proceso obtenemos, después de la *enésima* iteración,

$$\begin{aligned}[D]\vec{X}_r &= \vec{X}_{r+1} \\ &= \frac{c_1}{\omega_1^{2r}}\vec{X}^{(1)} + \frac{c_2}{\omega_2^{2r}}\vec{X}^{(2)} + \cdots + \frac{c_n}{\omega_n^{2r}}\vec{X}^{(n)}\end{aligned} \tag{7.54}$$

Como se supone que las frecuencias naturales son $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_n$, un valor suficientemente grande de r da

$$\frac{1}{\omega_1^{2r}} \gg \frac{1}{\omega_2^{2r}} \gg \cdots \gg \frac{1}{\omega_n^{2r}} \tag{7.55}$$

Así, el primer término del lado derecho de la ecuación (7.54) llega a ser el único significativo. Por consiguiente tenemos

$$\vec{X}_{r+1} = \frac{c_1}{\omega_1^{2r}}\vec{X}^{(1)} \tag{7.56}$$

lo cual significa que el vector de prueba $(r + 1)$ t-ésimo llega a ser idéntico al vector modal fundamental dentro de una constante multiplicativa. Como

$$\vec{X}_r = \frac{c_1}{\omega_1^{2(r-1)}}\vec{X}^{(1)} \tag{7.57}$$

la frecuencia natural fundamental ω_1 se encuentra considerando la relación de dos componentes cualesquiera que corresponden en los vectores $\vec{X}_r$ y $\vec{X}_{r+1}$:

$$\omega_1^2 \simeq \frac{X_{i,r}}{X_{i,r+1}} \qquad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.58}$$

donde $X_{i,r}$ y $X_{i,r+1}$ son los elementos i-ésimos de los vectores X_r y X_{r+1}, respectivamente.

Debate

1. En la comprobación anterior no se dijo nada sobre la normalización de los vectores de prueba sucesivos $\vec{X}_i$. En realidad, no es necesario comprobar la convergencia del método. La normalización equivale a reajustar las constantes, $c_1, c_2, ..., c_n$ en cada iteración.
2. Aunque es teóricamente necesario que $r \to \infty$ para la convergencia del método, en la práctica sólo basta un número finito de iteraciones para obtener una estimación razonablemente buena de ω_1.
3. La cantidad real de iteraciones que se requiere para encontrar el valor de ω_1 dentro de un grado de precisión deseado depende de cuánto se parezca el vector de prueba arbitrario $\vec{X}_i$ al modo fundamental $\vec{X}^{(1)}$ y de qué tan bien estén separadas ω_1 y ω_2. La cantidad requerida de iteraciones es menor si ω_2 es muy grande comparada con ω_1.
4. El método tiene una ventaja distinta en que cualesquiera errores de cálculo cometidos no dan resultados incorrectos. Cualquier error cometido al premultiplicar $\vec{X}_i$ por $[D]$ da por resultado un vector distinto al deseado, $\vec{X}_{i+1}$. Pero este vector incorrecto se puede considerar como un nuevo vector de prueba. Esto puede retardar la convergencia pero no produce resultados incorrectos.
5. Podemos considerar cualquier conjunto de n números para el primer vector de prueba $\vec{X}_1$ y aún lograr la convergencia al vector modal fundamental. Sólo en el caso inusual de que el vector de prueba $\vec{X}_1$ sea exactamente proporcional a uno de los modos $\vec{X}^{(i)}$ $(i \neq 1)$ el método no converge al primer modo. En ese caso, la premultiplicación de $\vec{X}^{(i)}$ por $[D]$ da un vector proporcional a $\vec{X}^{(i)}$.

7.5.1 Convergencia a la frecuencia natural más alta

Para obtener la frecuencia natural más alta ω_n y el modo correspondiente o vector eigen $\vec{X}^{(n)}$ por medio del método de iteración matricial, primero reescribimos la ecuación (6.66) como

$$[D]^{-1}\vec{X} = \omega^2[I]\vec{X} = \omega^2\vec{X} \tag{7.59}$$

donde $[D]^{-1}$ es la inversa de la matriz dinámica $[D]$ dada por

$$[D]^{-1} = [m]^{-1}[k] \tag{7.60}$$

Ahora seleccionamos cualquier vector de prueba arbitrario $\vec{X}_1$ y lo premultiplicamos por $[D]^{-1}$ para obtener un vector de prueba mejorado $\vec{X}_2$. La secuencia de vectores de prueba $\vec{X}_{i+1}$ $(i = 1, 2,...)$ obtenida premultiplicando por $[D]^{-1}$ converge al modo normal más alto $\vec{X}^{(n)}$. Se ve que el procedimiento es parecido al que ya se describió. La constante de proporcionalidad en este caso es ω^2 en lugar de $1/\omega^2$.

7.5.2 Cálculo de frecuencias naturales intermedias

Una vez que se determinan la primera frecuencia natural ω_1 (o el valor eigen más grande $\lambda_1 = 1/\omega_1^2$) y el vector eigen $\vec{X}^{(1)}$ correspondiente, podemos proceder a encontrar las frecuencias naturales más altas y los modos correspondientes mediante el método de iteración matricial. Antes de proceder, debemos recordar que cualquier vector de prueba arbitrario premultiplicado por $[D]$ conduciría de nuevo al valor eigen más grande. Así que es necesario eliminar el valor eigen más grande de la matriz $[D]$. Los valores eigen y vectores eigen subsiguientes se obtienen eliminando la raíz λ_1 de la ecuación característica o de frecuencia

$$|[D] - \lambda[I]| = 0 \tag{7.61}$$

Para este propósito se puede utilizar un procedimiento conocido como *deflación matricial* [7.16]. Para hallar el vector eigen $\vec{X}^{(i)}$ por este procedimiento, el vector eigen anterior $\vec{X}^{(i-1)}$ se normaliza con respecto a la matriz de masa de modo que

$$\vec{X}^{(i-1)T}[m]\vec{X}^{(i-1)} = 1 \tag{7.62}$$

La matriz deflacionada $[D_i]$ se construye entonces como

$$[D_i] = [D_{i-1}] - \lambda_{i-1}\vec{X}^{(i-1)}\vec{X}^{(i-1)T}[m], \qquad i = 2, 3, \ldots, n \tag{7.63}$$

donde $[D_1] = [D]$. Una vez construida $[D_i]$ el esquema iterativo

$$\vec{X}_{r+1} = [D_i]\vec{X}_r \tag{7.64}$$

se utiliza, donde $\vec{X}_1$ es un vector eigen de prueba arbitrario.

Ejemplo 7.5 Frecuencias naturales de un sistema de tres grados de libertad

Encuentre las frecuencias y modos naturales del sistema que se muestra en la figura 7.2 para $k_1 = k_2 = k_3 = k$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$ por medio del método de iteración.

Solución: Las matrices de masa y rigidez del sistema se dan en el ejemplo 7.2. La matriz de flexibilidad es

$$[a] = [k]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

y por tanto la matriz dinámica es

$$[k]^{-1}[m] = \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

El problema de valor eigen se expresa como

$$[D]\vec{X} = \lambda\vec{X} \tag{E.3}$$

donde

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

y

$$\lambda = \frac{k}{m}\cdot\frac{1}{\omega^2} \tag{E.5}$$

Primera frecuencia natural: Suponiendo que el primer vector eigen o modo de prueba es

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{(E.6)}$$

se puede obtener el segundo vector eigen de prueba

$$\vec{X}_2 = [D]\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad \text{(E.7)}$$

Haciendo el primer elemento igual a la unidad, obtenemos

$$\vec{X}_2 = 3.0\begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.6667 \\ 2.0000 \end{Bmatrix} \quad \text{(E.8)}$$

y el valor eigen correspondiente está dado por

$$\lambda_1 \simeq 3.0 \qquad \text{o} \qquad \omega_1 \simeq 0.5773\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(E.9)}$$

El subsiguiente vector eigen de prueba se puede obtener a partir de la relación

$$\vec{X}_{i+1} = [D]\vec{X}_i \quad \text{(E.10)}$$

y los valores eigen correspondientes los proporciona

$$\lambda_1 \simeq X_{1,\, i+1} \quad \text{(E.11)}$$

donde $X_{1,\, i+1}$ es el primer componente del vector $\vec{X}_{i+1}$ antes de normalizarlo. Los diversos vectores eigen y valores eigen de prueba obtenidos con las ecuaciones (E.10) y (E.11) se muestran en la tabla de la página siguiente.

Se ve que la forma de modo y la frecuencia natural convergieron (a la cuarta cifra decimal) en ocho iteraciones. Por tanto, el primer valor eigen y la frecuencia natural así como la forma de modo correspondientes están dados por

$$\lambda_1 = 5.04892, \qquad \omega_1 = 0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80194 \\ 2.24698 \end{Bmatrix} \quad \text{(E.12)}$$

Segunda frecuencia natural: Para calcular el segundo valor eigen y el segundo vector eigen, primero debemos producir una matriz deflacionada:

$$[D_2] = [D_1] - \lambda_1 \vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(1)T} [m] \quad \text{(E.13)}$$

i	$\vec{X}_i$ con $X_{1,i} = 1$	$\vec{X}_{i+1} = [D]\vec{X}_i$	$\lambda_1 \simeq X_{1,i+1}$	ω_1
1	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$	3.0	$0.5773\sqrt{\frac{k}{m}}$
2	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.66667 \\ 2.00000 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4.66667 \\ 8.33333 \\ 10.33333 \end{Bmatrix}$	4.66667	$0.4629\sqrt{\frac{k}{m}}$
3	$\begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.7857 \\ 2.2143 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.00000 \\ 9.00000 \\ 11.2143 \end{Bmatrix}$	5.00000	$0.4472\sqrt{\frac{k}{m}}$
. . .				
7	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80193 \\ 2.24697 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.04891 \\ 9.09781 \\ 11.34478 \end{Bmatrix}$	5.04891	$0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}$
8	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80194 \\ 2.24698 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5.04892 \\ 9.09783 \\ 11.34481 \end{Bmatrix}$	5.04892	$0.44504\sqrt{\frac{k}{m}}$

Esta ecuación, sin embargo, requiere un vector normalizado $\vec{X}^{(1)}$ que satisfaga $\vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1$. Sea el vector normalizado indicado como

$$\vec{X}^{(1)} = \alpha \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80194 \\ 2.24698 \end{Bmatrix}$$

donde α es una constante cuyo valor debe ser tal que

$$\begin{aligned} \vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} &= \alpha^2 m \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80194 \\ 2.24698 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.80194 \\ 2.24698 \end{Bmatrix} \\ &= \alpha^2 m(9.29591) = 1 \end{aligned} \tag{E.14}$$

de la cual obtenemos $\alpha = 0.3279m^{-1/2}$. Por consiguiente, el primer vector eigen normalizado es

$$\vec{X}^{(1)} = m^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0.32799 \\ 0.59102 \\ 0.73699 \end{Bmatrix} \tag{E.15}$$

Luego utilizamos la ecuación (E.13) y formamos la primera matriz deflacionada:

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 5.04892 \begin{Bmatrix} 0.32799 \\ 0.59102 \\ 0.73699 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.32799 \\ 0.59102 \\ 0.73699 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.45684 & 0.02127 & -0.22048 \\ 0.02127 & 0.23641 & -0.19921 \\ -0.22048 & -0.19921 & 0.25768 \end{bmatrix} \tag{E.16}$$

Como el vector de prueba se puede seleccionar arbitrariamente, de nueva cuenta consideramos

$$\vec{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{E.17}$$

Utilizando el esquema iterativo

$$\vec{X}_{i+1} = [D_2]\vec{X}_i \tag{E.18}$$

obtenemos $\vec{X}_2$

$$\vec{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0.25763 \\ 0.05847 \\ -0.16201 \end{Bmatrix} = 0.25763 \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 0.22695 \\ -0.62885 \end{Bmatrix} \tag{E.19}$$

De ahí que λ_2 se pueda encontrar a partir de la relación general

$$\lambda_2 \simeq X_{1,i+1} \tag{E.20}$$

como 0.25763. La continuación de este procedimiento proporciona los resultados que se muestran en la tabla siguiente.

i	$\vec{X}_i$ con $X_{1,i} = 1$	$\vec{X}_{i+1} = [D_2]\vec{X}_i$	$\lambda_2 \simeq X_{1,i+1}$	ω_2
1	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.25763 \\ 0.05847 \\ -0.16201 \end{Bmatrix}$	0.25763	$1.97016\sqrt{\frac{k}{m}}$
2	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 0.22695 \\ -0.62885 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.60032 \\ 0.20020 \\ -0.42773 \end{Bmatrix}$	0.60032	$1.29065\sqrt{\frac{k}{m}}$
⋮				
10	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 0.44443 \\ -0.80149 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.64300 \\ 0.28600 \\ -0.51554 \end{Bmatrix}$	0.64300	$1.24708\sqrt{\frac{k}{m}}$
11	$\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 0.44479 \\ -0.80177 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.64307 \\ 0.28614 \\ -0.51569 \end{Bmatrix}$	0.64307	$1.24701\sqrt{\frac{k}{m}}$

Así, el segundo valor eigen y el segundo vector eigen convergidos son

$$\lambda_2 = 0.64307, \qquad \omega_2 = 1.24701\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 0.44496 \\ -0.80192 \end{Bmatrix} \tag{E.21}$$

Tercera frecuencia natural: Para el tercer valor eigen y el tercer vector eigen utilizamos un procedimiento precido. Los cálculos detallados se dejan como ejercicio al lector. Observe que antes de calcular la matriz deflacionada $[D_3]$, necesitamos normalizar $\vec{X}^{(2)}$ utilizando la ecuación (7.62), la cual proporciona

$$\vec{X}^{(2)} = m^{-1/2}\begin{Bmatrix} 0.73700 \\ 0.32794 \\ -0.59102 \end{Bmatrix} \tag{E.22}$$

■

7.6 Método de Jacobi

El método de iteración matricial descrito en la sección anterior produce los valores y vectores eigen de la matriz $[D]$ a la vez. El método de Jacobi también es un método iterativo pero produce todos los valores y vectores eigen de $[D]$ al mismo tiempo, donde $[D] = [d_{ij}]$ es una matriz simétrica real de orden $n \times n$. El método está basado en un teorema de álgebra lineal que establece que una matriz simétrica real $[D]$ tiene sólo valores eigen reales y que en ella existe una matriz ortogonal real $[R]$ de modo que $[R]^T[D][R]$ es diagonal [7.17]. Los elementos diagonales son los valores eigen, y las columnas de la matriz $[R]$ son los vectores eigen. De acuerdo con el método de Jacobi, la matriz $[R]$ se genera como un producto de varias matrices de rotación [7.18] de la forma

$$\underset{n\times n}{[R_1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\theta & & -\operatorname{sen}\theta & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & \operatorname{sen}\theta & & \cos\theta & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{fila } i\text{-ésima} \\ \\ \text{fila } j\text{-ésima} \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{7.65}$$

(columna i-ésima, columna j-ésima)

donde todos los elementos aparte de los que aparecen en las columnas y filas i y j son idénticos a los de la matriz identidad $[I]$. Si las entradas seno y coseno aparecen en las posiciones (i, i), (i, j), (j, i) y (j, j), entonces los elementos correspondientes de $[R_1]^T[D][R_1]$ se calculan como sigue:

$$\underline{d}_{ii} = d_{ii}\cos^2\theta + 2d_{ij}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + d_{jj}\operatorname{sen}^2\theta \tag{7.66}$$

$$\underline{d}_{ij} = \underline{d}_{ji} = (d_{jj} - d_{ii})\operatorname{sen}\theta\cos\theta + d_{ij}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \tag{7.67}$$

$$\underline{d}_{jj} = d_{ii}\operatorname{sen}^2\theta - 2d_{ij}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + d_{jj}\cos^2\theta \tag{7.68}$$

Si θ se elige como

$$\tan 2\theta = \left(\frac{2d_{ij}}{d_{ii} - d_{jj}} \right) \tag{7.69}$$

entonces hace que $\underline{d}_{ij} = \underline{d}_{ji} = 0$. De este modo, cada paso del método de Jacobi reduce un par de elementos fuera de la diagonal a cero. Por desgracia, en el siguiente paso, al mismo tiempo que el método reduce un nuevo par de cero, introduce contribuciones no cero en posiciones que antes eran cero. Sin embargo, las matrices sucesivas de la forma

$$[R_2]^T[R_1]^T[D][R_1][R_2], \qquad [R_3]^T[R_2]^T[R_1]^T[D][R_1][R_2][R_3], \ \ldots$$

convergen a la forma diagonal requerida; la matriz final $[R]$, cuyas columnas da los vectores eigen se escriben entonces como

$$[R] = [R_1][R_2][R_3]\ldots \tag{7.70}$$

Ejemplo 7.6 Solución de valor eigen aplicando el método de Jacobi

Encuentre los valores y vectores eigen de la matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando el método de Jacobi.

Solución: Iniciamos con el término fuera de la diagonal más grande, $d_{23} = 2$, en la matriz $[D]$ y tratamos de reducirla a cero. Desde la ecuación (7.69),

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2d_{23}}{d_{22} - d_{33}} \right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{2-3} \right) = -37.981878^\circ$$

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7882054 & 0.6154122 \\ 0.0 & -0.6154122 & 0.7882054 \end{bmatrix}$$

$$[D'] = [R_1]^T[D][R_1] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1727932 & 1.4036176 \\ 0.1727932 & 0.4384472 & 0.0 \\ 1.4036176 & 0.0 & 4.5615525 \end{bmatrix}$$

Luego tratamos de reducir a cero el término más grande fuera de la diagonal de $[D']$, es decir $d'_{13} = 1.4036176$. La ecuación (7.69) resulta

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2d'_{13}}{d'_{11} - d'_{33}} \right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2.8072352}{1.0 - 4.5615525} \right) = -19.122686^\circ$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} 0.9448193 & 0.0 & 0.3275920 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.3275920 & 0.0 & 0.9448193 \end{bmatrix}$$

$$[D''] = [R_2]^T[D'][R_2] = \begin{bmatrix} 0.5133313 & 0.1632584 & 0.0 \\ 0.1632584 & 0.4384472 & 0.0566057 \\ 0.0 & 0.0566057 & 5.0482211 \end{bmatrix}$$

El elemento más grande fuera de la diagonal en $[D'']$ es $d''_{12} = 0.1632584$, θ_3 se puede obtener desde la ecuación (7.69) como

$$\theta_3 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2d''_{12}}{d''_{11} - d''_{22}}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{0.3265167}{0.5133313 - 0.4384472}\right) = 38.541515°$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} 0.7821569 & -0.6230815 & 0.0 \\ 0.6230815 & 0.7821569 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$[D'''] = [R_3]^T[D''][R_3] = \begin{bmatrix} 0.6433861 & 0.0 & 0.0352699 \\ 0.0 & 0.3083924 & 0.0442745 \\ 0.0352699 & 0.0442745 & 5.0482211 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que todos los términos fuera de la diagonal en $[D''']$ se acercan a cero, podemos detener el proceso en este punto. Los elementos diagonales de $[D''']$ dan los valores eigen (valores de $1/\omega^2$) como 0.6433861, 0.3083924 y 5.0482211. Las columnas de la matriz $[R]$ dan los valores eigen correspondientes, donde

$$[R] = [R_1][R_2][R_3] = \begin{bmatrix} 0.7389969 & -0.5886994 & 0.3275920 \\ 0.3334301 & 0.7421160 & 0.5814533 \\ -0.5854125 & -0.3204631 & 0.7447116 \end{bmatrix}$$

El proceso iterativo se puede combinar para obtener una solución más precisa. Los valores eigen presentes se pueden comparar con los valores exactos: = 0.6431041, 0.3079786 y 5.0489173.

■

7.7 Problema de valor eigen estándar

En el capítulo anterior, el problema de valor eigen se formuló como

$$[k]\vec{X} = \omega^2[m]\vec{X} \tag{7.71}$$

el cual se puede reescribir en la forma de un problema de valor eigen estándar [7.19] como

$$[D]\,\vec{X} = \lambda\vec{X} \tag{7.72}$$

donde

$$[D] = [k]^{-1}[m] \tag{7.73}$$

y

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{7.74}$$

Por lo general, la matriz [D] es no simétrica, aunque las matrices [k] y [m] sí lo son. Como el método de Jacobi (descrito en la sección 7.6) se aplica sólo a matrices simétricas [D], podemos adoptar el siguiente procedimiento [7.18] para derivar un problema de valor eigen estándar con una matriz simétrica [D].

Suponiendo que la matriz [k] es simétrica y positiva definida, podemos utilizar la descomposición de Choleski (vea la sección 7.7.1) y expresar [k] como

$$[k] = [U]^T[U] \tag{7.75}$$

donde [U] es una matriz triangular superior. Utilizando esta relación, el problema de valor eigen de la ecuación (7.71) se puede expresar como

$$\lambda[U]^T[U]\vec{X} = [m]\vec{X} \tag{7.76}$$

Premultiplicando esta ecuación por $([U]^T)^{-1}$, obtenemos

$$\lambda[U]\vec{X} = ([U]^T)^{-1}[m]\vec{X} = ([U]^T)^{-1}[m][U]^{-1}[U]\vec{X} \tag{7.77}$$

Definiendo un nuevo vector $\vec{Y}$ como

$$\vec{Y} = [U]\vec{X} \tag{7.78}$$

La ecuación (7.77) se puede escribir como un problema de valor eigen

$$[D]\vec{Y} = \lambda\vec{Y} \tag{7.79}$$

donde

$$[D] = ([U]^T)^{-1}[m][U]^{-1} \tag{7.80}$$

Por lo tanto, para formular [D] de acuerdo con la ecuación (7.80), primero descomponemos la matriz simétrica [k] como se muestra en la ecuación (7.75), hallamos $[U]^{-1}$ y $([U]^T)^{-1} = ([U]^{-1})^T$ como se describe en la siguiente sección, y luego obtenemos la multiplicación matricial como se indica en la ecuación (7.80). La solución del problema de valor eigen expresada en la ecuación (7.79) produce λ_i y $\vec{Y}^{(i)}$. Luego aplicamos la transformación inversa y encontramos los vectores eigen deseados:

$$\vec{X}^{(i)} = [U]^{-1}\vec{Y}^{(i)} \tag{7.81}$$

7.7.1 Descomposición de Choleski

Cualquier matriz simétrica y positiva definida [A] de orden $n \times n$ se puede descomponer de forma única [7.20]:

$$[A] = [U]^T[U] \tag{7.82}$$

donde [U] es una matriz triangular superior proporcionada por

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.83}$$

con

$$u_{11} = (a_{11})^{1/2}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}\right), \qquad i = 2, 3, \ldots, n \quad \text{y} \qquad j = i + 1, i + 2, \ldots, n$$

$$u_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2\right)^{1/2}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$u_{ij} = 0, \qquad i > j \tag{7.84}$$

Inversa de la matriz [U]. Si la inversa de la matriz triangular superior $[U]$ se indica como $[\alpha_{ij}]$, los elementos α_{ij} se determinan a partir de la siguiente relación

$$[U][U]^{-1} = [I] \tag{7.85}$$

la cual proporciona

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{-1}{u_{ii}}\left(\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik}\alpha_{kj}\right), \qquad i < j$$

$$\alpha_{ij} = 0, \qquad i > j \tag{7.86}$$

Por lo tanto, la inversa de $[U]$ también es una matriz triangular superior.

Ejemplo 7.7 Descomposición de una matriz simétrica

Descomponga la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

en la forma de la ecuación (7.82).

Solución: La ecuación (7.84) proporciona

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2.2360680$$

$$u_{12} = a_{12}/u_{11} = 1/2.236068 = 0.4472136$$

$$u_{13} = a_{13}/u_{11} = 0$$

$$u_{22} = [a_{22} - u_{12}^2]^{1/2} = (3 - 0.4472136^2)^{1/2} = 1.6733201$$

$$u_{33} = [a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2]^{1/2}$$

donde

$$u_{23} = (a_{23} - u_{12}u_{13})/u_{22} = (2 - 0.4472136 \times 0)/1.6733201 = 1.1952286$$

$$u_{33} = (8 - 0^2 - 1.1952286^2)^{1/2} = 2.5634799$$

Puesto que $u_{ij} = 0$ para $i > j$, tenemos

$$[U] = \begin{bmatrix} 2.2360680 & 0.4472136 & 0.0 \\ 0.0 & 1.6733201 & 1.1952286 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5634799 \end{bmatrix}$$

■

7.7.2 Otros métodos de solución

Se han desarrollado otros métodos diversos para encontrar la solución numérica de un problema de valor eigen [7.18,7.21]. Bathe y Wilson [7.22] realizaron un estudio comparativo de algunos de estos métodos. Recientemente se ha puesto énfasis en la solución económica de grandes problemas de valor eigen [7.23, 7.24]. El cálculo de frecuencias naturales por el uso de las secuencias de Sturm se presenta en las referencias [7.25] y [7.26]. En la referencia [7.27] se presenta una forma alternativa de resolver una clase de problemas de vibración mecánica concentrada por medio de métodos topológicos.

7.8 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 7.8 Solución de un problema de valor eigen

Utilizando MATLAB encuentre los valores y vectores eigen de la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
>> A=[3 -1 0; -2 4 -3; 0 -1 1]
A =
     3       -1        0
    -2        4       -3
     0       -1        1
>> [V, D] = eig (A)

V =
   -0.3665      -0.8305      0.2262
    0.9080      -0.4584      0.6616
   -0.2028       0.3165      0.7149
D =
    5.4774            0           0
         0       2.4481           0
         0            0      0.0746
>>
```

■

Ejemplo 7.9 Uso de un programa para resolver con el método de Jacobi un problema de valor eigen

Desarrolle un programa general denominado **Program9.m** para implementar el método de Jacobi y así hallar los valores y vectores eigen de una matriz simétrica. Use el programa para determinar los valores y vectores eigen de la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: El programa **Program9.m** se desarrolla para que acepte los siguientes datos:

n = orden de la matriz

d = matriz dada de orden $n \times n$

eps = especificación de convergencia, una pequeña cantidad en el orden de 10^{-5}

itmax = máximo permitido de iteraciones

El programa proporciona los valores y vectores eigen de la matriz d.

```
>> program9
Solución de valores eigen por el método de Jacobi

Matriz dada
1.00000000e+000      1.00000000e+000      1.00000000e+000
1.00000000e+000      2.00000000e+000      2.00000000e+000
1.00000000e+000      2.00000000e+000      3.00000000e+000

Los valores eigen son
5.04891734e+000      6.43104132e-001      3.07978528e-001

Los vectores eigen son
   Primero              Segundo              Tercero
3.27984948e-001     -7.36976229e-001      5.91009231e-001
5.91009458e-001     -3.27985278e-001     -7.36975900e-001
7.36976047e-001      5.91009048e-001      3.27985688e-001
```

■

Ejemplo 7.10 Programa para una solución de valor eigen aplicando el método de iteración matricial

Desarrolle un programa general de computadora, llamado **Program10.m**, para implementar el método de iteración matricial. Use el programa para hallar los valores y vectores eigen de la matriz [A] que se proporciona en el ejemplo 7.9.

Solución: El programa **Program10.m** se desarrolla para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = orden de la matriz d

d = matriz dada de orden $n \times n$

xs = vector inicial supuesto de orden n

nvec = cantidad de valores y vectores eigen que se debe determinar

xm = matriz de masa de orden $n \times n$

eps = requerimiento de convergencia, una pequeña cantidad en el orden de 10^{-5}

El programa ofrece los siguientes resultados:

freq = matriz de tamaño nvec, que contiene las frecuencias naturales calculadas
eig = matriz de tamaño $n \times$ nvec, que contiene los vectores eigen calculados (columnas)

```
>> program10
Solución de un problema de valor eigen por el
método de iteración matricial

Frecuencias naturales:

    4.450424e-001      1.246983e+000      1.801938e+000

Modos (en forma de columnas):

    1.000000e+000      1.000000e+000      1.000000e+000
    1.801937e+000      4.450328e-001     -1.247007e+000
    2.246979e+000     -8.019327e-001      5.549798e-001
```

■

Ejemplo 7.11 Programa para resolver un problema de valor eigen general

Desarrolle un programa general, llamado **Program11.m**, para resolver un problema de valor eigen general. Use el programa para encontrar la solución del problema de valor eigen general

$$[k]\vec{X} = \omega^2[m]\vec{X}$$

donde

$$[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: **Program11.m** se desarrolla para resolver el problema $[k]\vec{X} = \omega^2[m]\vec{X}$ transformándolo primero en un problema de valor eigen especial $[D]\vec{Y} = \frac{1}{\omega^2}[I]\vec{Y}$, donde $[D]$ es igual a $([U]^T)^{-1}[m][U]^{-1}$ y $[k] = [U]^T[U]$. El programa se desarrolla para que acepte los siguientes datos de entrada:

nd = tamaño del problema (tamaño de las matrices de masa y rigidez)
bk = matriz de rigidez de tamaño $nd \times nd$
bm = matriz de masa de tamaño $nd \times nd$

El programa da la matriz triangular superior de $[bk]$, la inversa de la matriz triangular superior $[ui]$, la matriz $[uti][bm][ui]$ donde $[uti]$ es la transpuesta de $[ui]$ y los valores y vectores eigen del problema.

```
>> program11
Matriz triangular superior [U]:

 1.414214e+000      -7.071068e-001       0.000000e+000
 0.000000e+000       1.224745e+000      -8.164966e-001
 0.000000e+000       0.000000e+000       5.773503e-001

Inversa de la matriz triangular superior

 7.071068e-001       4.082483e-001       5.773503e-001
 0.000000e+000       8.164966e-001       1.154701e+000
 0.000000e+000       0.000000e+000       1.732051e+000
```

```
Matriz [UMU] = [UTI] [M] [UI]:

 5.000000e-001      2.886751e-001      4.082483e-001
 2.886751e-001      8.333333e-001      1.178511e+000
 4.082483e-001      1.178511e+000      4.666667e+000

Vectores eigen:

 5.048917e+000      6.431041e-001      3.079785e-001

Vectores eigen (en forma de columnas):

 7.369762e-001     -5.910090e-001      3.279853e-001
 1.327985e+000     -2.630237e-001     -4.089910e-001
 1.655971e+000      4.739525e-001      1.820181e-001
```

■

Resumen del capítulo

La determinación de frecuencias naturales y modos (vectores eigen) de sistemas de varios grados de libertad es un procedimiento tedioso. Debido a que la frecuencia natural (mínima) fundamental y el modo correspondiente son muy importantes en muchas aplicaciones, presentamos varios métodos de encontrar el valor aproximado de la frecuencia fundamental y el modo. Analizamos la fórmula de Dunkerley, el método de Rayleigh, el método de Holzer y el método de iteración matricial. También dimos una idea general de la extensión del método de iteración matricial para hallar la frecuencia intermedia al igual que la frecuencia natural más alta y los modos. Para encontrar todos los valores y vectores eigen al mismo tiempo, analizamos del método de Jacobi. Como la mayoría de los métodos matemáticos requieren el problema de valor eigen en forma estándar, explicamos un método de convertir un problema de valor eigen general en uno de forma estándar. Por último, presentamos la solución del problema de valor eigen de sistemas de varios grados de libertad utilizando MATLAB.
Ahora que ya terminó este capítulo, deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación.

Referencias

7.1 S. Dunkerley, "On the whirling and vibration of shafts", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1894, Serie A, Vol. 185, Parte I, págs. 279-360.

7.2 B. Atzori, "Dunkerley's formula for finding the lowest frequency of vibration of elastic systems", documento para el editor, *Journal of Sound and Vibration*, 1974, Vol. 36, págs. 563-564.

7.3 H. H. Jeffcott, "The periods of lateral vibration of loaded shafts—The rational derivation of Dunkerley's empirical rule for determining whirling speeds", *Proceedings of the Royal Society of London,* 1919, Serie A, Vol. 95, Núm. A666, págs. 106-115.

7.4 M. Endo y O. Taniguchi, "An extension of the Southwell-Dunkerley methods for synthesizing frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, "Part I: Principles", Vol. 49, 501-516, y "Part II: Applications", Vol. 49, págs. 517-533.

7.5 A. Rutenberg, "A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 45, págs. 249-252.

7.6 G. Temple y W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*, Dover, Nueva York, 1956.

7.7 N. G. Stephen, "Rayleigh's, Dunkerley's, and Southwell's methods", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, enero de 1983, Vol. 11, págs. 45-51.

7.8 A. Rutenberg, "Dunkerley's formula and alternative approximations", documento para el editor, *Journal of Sound and Vibration*, 1975, Vol. 39, págs. 530-531.

7.9 R. Jones, "Approximate expressions for the fundamental frequency of vibration of several dynamic systems", *Journal of Sound and Vibration,* 1976, Vol. 44, págs. 475-478.

7.10 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2a. ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

7.11 H. Holzer, *Die Berechnung der Drehschwingungen,* Julius Springer, Berlín, 1921.

7.12 H. E. Fettis, "A modification of the Holzer method for computing uncoupled torsion and bending modes", *Journal of the Aeronautical Sciences*, octubre de 1949, págs. 625-634; mayo de 1954, págs. 359-360.

7.13 S. H. Crandall y W. G. Strang, "An improvement of the Holzer table based on a suggestion of Rayleigh's", *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pág. 228.

7.14 S. Mahalingam, "An improvement of the Holzer method", *Journal of Applied Mechanics*, 1958, Vol. 25, pág. 618.

7.15 S. Mahalingam, "Iterative procedures for torsional vibration analysis and their relationships", *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 68, págs. 465-467.

7.16 L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, Países Bajos, 1980.

7.17 J. H. Wilkinson y G. Reinsch, *Linear Algebra*, Springer Verlag, Nueva York, 1971.

7.18 J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, Londres, 1965.

7.19 R. S. Martin y J. H. Wilkinson, "Reduction of a symmetric eigenproblem $Ax = \lambda Bx$ and related problems to standard form", *Numerical Mathematics*, 1968, Vol. 11, págs. 99-110.

7.20 G. B. Haggerty, *Elementary Numerical Analysis with Programming,* Allyn and Bacon, Boston, 1972.

7.21 A. Jennings, "Eigenvalue methods for vibration analysis", *Shock and Vibration Digest,* Part I, febrero de 1980, Vol. 12, págs. 3-16; Part II, enero de 1984, Vol. 16, págs. 25-33.

7.22 K. Bathe y E. L. Wilson, "Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, Vol. 6, págs. 213-226.

7.23 E. Cohen y H. McCallion, "Economical methods for finding eigenvalues and eigenvectors", *Journal of Sound and Vibration*, 1967, Vol. 5, págs. 397-406.

7.24 A. J. Fricker, "A method for solving high-order real symmetric eigenvalue problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, Vol. 19, págs. 1131-1138.

7.25 G. Longbottom y K. F. Gill, "The estimation of natural frequencies by use of Sturm sequences", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 1976, Vol. 4, págs. 319-329.

7.26 K. K. Gupta, "Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972, Vol. 4, págs. 379-404.

7.27 W. K. Chen y F. Y. Chen, "Topological analysis of a class of lumped vibrational systems", *Journal of Sound and Vibration,* 1969, Vol. 10, págs. 198-207.

Preguntas de repaso

7.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Mencione algunos métodos para determinar la frecuencia natural fundamental de un sistema de varios grados de libertad.
2. ¿Cuál es la suposición básica hecha al derivar la fórmula de Dunkerley?
3. ¿Qué es el principio de Rayleigh?
4. Mencione si obtenemos un límite inferior o un límite superior a la frecuencia natural fundamental si utilizamos (a) la fórmula de Dunkerley y (b) el método de Rayleigh.
5. ¿Qué es el cociente de Rayleigh?
6. ¿Cuál es el principio básico utilizado en el método de Holzer?
7. ¿Qué es el método de iteración matricial?
8. ¿Podemos utilizar cualquier vector de prueba $\vec{X}_1$ en el método de iteración matricial para hallar la frecuencia natural máxima?
9. Utilizando el método de iteración matricial, ¿cómo encuentra las frecuencias naturales intermedias?

10. ¿Cuál es la diferencia entre el método de iteración matricial y el método de Jacobi?
11. ¿Qué es una matriz de rotación? ¿Cuál es su propósito en el método de Jacobi?
12. ¿Qué es un problema de valor eigen estándar?
13. ¿Cuál es el rol de la descomposición de Choleski al derivar el problema de valor eigen estándar?
14. ¿Cómo encuentra la inversa de una matriz triangular superior?

7.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. La frecuencia fundamental dada por la fórmula de Dunkerley siempre será mayor que el valor exacto.
2. La frecuencia fundamental proporcionada por el método de Rayleigh siempre será mayor que el valor exacto.
3. $[A]\vec{X} = \lambda[B]\vec{X}$ es un problema de valor eigen estándar.
4. $[A]\vec{X} = \lambda[I][B]\vec{X}$ es un problema de valor eigen estándar.
5. El método de Jacobi puede determinar los valores eigen de sólo matrices simétricas.
6. El método de Jacobi utiliza matrices de rotación.
7. El método de iteración matricial requiere que las frecuencias naturales sean distintas y que estén bien separadas.
8. En el método de iteración matricial, cualquier error de cálculo no dará resultados incorrectos.
9. El método de iteración matricial nunca dejará de converger a frecuencias más altas.
10. Cuando el método de Rayleigh se utiliza para una flecha con varios rotores, se puede utilizar la curva de deflexión estática como la forma de modo apropiada.
11. Se puede considerar que el método de Rayleigh es el mismo que el de conservación de energía para un sistema vibratorio.

7.3 Escriba en cada uno de los espacios en blanco la palabra apropiada:

1. Cualquier matriz simétrica positiva definida $[A]$ se puede descomponer como $[A] = [U]^T[U]$, donde $[U]$ es una masa triangular _______.
2. El método de descomponer una matriz simétrica positiva definida $[A]$como $[A] = [U]^T\,[U]$ se conoce como método __________.
3. Cada paso del método de Jacobi reduce un par de elementos fuera de la diagonal a ________.
4. El teorema de ________ permite representar cualquier vector como una combinación lineal de vectores eigen del sistema.
5. Si el método de iteración matricial converge al valor eigen mínimo con $[D]\vec{X} = \lambda\vec{X}$, el método converge al valor eigen _______ con $[D]^{-1}\vec{X} = \mu\vec{X}$.
6. El cociente de Rayleigh proporciona el límite ________ para ω_1^2 y el límite ______ para ω_n^2.
7. El cociente de Rayleigh tiene un valor estacionario cerca de un __________.
8. Para una flecha con masas m_1, m_2, ..., el método de Rayleigh proporciona la frecuencia natural como

$$\omega = \left\{\frac{g(m_1w_1 + m_2w_2 + \cdots)}{m_1w_1^2 + m_2w_2^2 + \cdots}\right\}^{1/2}$$

donde w_1 y w_2, ..., indican las deflexiones ________ de m_1, m_2, ..., respectivamente.

9. El método de Holzer es básicamente un método _________.
10. El método ________ se aplica más extensamente a sistemas torsionales, aunque el método es igualmente aplicable a sistemas lineales.
11. El cálculo de altas frecuencias naturales, basado en el método de iteración matricial, implica un proceso conocido como ________ de matrices.

7.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones dadas:

1. Cuando el vector de prueba

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

se utiliza para solucionar el problema de valor eigen,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{X} = \lambda \vec{X}$$

el siguiente vector de prueba $\vec{X}^{(2)}$, dado por el método de iteración matricial es

a. $\begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$ **b.** $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ **c.** $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$

2. Para un sistema semidefinido, la ecuación final en el método de Holzer indica
a. la amplitud en el extremo como cero
b. la suma de las fuerzas inerciales como cero
c. la ecuación de movimiento

3. La fórmula de Dunkerley está dada por

a. $\omega_1^2 \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n$

b. $\dfrac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n$

c. $\dfrac{1}{\omega_1^2} \approx k_{11}m_1 + k_{22}m_2 + \cdots + k_{nn}m_n$

4. El cociente de Rayleigh está dado por

a. $\dfrac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}}$ **b.** $\dfrac{\vec{X}^T[m]\vec{X}}{\vec{X}^T[k]\vec{X}}$ **c.** $\dfrac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\dot{\vec{X}}^T[m]\dot{\vec{X}}}$

5. El cociente de Rayleigh satisface la siguiente relación:

a. $R(\vec{X}) \leq \omega_1^2$ **b.** $R(\vec{X}) \geq \omega_n^2$ **c.** $R(\vec{X}) \geq \omega_1^2$

6. Para un sistema vibratorio con $[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, la forma de modo más próxima al modo fundamental, según el cociente de Rayleigh, $R(\vec{X}) = \dfrac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}}$ está dada por

a. $\vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ **b.** $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ **c.** $\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

7.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. Fórmula de Dunkerley	**a.** Encuentra las frecuencias y modos naturales del sistema, uno a la vez, por medio de varios valores de prueba de cada frecuencia.
2. Método de Rayleigh	**b.** Encuentra todas las frecuencias naturales utilizando vectores de prueba y el procedimiento de deflación matricial.

3. Método de Holzer

4. Método de iteración matricial

5. Método de Jacobi

c. Encuentra todos los valores y vectores eigen al mismo tiempo sin utilizar vectores de prueba.

d. Encuentra el valor aproximado de la frecuencia fundamental de un sistema compuesto.

e. Encuentra el valor aproximado de la frecuencia fundamental de un sistema que siempre es mayor que el valor verdadero.

Problemas

Sección 7.2 Fórmula de Dunkerley

7.1 Calcule la frecuencia fundamental de la viga que se muestra en la figura 6.9 aplicando la fórmula de Dunkerley para los siguientes datos: (a) $m_1 = m_3 = 5m$, $m_2 = m$ y (b) $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 5m$.

7.2 Encuentre la frecuencia fundamental del sistema torsional que se muestra en la figura 6.11, aplicando la fórmula de Dunkerley para los siguientes datos: (a) $= J_1 = J_2 = J_3 = J_0$; $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$; y (b) $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $J_3 = 3J_0$; $k_{t1} = k_t$, $k_{t2} = 2k_t$, $k_{t3} = 3k_t$.

7.3 Estime la frecuencia fundamental de la flecha que se muestra en la figura 7.3 utilizando la fórmula de Dunkerley para los siguientes datos: $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$.

7.4 La frecuencia natural de vibración a flexión de ala de un avión militar es de 20 Hz. Halle la nueva frecuencia de vibración a flexión del ala cuando un arma, que pesa 2000 lb, se coloca en la punta del ala, como se muestra en la figura 7.10. La rigidez de la punta del ala, en flexión, es de 50000 lb/pie.

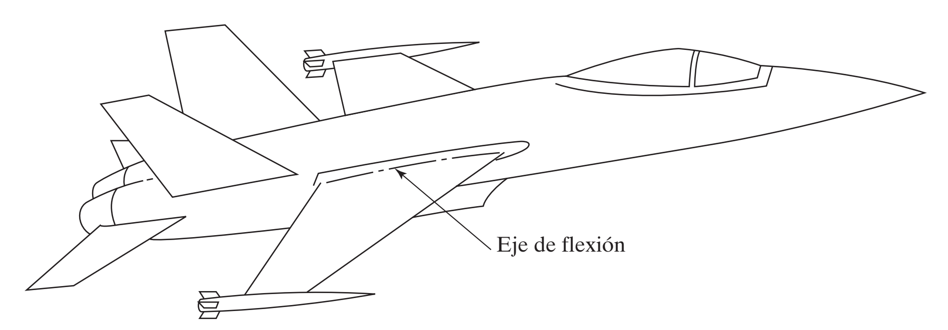


Figura 7.10

7.5 En una grúa elevada (vea la figura 7.11) la carretilla pesa diez veces el peso de la viga. Con la fórmula de Dunkerley, calcule la frecuencia fundamental del sistema.

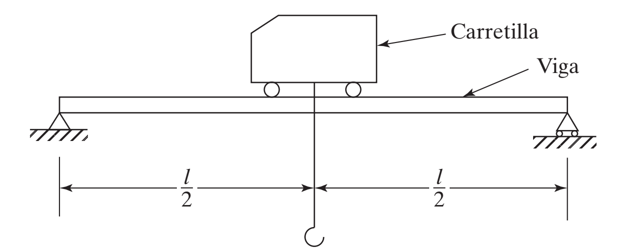


Figura 7.11

7.6 Aplicando la fórmula de Dunkerley, determine la frecuencia natural del sistema que se muestra en la figura 5.33 con $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

7.7* Diseñe una sección tubular de peso mínimo para la flecha que se muestra en la figura 7.3 para lograr una frecuencia fundamental de vibración de 0.5 Hz. Suponga $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 50$ kg, $m_3 = 40$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 3$ m, $l_3 = 4$ m, $l_4 = 2$ m y $E = 2.07 \times 10^{11}$ N/m^2.

7.8 Una viga uniforme simplemente apoyada carga dos masas m_1 y m_2 con $m_2 = 3m_1$ como se muestra en la figura 7.12. Halle la frecuencia natural fundamental de la viga aplicando el método de Dunkerley.

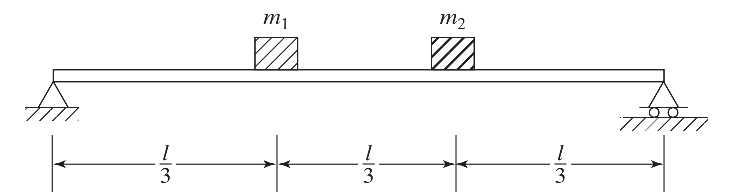


Figura 7.12

7.9 Una viga uniforme doblemente empotrada carga dos masas m_1 y m_2 con $m_2 = m_1$ como se muestra en la figura 7.13. Determine la frecuencia natural de la viga con el método de Dunkerley.

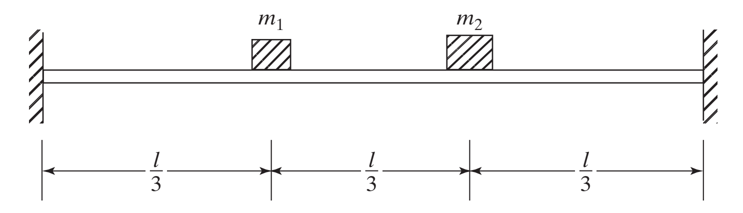


Figura 7.13

Sección 7.3 Método de Rayleigh

7.10 Siguiendo el método de Rayleigh determine la primera frecuencia natural de vibración del sistema que se muestra en la figura 7.2. Suponga $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$ y $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$.

7.11 Aplicando el método de Rayleigh determine la frecuencia natural fundamental de vibración del sistema torsional que se muestra en la figura 6.11. Suponga $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $J_3 = 3J_0$ y $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$.

7.12 Con el método de Rayleigh resuelva el problema 7.6.

7.13 Siguiendo el método de Rayleigh determine la frecuencia natural fundamental del sistema que se muestra en la figura 5.33 cuando $m_1 = m$, $m_2 = 5m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

7.14 Un edificio de dos pisos sometido a cortante se muestra en la figura 7.14 en el cual se supone que los pisos son rígidos. Aplicando el método de Rayleigh, calcule la primera frecuencia natural del edificio para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$ y $k_1 = k_2 = 3EI/h^3$. Suponga que la configuración del primer modo es la misma que la forma de equilibrio estático debido a cargas proporcionales a los pesos de los pisos.

7.15 Compruebe que el cociente de Rayleigh nunca es más alto que el valor eigen más alto.

7.16 La figura 7.15 muestra una viga de acero en voladizo escalonada. Los escalones tienen secciones transversales cuadradas de 4 pulg $\times$ 4 pulg y de 2 pulg $\times$ 2 pulg, cada uno con longitudes de 50 pulg. Suponiendo que el módulo de Young como $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg^2 y el peso unitario como $\gamma = 0.283$ lb$_f$/pulg^3 para el

*El asterisco indica un problema sin respuesta única.

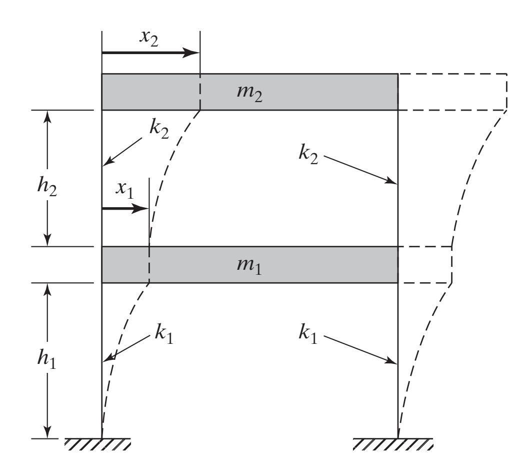


Figura 7.14

material de la viga, determine la frecuencia natural fundamental de vibración a flexión de la viga aplicando el método de Rayleigh. Suponga la deflexión de la viga como

$$y(x) = C\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

donde C es una constante.

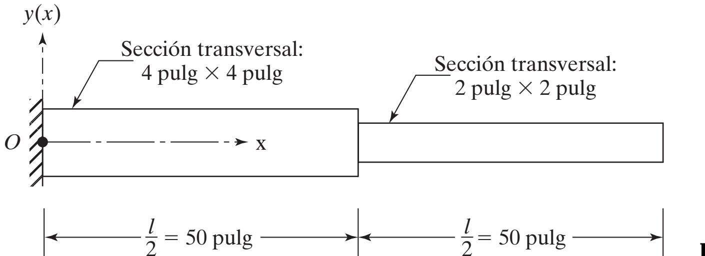


Figura 7.15

7.17 En la figura 7.16 se muestra una viga uniforme simplemente apoyada de 100 pulg de longitud, con una sección rectangular hueca. Suponiendo una forma deflacionada de

$$y(x) = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

encuentre la frecuencia natural de vibración transversal de la viga. El material de la viga tiene un módulo de Young de $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg^2 y un peso unitario de $\gamma = 0.283$ lb$_f$/pulg^3.

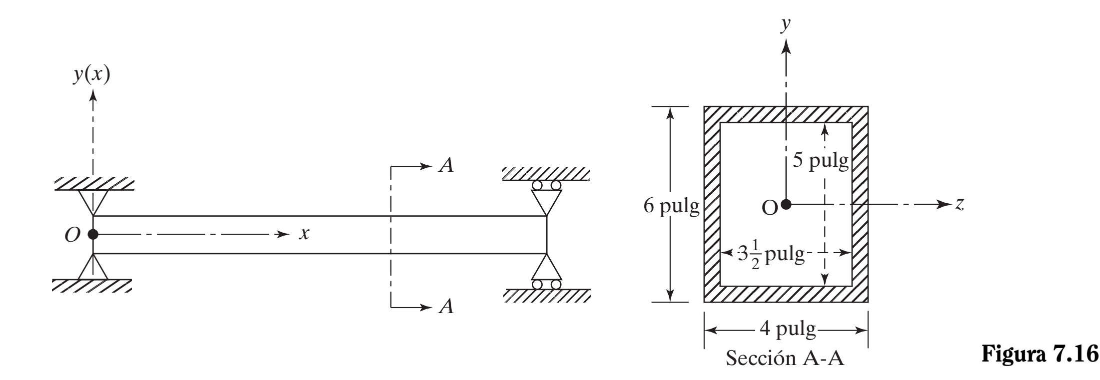


Figura 7.16

7.18 Una viga uniforme doblemente empotrada de longitud l con sección rectangular $w \times h$ se muestra en la figura 7.17. Suponiendo el módulo de Young como E y el peso unitario como γ para el material de la viga y la forma deflacionada como

$$y(x) = C\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Determine la frecuencia natural de la viga.

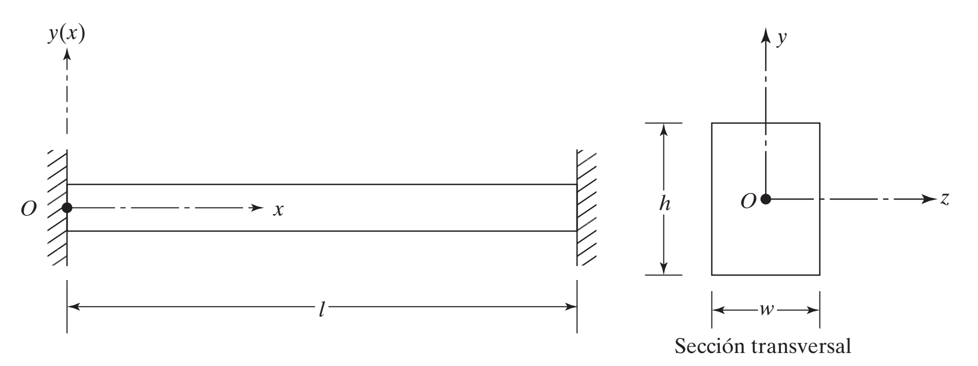


Figura 7.17

Sección 7.4 Método de Holzer

7.19 Utilizando el método de Holzer determine las frecuencias naturales y modos del sistema que se muestra en la figura 6.14, con $m_1 = 100$ kg, $m_2 = 20$ kg, $m_3 = 200$ kg, $k_1 = 8000$ N/m y $k_2 = 4000$ N/m.

7.20 Las matrices de rigidez y masa de un sistema vibratorio están dadas por

$$[k] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad [m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de Holzer determine todos los modos principales y las frecuencias naturales.

7.21 Para el sistema torsional que se muestra en la figura 6.11 determine un modo principal y la frecuencia correspondiente por el método de Holzer. Suponga que $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$ y $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$.

7.22 Siguiendo el método de Holzer determine las frecuencias naturales y modos del edificio sometido a cortante que se muestra en la figura 7.14. Suponga que $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, $k_1 = 2k$, $k_2 = k$ y $k = 3EI/h^3$.

7.23 Con el método de Holzer determine las frecuencias naturales y modos del sistema que se muestra en la figura 6.39. Suponga que $J_1 = 10$ kg-cm^2, $J_2 = 5$ kg-m^2, $J_3 = 1$ kg-m^2, y $k_{t1} = k_{t2} = 1 \times 10^6$ N-m/rad.

7.24 Una flecha uniforme lleva tres rotores como se muestra en la figura 7.18 con momentos de inercia de masa $J_1 = J_2 = 5$ kg-m^2 y $J_3 = 10$ kg-m^2. Las rigideces torsionales de los segmentos entre los rotores están dadas por $k_{t1} = 20000$ N-m/rad y $k_{t2} = 10000$ N-m/rad. Determine las frecuencias naturales y modos del sistema siguiendo el método de Holzer.

7.25 Una flecha uniforme lleva tres rotores como se muestra en la figura 7.18 con momentos de inercia de masa $J_1 = 5$ kg-m^2, $J_2 = 15$ kg-m^2 y $J_3 = 25$ kg-m^2. Las rigideces torsionales de los segmentos entre los

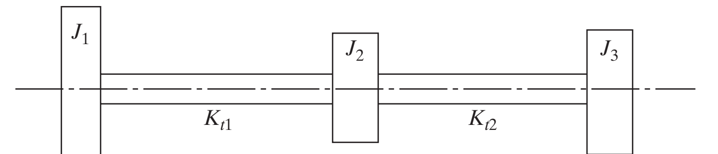


Figura 7.18

rotores son $k_{t1} = 20\,000$ N-m/rad y $k_{t2} = 60\,000$ N-m/rad. Determine las frecuencias naturales y modos del sistema siguiendo el método de Holzer.

7.26 Las matrices de masa y rigidez de un sistema de resorte-masa de tres grados de libertad están dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine las frecuencias naturales y modos del sistema aplicando el método de Holzer.

Sección 7.5 Método de iteración matricial

7.27 El valor eigen máximo de la matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

está dado por $\lambda_1 = 10.38068$. Utilizando el método de iteración matricial determine los demás valores eigen y todos los vectores eigen de la matriz. Suponga $[m] = [I]$.

7.28 Se sabe que las matrices de masa y rigidez de un sistema de resorte-masa son

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de iteración matricial determine las frecuencias naturales y modos del sistema.

7.29 Utilizando el método de iteración matricial encuentre las frecuencias naturales y modos del sistema que se muestra en la figura 6.6 con $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, y $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

7.30 Utilizando el método de iteración matricial encuentre las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 6.28. Suponga que $J_{d1} = J_{d2} = J_{d3} = J_0$, $l_i = l$ y $(GJ)_i = GJ$ para $i = 1$ a 4.

7.31 Utilizando el método de iteración matricial resuelva el problema 7.6.

7.32 Las matrices de rigidez y masa de un sistema vibratorio están dadas por

$$[k] = k \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [m] = m \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de iteración matricial encuentre la frecuencia fundamental y la forma de modo del sistema.

7.33 Las matrices de masa y rigidez de un avión en vuelo, con un modelo de tres grados de libertad para movimiento vertical (semejante a la figura 6.26) están dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [k] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la frecuencia natural más alta de vibración del avión siguiendo el método de iteración matricial.

7.34 Las matrices de masa y flexibilidad de un sistema de tres grados de libertad están dadas por

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [a] = [k]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre la frecuencia natural de vibración más baja del sistema aplicando el método de iteración matricial.

7.35 Para el sistema considerado en el problema 7.34 determine la frecuencia natural más alta de vibración del sistema aplicando el método de iteración matricial.

7.36 Encuentre la frecuencia natural intermedia de vibración del sistema considerado en los problemas 7.34 y 7.35 aplicando el método de iteración matricial.

Sección 7.6 Método de Jacobi

7.37 Utilizando el método de Jacobi encuentre los valores y vectores eigen de la matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

7.38 Utilizando el método de Jacobi encuentre los valores y vectores eigen de la matriz

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.39 Utilizando el método de Jacobi determine los valores eigen de la matriz $[A]$ dados por

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 22 & 13 \\ 4 & 3 & 13 & 46 \end{bmatrix}$$

Sección 7.7 Problema de valor eigen estándar

7.40 Aplicando la técnica de descomposición de Choleski descomponga la matriz dada en el problema 7.39.

7.41 Utilizando la descomposición $[A] = [U]^T[U]$ encuentre la inversa de la matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

7.42 Aplicando la descomposición de Choleski determine la inversa de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

7.43 Convierta el problema 7.32 en un problema de valor eigen estándar con una matriz simétrica.

7.44 Aplicando la técnica de descomposición de Choleski exprese la siguiente matriz como el producto de dos matrices triangulares:

$$[A] = \begin{bmatrix} 16 & -20 & -24 \\ -20 & 89 & -50 \\ -24 & -50 & 280 \end{bmatrix}$$

Sección 7.8 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

7.45 Utilizando MATLAB encuentre los valores y vectores eigen de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.46 Utilizando MATLAB encuentre los valores y vectores eigen de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

7.47 Utilizando `Program9.m` encuentre los valores y vectores eigen de la matriz $[D]$ dada en el problema 7.27.

7.48 Utilizando `Program10.m` determine los valores y vectores eigen de la matriz $[D]$ dada en el problema 7.38.

7.49 Utilizando `Program11.m` encuentre la solución del problema de valor eigen general dado en el problema 7.32 con $k = m = 1$.

7.50 Encuentre los valores y vectores eigen de la siguiente matriz utilizando MATLAB:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

7.51 Resuelva el siguiente problema de valor eigen utilizando MATLAB.

$$\omega^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Proyectos de diseño

7.52 Un volante de masa $m_1 = 100$ kg y una polea de masa $m_2 = 50$ kg se tienen que montar en una flecha de longitud $l = 2$ m, como se muestra en la figura 7.19. Determine sus ubicaciones l_1 y l_2 para maximizar la frecuencia fundamental de vibración del sistema.

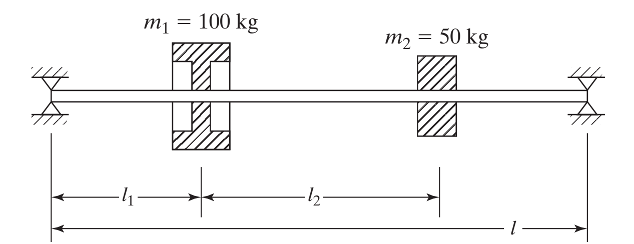


Figura 7.19

7.53 En la figura 7.20 se muestra un diagrama simplificado de una grúa viajera elevada. La viga, con sección transversal, y el cable, con sección transversal circular son de acero. Diseñe las vigas y el cable de modo que las frecuencias naturales del sistema sean mayores que la velocidad de operación, 1 500 rpm, de un motor eléctrico situado en la carretilla.

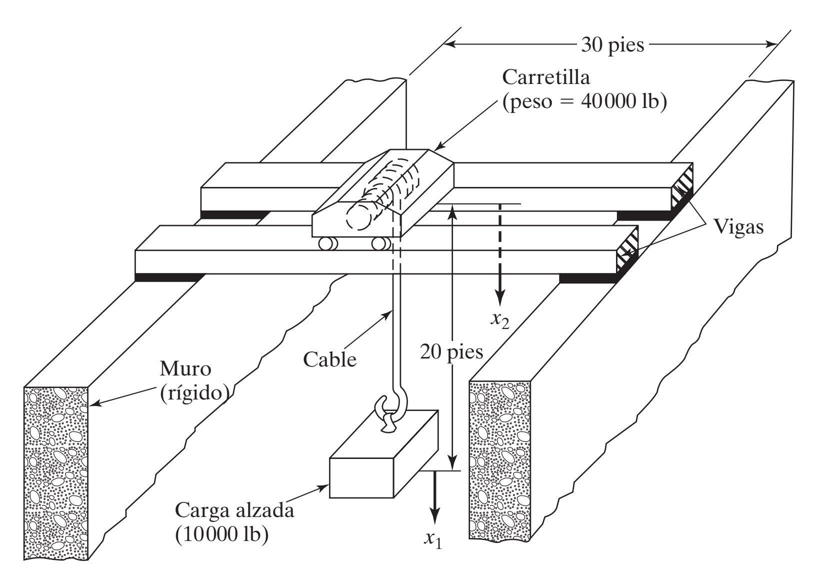


Figura 7.20

CAPÍTULO 8

Control de la vibración

Leonhard Euler
(1707-1783)

Matemático suizo. Fue matemático de la corte y más adelante profesor de matemáticas en San Petersburgo, Rusia. Escribió muchas obras sobre álgebra y geometría y se interesó en la forma geométrica de las curvas de deflexión en la resistencia de materiales. La carga de pandeo de columnas de Euler es muy conocida por los ingenieros mecánicos y civiles, así como la constante de Euler y el sistema de coordenadas de Euler lo son por los matemáticos. Derivó la ecuación de movimiento para las vibraciones provocadas por flexión de una varilla (teoría de Euler-Bernoulli) y presentó una forma de solución en serie e inclusive estudió la dinámica de un anillo vibratorio. (Cortesía de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

Esquema del capítulo

En los capítulos anteriores estudiamos todos los aspectos del modelado y análisis de sistemas vibratorios. Ahora consideraremos métodos de eliminar o reducir la vibración indeseable. Hay que conocer los niveles aceptables de vibración antes de que podamos cuantificar los niveles que se deberán eliminar o reducir. Al principio se describen el nomógrafo de vibración y los criterios de vibración, los cuales indican niveles de vibración aceptables. La vibración que se va a eliminar o a reducir puede aparecer en la forma de una o más formas de perturbación: desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza transmitida. Se analizan los siguientes métodos para eliminar/reducir la vibración en la fuente u origen.

- Balanceo de máquinas rotatorias; balanceo en uno o dos planos.
- Control de la respuesta y estabilidad de flechas rotatorias.
- Balanceo de motores reciprocantes.
- Reducción de la vibración provocada por impactos debidos a holguras en las juntas de máquinas y mecanismos.

Se analizan los siguientes métodos para reducir la transmisión de vibración proveniente de la fuente:

- Cambio de la frecuencia natural del sistema cuando no se puede modificar la frecuencia forzada.
- Introducción de un mecanismo disipador de potencia con la adición de amortiguadores hidráulicos o materiales viscoelásticos.
- Designación de un aislador que cambie la rigidez/amortiguamiento del sistema.
- Aplicación de una técnica de control activa.
- Designación de un absorbedor de vibración con la adición de una masa auxiliar para absorber la energía de vibración de la masa original.

Por último, se presenta la solución de varios problemas de control de vibración utilizando MATLAB con ejemplos numéricos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Utilizar nomógrafos de vibración y criterios de vibración para determinar los niveles de vibración que se van a controlar o reducir.
- Aplicar técnicas de balanceo en uno y dos planos para eliminar la vibración (desbalance).
- Controlar la vibración provocada por el desbalance en flechas rotatorias.
- Reducir el desbalance en motores reciprocantes.
- Diseñar aislamientos de vibración y choque para sistemas con base fija y también con base vibratoria.
- Diseñar sistemas de control de vibración activos.
- Diseñar absorbedores de vibración no amortiguados y amortiguados.
- Utilizar MATLAB para resolver problemas de control de vibración.

8.1 Introducción

En un entorno industrial hay muchas fuentes de vibración: procesos de impacto como el hincado de pilotes y explosiones; maquinaria rotatoria o reciprocante como motores, compresores y motores eléctricos; vehículos de transporte como camiones, trenes, y aviones; el flujo de fluidos y muchas otras cosas. A veces la presencia de vibración provoca desgaste excesivo de cojinetes, formación de grietas, aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas, mantenimiento frecuente y costoso de máquinas, fallas electrónicas por la ruptura de juntas soldadas y abrasión del aislamiento alrededor de conductores eléctricos, lo que provoca cortos. La exposición ocupacional de humanos a la vibración produce dolor, incomodidad y eficiencia reducida. En ocasiones se puede eliminar la vibración con base en el análisis teórico. Sin embargo, los costos de manufactura implicados en la eliminación de la vibración pueden ser demasiado elevados; un diseñador debe comprometerse entre una cantidad de vibración aceptable y un costo de manufactura razonable. En algunos casos, la fuerza de excitación o de sacudimiento es inherente a la máquina. Como antes se vio, incluso una fuerza de excitación relativamente pequeña puede provocar una respuesta indeseablemente grande cerca de la resonancia, sobre todo en sistemas levemente amortiguados. En estos casos la magnitud de la respuesta se puede reducir significativamente utilizando aisladores y absorbedores de masa auxiliares [8.1]. En este capítulo consideraremos varias técnicas de control de vibración, es decir, métodos que implican la eliminación o reducción de la vibración.

8.2 Nomógrafo de vibración y criterios de vibración

Los niveles aceptables de vibración se suelen especificar en función de la respuesta de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad sujeto a vibración armónica. Los límites se muestran en una gráfica, llamada *nomógrafo de vibración*, la cual muestra las vibraciones de las amplitudes de desplazamiento, velocidad y aceleración con respecto a la frecuencia de vibración. Para el movimiento armónico

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t \tag{8.1}$$

la velocidad y aceleraciones se proporcionan como

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega X \cos \omega t = 2\pi f X \cos \omega t \tag{8.2}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \operatorname{sen} \omega t = -4\pi^2 f^2 X \operatorname{sen} \omega t \tag{8.3}$$

donde ω es la frecuencia circular (rad/s), f es la frecuencia lineal (Hz) y X es la amplitud de desplazamiento. Las amplitudes de desplazamiento (X), velocidad ($v_{\text{máx}}$) y aceleración ($a_{\text{máx}}$) están relacionadas como

$$v_{\text{máx}} = 2\pi f X \tag{8.4}$$

$$a_{\text{máx}} = -4\pi^2 f^2 X = -2\pi f v_{\text{máx}} \tag{8.5}$$

Tomando los logaritmos de las ecuaciones (8.4) y (8.5), obtenemos las siguientes relaciones lineales:

$$\ln v_{\text{máx}} = \ln(2\pi f) + \ln X \tag{8.6}$$

$$\ln v_{\text{máx}} = -\ln a_{\text{máx}} - \ln(2\pi f) \tag{8.7}$$

Se ve que con un valor constante de la amplitud de desplazamiento (X), la ecuación (8.6) muestra que ln $v_{\text{máx}}$ con ln ($2\pi f$) como una línea recta con pendiente +1. Asimismo, para un valor constante de la amplitud de aceleración ($a_{\text{máx}}$), la ecuación (8.7) indica que el ln $v_{\text{máx}}$ varía con ln ($2\pi f$) como una línea recta con pendiente −1. Estas variaciones se muestran como un nomógrafo en la figura 8.1. Por lo tanto, cada punto en el nomógrafo indica una vibración senoidal (armónica) específica.

Como la vibración impartida a un humano o a una máquina se compone de muchas frecuencias, rara vez de sólo una, los valores de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ se utilizan en la especificación de niveles de vibración.

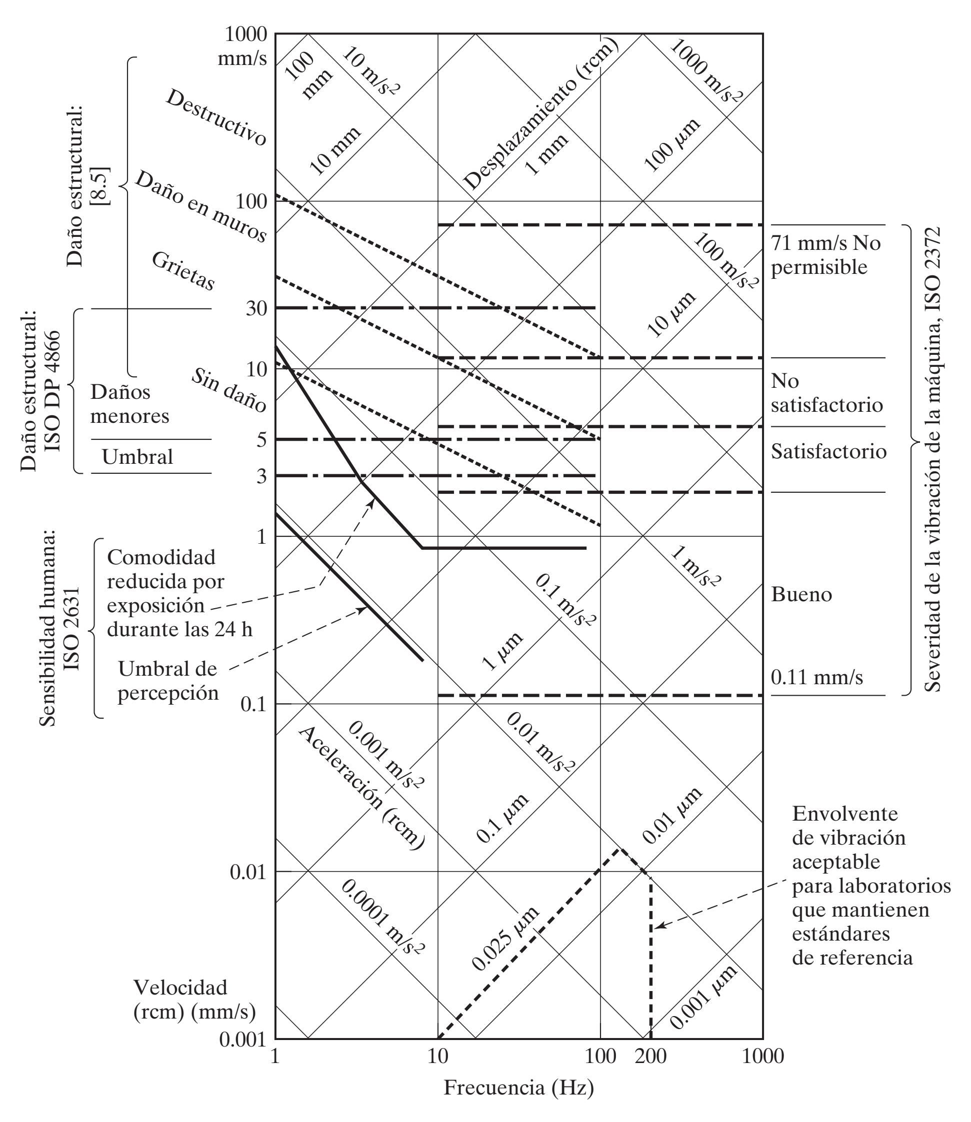


Figura 8.1 Nomógrafo y criterios de vibración [8.2].

A continuación se enuncian los rangos usuales de vibración encontrados en diferentes aplicaciones científicas y de ingeniería [8.2]:

1. Vibraciones atómicas: Frecuencia = 10^{12} Hz, amplitud de desplazamiento = 10^{-8} a 10^{-6} mm.
2. Microsismos o temblores menores de la corteza terrestre: frecuencia = 0.1 a 1 Hz, amplitud del desplazamiento = 10^{-5} a 10^{-3} mm. Esta vibración también indica el umbral de perturbación de equipo óptico, electrónico y de cómputo.
3. Vibración de maquinaria y edificios: frecuencia = 10 a 100 Hz, amplitud de desplazamiento = 0.01 a 1 mm. El umbral de percepción humana cae dentro del rango de frecuencia de 1 a 8 Hz.
4. Oscilación de edificios altos: rango de frecuencia = 0.1 a 5 Hz, amplitud de desplazamiento = 10 a 1 000 mm.

La severidad de vibración de maquinaría se define en función del valor rcm de la velocidad de vibración en ISO 2372 [8.3]. La definición ISO identifica 15 rangos de severidad de vibración en el rango de velocidad de 0.11-71 mm/s para cuatro clases de máquinas: (1) pequeñas, (2) medianas, (3) grandes y (4) turbomáquinas. La severidad de vibración de máquinas clase 3, como los mo-

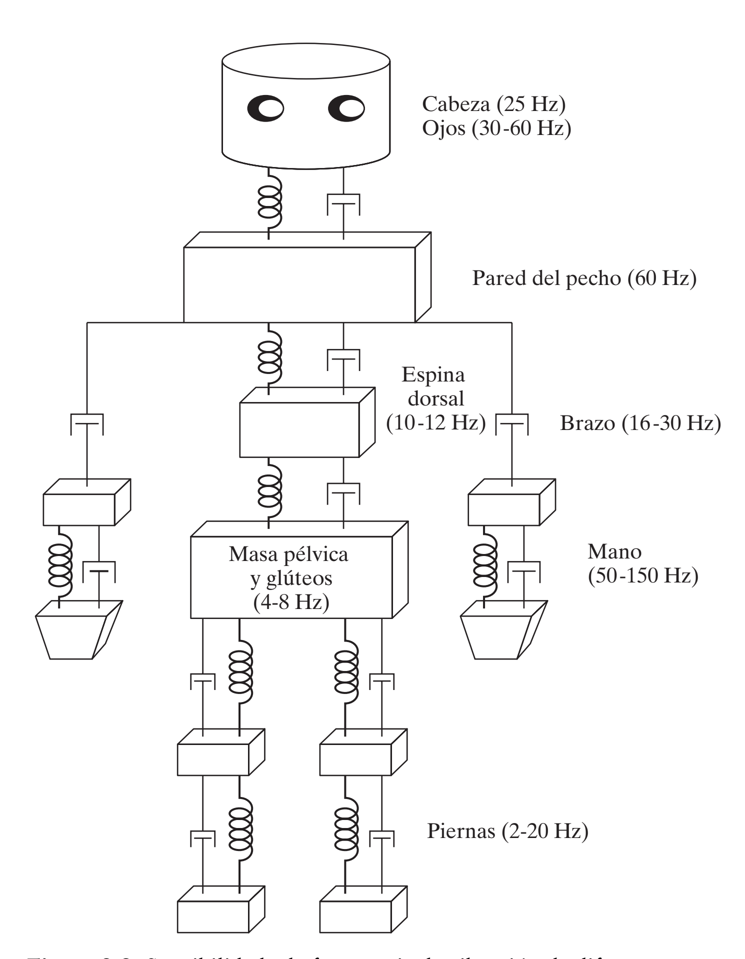


Figura 8.2 Sensibilidad a la frecuencia de vibración de diferentes partes del cuerpo humano.

tores primarios, se muestra en la figura 8.1. Para aplicar estos criterios, la vibración se tiene que medir en las superficies de la máquina como son las tapas de cojinetes en el rango de frecuencia de 10-1 000 Hz.

ISO DP 4866 [8.4] proporciona la severidad de vibración de un edificio completo debido a una explosión o vibración de estado estable en el rango de frecuencia de 1-100 Hz. Para la vibración provocada por una explosión, la velocidad se tiene que medir en los cimientos del edificio cerca de donde ocurrió la explosión, y para la vibración de estado estable, la velocidad pico se tiene que medir en el último piso. Los límites dados son de 3-5 mm/s para el umbral de daños y de 5-30 mm/s para daños menores. En la figura 8.1 también se muestran los resultados de vibración reportados por Steffens [8.5] sobre daños estructurales.

Los límites de vibración recomendados en ISO 2631 [8.6] en la sensibilidad humana a la vibración también se muestran en la figura 8.1. En Estados Unidos, un estimado de 8 millones de trabajadores están expuestos o bien a una vibración de todo el cuerpo, o a una vibración segmentada a partes específicas del cuerpo. La vibración de todo el cuerpo puede deberse a la transmisión a través de una estructura de soporte como el asiento de un helicóptero, y la vibración de partes del cuerpo específicas pueden deberse a procesos de trabajo como operaciones de compactación, taladrado y corte con sierras de cadena. Se ha encontrado que la tolerancia humana a vibración de todo el cuerpo es mínima en el rango de frecuencia de 4-8 Hz. Al tiempo que la vibración segmentada provoca lesiones por esfuerzo ubicado en diferentes partes del cuerpo a diferentes frecuencias, como se indica en la figura 8.2. Además, se han observado los siguientes efectos a diferentes frecuencias [8.7]: mareos (0.1-1 Hz), visión borrosa (2-20 Hz), perturbación del habla (1-20 Hz), interferencia con tareas (0.5-20 Hz) y fatiga posterior (0.2-15 Hz).

Los niveles de vibración aceptables para laboratorios que mantienen estándares de referencia también se muestran en la figura 8.1.

Ejemplo 8.1 Reducción de la vibración del asiento de un helicóptero

El asiento de un helicóptero, junto con el piloto, pesa 1000 N y se ve que experimenta una deflexión estática de 10 mm bajo su propio peso. La vibración del rotor se transmite a la base del asiento como movimiento armónico con 4 Hz de frecuencia y 0.2 mm de amplitud.

a. ¿Cuál es el nivel de vibración percibido por el piloto?
b. ¿Cómo se puede volver a diseñar el asiento para reducir el efecto de vibración?

Solución:

a. Modelando el asiento como un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad, podemos calcular lo siguiente:

$$\text{Masa} = m = 1000/9.81 = 101.9368 \text{ kg}$$

$$\text{Rigidez} = k = \frac{W}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1000}{0.01} = 10^5 \text{ N/m}$$

$$\text{Frecuencia natural} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{101.9368}} = 31.3209 \text{ rad/s} = 4.9849 \text{ Hz}$$

$$\text{Relación de frecuencia} = r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{4.9849}{4.0} = 1.2462$$

Como el asiento se somete a una excitación armónica de la base, la ecuación (3.68) proporciona la amplitud de vibración percibida por el piloto (masa del asiento) con $\zeta = 0$:

$$X = \pm \frac{Y}{1 - r^2} \tag{E.1}$$

donde Y es la amplitud de desplazamiento de la base. La ecuación (E.1) da

$$X = \frac{0.2}{1 - 1.2462^2} = 0.3616 \text{ mm}$$

Las amplitudes de la velocidad y aceleración percibidas por el piloto son $\omega X = 2\pi f X = 2(\pi) = (5)(0.3616) = 9.0887$ mm/s y $\omega^2 X = (2\pi f)^2 X = 228.4074$ mm/s^2 $= 0.2284$ m/s^2. Correspondiente a la frecuencia de 4 Hz, la figura 8.1 muestra que es posible que la amplitud de movimiento de 0.3616 mm no provoque mucha incomodidad. Sin embargo, los niveles de velocidad y aceleración a la misma frecuencia (4 Hz) no son aceptables para un vuelo confortable.

b. Para reducir el nivel de vibración a uno aceptable, tratemos de reducir el nivel de aceleración percibido por el piloto de 0.2284 m/s^2 a 0.01 m/s^2. Utilizando $a_{\text{máx}} = 10$ mm/s^2 $= -(2\pi f)^2 X = -(8\pi)^2 X$, obtenemos $X = 0.01583$ mm. Esto conduce a

$$\frac{X}{Y} = \frac{0.01583}{0.2} = \pm \frac{1}{1 - r^2} \qquad \text{o} \qquad r = 3.6923$$

Este valor presenta la nueva frecuencia natural del asiento como

$$\omega_{\text{n}} = \frac{\omega}{3.6923} = \frac{8\,\pi}{3.6923} = 6.8068 \text{ rad/s}$$

Utilizando la relación $\omega_n = \sqrt{k/m}$ con $m = 101.9368$ kg, la nueva rigidez es $k = 4722.9837$ N/m. Esto implica que la rigidez del asiento se tiene que reducir de 10^5 N/m a 4722.9837 N/m. Esto se puede lograr utilizando un material más blando para el asiento, o utilizando un diseño de resortes diferente. O bien, el nivel de aceleración deseado se puede lograr incrementando la masa del asiento. Sin embargo, esta solución en es muy aceptable, ya que aumenta el peso del helicóptero.

■

8.3 Reducción de la vibración en la fuente

Lo primero que hay que explorar para controlar vibraciones es tratar de modificar la fuente de modo que produzca menos vibración. Este método puede no ser factible siempre. Algunos ejemplos de fuentes de vibración que no pueden ser modificadas son la excitación por sismos, turbulencia atmosférica, irregularidades en la carretera y combustión inestable en motores. Por otra parte, ciertas fuentes como el desbalance en máquinas rotatorias o reciprocantes se pueden modificar para reducir las vibraciones. Esto se puede lograr, por lo general, utilizando tanto un balanceo interno o un incremento en la precisión de los elementos de la máquina. El uso de tolerancias mínimas y un mejor acabado superficial de las partes de la máquina (las cuales tienen movimiento relativo una con respecto a la otra) hacen que la máquina sea menos susceptible a la vibración. Por supuesto, puede haber restricciones económicas y de fabricación en el grado de balanceo que se puede lograr o la precisión con la cual se pueden fabricar las partes de la máquina. Consideraremos el análisis de máquinas rotatorias y reciprocantes cuando hay desbalance e incluso las formas de controlar las vibraciones que resultan de las fuerzas desbalanceadas.

8.4 Balanceo de máquinas rotatorias

La presencia de una masa excéntrica o desbalanceada en un disco rotatorio provoca vibración, la cual puede ser aceptable hasta un cierto nivel. Si la vibración provocada por una masa desbalanceada no es aceptable, se puede eliminar ya sea quitando la masa excéntrica o agregando una masa igual en una posición tal que anule el efecto del desbalance. Para aplicar este procedimiento tenemos que determinar la cantidad y la ubicación de la masa excéntrica experimentalmente. El desbalance en máquinas prácticas se puede atribuir a irregularidades como errores de maquinado y variaciones en los tamaños de pernos, tuercas, remaches y soldaduras. En esta sección consideraremos dos tipos de balanceo: *balanceo en un plano* o *estático* y *balanceo en dos planos* o *dinámico* [8.9, 8.10].

8.4.1 Balanceo en un plano

Considere un elemento de máquina en la forma de un disco circular delgado, digamos un ventilador, volante, engrane o una rueda de amolar, montado en una flecha. Cuando el centro de masa se desplaza del eje de rotación debido a errores de manufactura, se dice que el elemento de máquina está estáticamente desbalanceado. Para determinar si un disco está o no balanceado, monte la flecha sobre dos cojinetes de baja fricción, como se muestra en la figura 8.3(a). Gire el disco y déjelo que se detenga. Marque el punto más bajo con gis en la circunferencia del disco. Repita el proceso varias veces, marcando con gis cada vez el punto más bajo en el disco. Si el disco está balanceado, las marcas de gis aparecerán dispersas al azar por toda la circunferencia. Por otra parte, si el disco no está balanceado, todas las marcas de gis coincidirán.

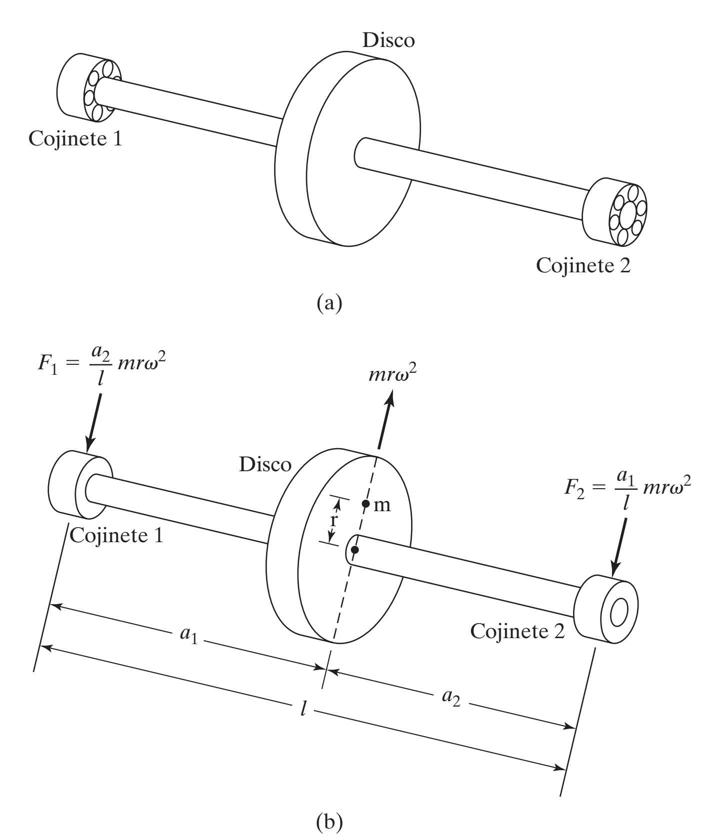


Figura 8.3 Balanceo en un plano de un disco.

El desbalance detectado por este procedimiento se conoce como *desbalance estático*. El desbalance estático se puede corregir quitando (perforando) metal en la marca de gis o agregando un peso a 180° de la marca de gis. Como no se conoce la magnitud del desbalance, la cantidad de material que hay que quitar o agregar debe determinarse mediante prueba y error. Este procedimiento se conoce como "balanceo en un plano", ya que toda la masa queda prácticamente en un solo plano. La cantidad de desbalance se determina girando el disco a una velocidad conocida ω y midiendo las reacciones en los dos cojinetes (vea la figura 8.3(b)). Si se coloca una masa desbalanceada m en un radio r del disco, la fuerza centrífuga será $mr\omega^2$. Por lo tanto, las reacciones medidas en los cojinetes F_1 y F_2 dan m y r:

$$F_1 = \frac{a_2}{l} mr\omega^2, \qquad F_2 = \frac{a_1}{l} mr\omega^2 \tag{8.8}$$

Otro procedimiento para balanceo en un plano, por medio de un analizador de vibración, se ilustra en la figura 8.4. En este caso, se monta una rueda de amolar (disco) en una flecha rotatoria que tiene un cojinete en A y la mueve un motor eléctrico a una velocidad angular ω.

Antes de iniciar el procedimiento se colocan unas *marcas de referencia*, también conocidas como *marcas de fase*, tanto en el rotor (rueda) como en el estator, como se muestra en la figura en la figura 8.5(a). Se coloca un detector de vibración en contacto con el cojinete, como se muestra en la figura 8.4, y el analizador de vibración se ajusta a una frecuencia correspondiente a la velocidad angular de la rueda de amolar. La señal de vibración (la amplitud de desplazamiento) producida por el desbalance se lee en el medidor del analizador de vibración. El analizador de vibración enciende una luz estroboscópica a la frecuencia de la rueda rotatoria. Cuando el rotor gira a una velocidad ω, la marca de fase en el rotor aparece estacionaria bajo la luz estroboscópica pero ubicada a un ángulo θ de la marca en el estator, como se muestra en la figura 8.5(b), debido al retraso de fase en la respuesta. Se anotan tanto el ángulo θ como la amplitud A_u (leídos en el analizador de vibración) provocados por el desbalance original. Luego se detiene el rotor, y se coloca al rotor un peso W de prueba conocido, como se muestra en la figura 8.5(b). Cuando el rotor gira a la velocidad ω, se anota la nueva posición angular de la marca de fase ϕ en el rotor y la amplitud de vibración A_{u+w} provocada por el desbalance combinado del rotor y el peso de prueba (vea la figura 8.5(c)).[1]

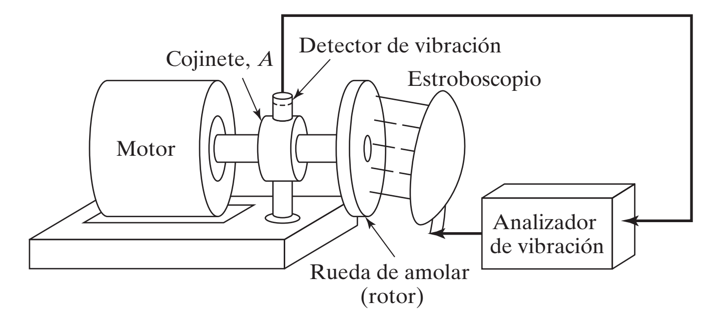


Figura 8.4 Balanceo en un plano por medio de un analizador de vibración.

[1] Observe que el peso de prueba se coloca en una posición que desplace el desbalance neto en la dirección de las manecillas del reloj, la posición estacionaria de la marca de fase se desplazará exactamente en la misma cantidad en la dirección contraria a las manecillas del reloj, y viceversa.

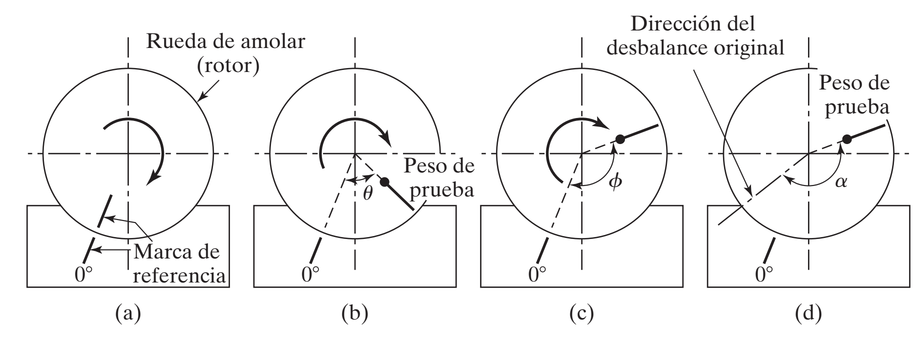


Figura 8.5 Uso de marcas de fase.

Ahora construimos un diagrama vectorial para determinar la magnitud y localización de la masa de corrección para balancear la rueda. El vector de desbalance original $\vec{A}_u$ se traza en una dirección arbitraria, con su longitud igual a A_u, como se muestra en la figura 8.6. Luego se traza el vector de desbalance combinado como $\vec{A}_{u+w}$ a un ángulo $\phi - \theta$ con respecto a la dirección de $\vec{A}_u$ con una longitud de A_{u+w}. El vector de diferencia $\vec{A}_w = \vec{A}_{u+w} - \vec{A}_u$ en la figura 8.6 representa entonces el vector de desbalance debido al peso de prueba W. La magnitud de $\vec{A}_w$ se calcula aplicando la ley de los cosenos:

$$A_w = [A_u^2 + A_{u+w}^2 - 2A_u A_{u+w} \cos(\phi - \theta)]^{1/2} \tag{8.9}$$

Como la magnitud del peso de prueba W y su dirección con respecto al desbalance original (α en la figura 8.6) se conocen, el desbalance original puede estar a un ángulo α de la posición del peso de prueba, como se muestra en la figura 8.5(d). El ángulo α se obtiene a partir de la ley de los cosenos:

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{A_u^2 + A_w^2 - A_{u+w}^2}{2A_u A_w}\right] \tag{8.10}$$

La magnitud del desbalance original es $W_0 = (A_u/A_w) \cdot W$, localizado a la misma distancia radial del eje de rotación del rotor que el peso W. Una vez conocidas la localización y magnitud del desbalance original, se puede agregar un peso de corrección para balancear adecuadamente la rueda.

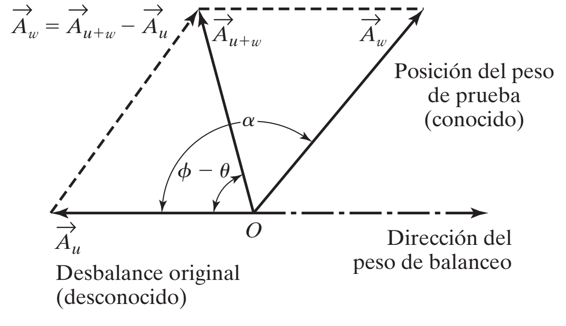


Figura 8.6 Desbalance debido al peso de prueba W.

8.4.2 Balanceo en dos planos

El balanceo en un plano se puede utilizar para balancear en un plano, es decir, para rotores del tipo de disco rígido. Si el rotor es un cuerpo rígido alargado, como se muestra en la figura 8.7, el desbalance puede estar en cualquier parte a lo largo de la extensión del rotor. En este caso el rotor se puede balancear agregando pesos de balanceo en dos planos cualesquiera [8.10, 8.11]. Para facilitar la operación se suele elegir los dos planos extremos del rotor (mostrados por medio de líneas de rayas en la figura 8.7).

Para ver que cualquier masa desbalanceada en el rotor puede ser reemplazada por dos masas desbalanceadas equivalentes (dos planos cualesquiera) considere un rotor con una masa desbalanceada m a una distancia $l/3$ del extremo derecho, como se muestra en la figura 8.8(a). Cuando el rotor gira a una velocidad de ω, la fuerza provocada por el desbalance será $F = m\omega^2 R$, donde R es el radio del rotor. La masa desbalanceada m puede ser reemplazada por dos masas m_1 y m_2, localizadas en los extremos del rotor, como se muestra en la figura 8.8(b). Las fuerzas ejercidas en el rotor por estas masas son $F_1 = m_1\omega^2 R$ y $F_2 = m_2\omega^2 R$. Para la equivalencia de fuerza en las figuras 8.8(a) y (b), tenemos

$$m\omega^2 R = m_1\omega^2 R + m_2\omega^2 R \qquad \text{o} \qquad m = m_1 + m_2 \tag{8.11}$$

Para la equivalencia de momentos en los dos casos, consideramos los momentos con respecto al extremo derecho, de modo que

$$m\omega^2 R\frac{l}{3} = m_1\omega^2 Rl \qquad \text{o} \qquad m = 3m_1 \tag{8.12}$$

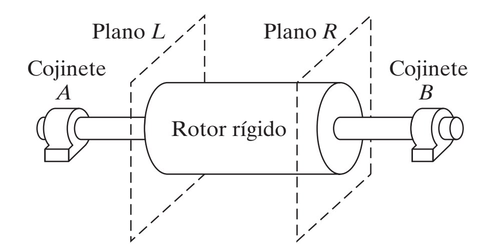


Figura 8.7 Balanceo en dos planos de un rotor.

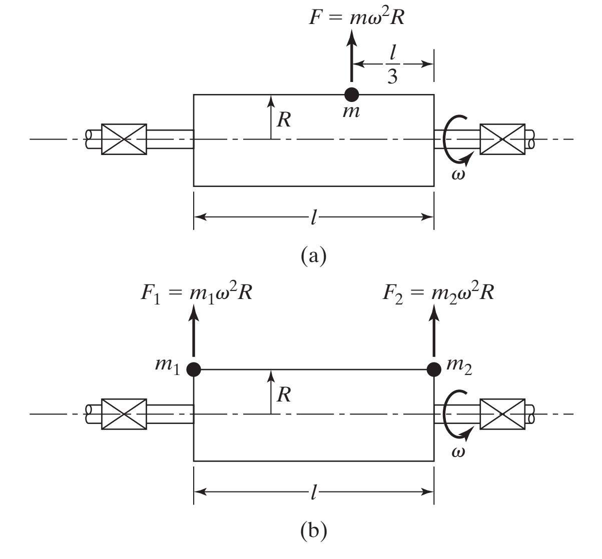


Figura 8.8 Representación de una masa desbalanceada como dos masas desbalanceadas equivalentes.

Las ecuaciones (8.11) y (8.12) resultan $m_1 = m/3$ y $m_2 = 2m/3$. Por lo tanto, cualquier masa desbalanceada puede ser reemplazada por dos masas desbalanceadas equivalentes en los planos extremos del rotor.

Ahora consideramos el procedimiento de balanceo en dos planos por medio de un analizador de vibración. En la figura 8.9, el desbalance total en el rotor es reemplazado por dos pesos desbalanceados U_L y U_R en los planos izquierdo y derecho, respectivamente. A la velocidad de operación ω del rotor, la fase y amplitud de vibración debido al desbalance original se miden en los dos cojinetes A y B, y los resultados se registran como los vectores $\vec{V}_A$ y $\vec{V}_B$. La magnitud del vector de vibración se considera como la amplitud de vibración, mientras que la dirección del vector se considera como el valor negativo del ángulo observado bajo la luz estroboscópica respecto de la línea de referencia del estator. Los vectores medidos $\vec{V}_A$ y $\vec{V}_B$ se expresan como

$$\vec{V}_A = \vec{A}_{AL}\vec{U}_L + \vec{A}_{AR}\vec{U}_R \tag{8.13}$$

$$\vec{V}_B = \vec{A}_{BL}\vec{U}_L + \vec{A}_{BR}\vec{U}_R \tag{8.14}$$

donde $\vec{A}_{ij}$ se considera como un vector que refleja el efecto del desbalance en el plano j ($j = L, R$) en la vibración en el cojinete i ($i = A, B$). Observe que $\vec{U}_L$, $\vec{U}_R$ y todos los vectores $\vec{A}_{ij}$ son desconocidos en las ecuaciones (8.13) y (8.14).

Como en el caso de balanceo en un plano, agregamos pesos de prueba conocidos y tomamos medidas para obtener información sobre las masas desbalanceadas. Primero agregamos un peso conocido $\vec{W}_L$ en el plano izquierdo a una posición angular conocida y medimos el desplazamiento y fase de vibración en los dos cojinetes, mientras el rotor gira a una velocidad ω. Indicamos estas vibraciones medidas como vectores que

$$\vec{V}_A' = \vec{A}_{AL}(\vec{U}_L + \vec{W}_L) + \vec{A}_{AR}\vec{U}_R \tag{8.15}$$

$$\vec{V}_B' = \vec{A}_{BL}(\vec{U}_L + \vec{W}_L) + \vec{A}_{BR}\vec{U}_R \tag{8.16}$$

Restando las ecuaciones (8.13) y (8.14) de las ecuaciones (8.15) y (8.16), respectivamente, y resolviendo, obtenemos[2]

$$\vec{A}_{AL} = \frac{\vec{V}_A' - \vec{V}_A}{\vec{W}_L} \tag{8.17}$$

$$\vec{A}_{BL} = \frac{\vec{V}_B' - \vec{V}_B}{\vec{W}_L} \tag{8.18}$$

---

[2] Se ve que la resta, división y multiplicación complejas a menudo se utilizan en el cálculo de pesos de balanceo. Si

$$\vec{A} = a\underline{/\theta_A} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = b\underline{/\theta_B}$$

podemos volver a escribir $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como $\vec{A} = a_1 + ia_2$ y $\vec{B} = b_1 + ib_2$, donde $a_1 = a \cos \theta_A$ y $a_2 = a \operatorname{sen} \theta_A$, $b_1 = b \cos \theta_B$ y $b_2 = b \operatorname{sen} \theta_B$. Entonces las fórmulas para resta, división y multiplicación complejas son [8.12]:

$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)$$

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{(b_1^2 + b_2^2)}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1b_1 - a_2b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$$

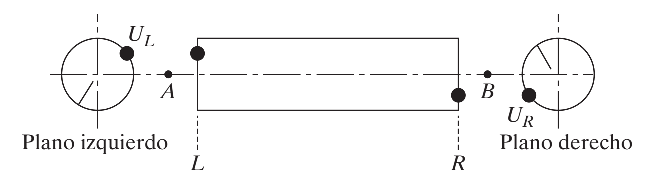


Figura 8.9 Balanceo en dos planos.

Luego eliminamos $\vec{W}_L$ y agregamos un peso conocido $\vec{W}_R$ en el plano derecho en una posición angular conocida y medimos las vibraciones resultantes mientras el rotor gira a una velocidad ω. Las vibraciones medidas se pueden indicar como vectores:

$$\vec{V}_A'' = \vec{A}_{AR}(\vec{U}_R + \vec{W}_R) + \vec{A}_{AL}\vec{U}_L \tag{8.19}$$

$$\vec{V}_B'' = \vec{A}_{BR}(\vec{U}_R + \vec{W}_R) + \vec{A}_{BL}\vec{U}_L \tag{8.20}$$

Como antes, restamos las ecuaciones (8.13) y (8.14) de las ecuaciones (8.19) y (8.20), respectivamente, para encontrar

$$\vec{A}_{AR} = \frac{\vec{V}_A'' - \vec{V}_A}{\vec{W}_R} \tag{8.21}$$

$$\vec{A}_{BR} = \frac{\vec{V}_B'' - \vec{V}_B}{\vec{W}_R} \tag{8.22}$$

Una vez que se conocen los vectores $\vec{A}_{ij}$ se resuelven las ecuaciones (8.13) y (8.14) para hallar los vectores de desbalance $\vec{U}_L$ y $\vec{U}_R$:

$$\vec{U}_L = \frac{\vec{A}_{BR}\vec{V}_A - \vec{A}_{AR}\vec{V}_B}{\vec{A}_{BR}\vec{A}_{AL} - \vec{A}_{AR}\vec{A}_{BL}} \tag{8.23}$$

$$\vec{U}_R = \frac{\vec{A}_{BL}\vec{V}_A - \vec{A}_{AL}\vec{V}_B}{\vec{A}_{BL}\vec{A}_{AR} - \vec{A}_{AL}\vec{A}_{BR}} \tag{8.24}$$

Ahora se puede balancear el rotor agregando pesos de balanceo iguales y opuestos en cada plano. Los pesos de balanceo en los planos izquierdo y derecho se indican vectorialmente como $\vec{B}_L = -\vec{U}_L$ y $\vec{B}_R = -\vec{U}_R$. Se ve que el procedimiento de balanceo en dos planos es una extensión directa del procedimiento de balanceo en un plano. Aunque los rotores de alta velocidad se balancean durante su fabricación, en general se hace necesario volverlos a balancear en el campo debido a desbalances leves presentados por cedencia, operación a alta temperatura, etc. La figura 8.10 muestra un ejemplo práctico de balanceo en dos planos.

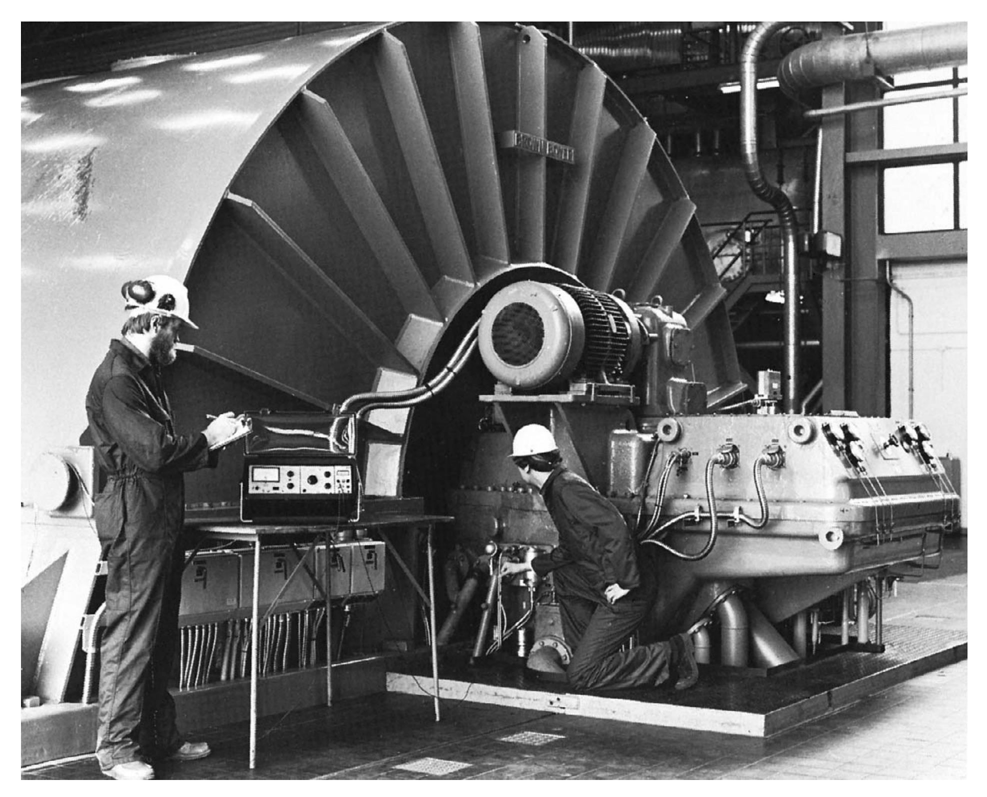


Figura 8.10 Balanceo en dos planos. (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

Ejemplo 8.2 Balanceo en dos planos de un rotor de turbina

En el balanceo en dos planos de un rotor de turbina, a continuación se muestran los datos obtenidos con la medición del desbalance original, el peso de prueba en el plano derecho y el peso de prueba en el plano izquierdo. Las amplitudes de desplazamiento se expresan en mils (1/1 000 pulg). Determine el tamaño y la ubicación de los pesos requeridos.

	Amplitud de vibración (desplazamiento)		Ángulo de fase	
Condición	**En el cojinete *A***	**En el cojinete *B***	**En el cojinete *A***	**En el cojinete *B***
Desbalance original	8.5	6.5	60°	205°
W_L = 10.0 oz agregadas a 270º de la marca de referencia	6.0	4.5	125°	230°
W_R = 12.0 oz agregadas a 180º de la marca de referencia	6.0	10.5	35°	160°

Solución: Los datos se expresan en notación vectorial como

$$\vec{V}_A = 8.5\angle 60^\circ = 4.2500 + i7.3612$$
$$\vec{V}_B = 6.5\angle 205^\circ = -5.8910 - i2.7470$$
$$\vec{V}_A' = 6.0\angle 125^\circ = -3.4415 + i4.9149$$
$$\vec{V}_B' = 4.5\angle 230^\circ = -2.8926 - i3.4472$$
$$\vec{V}_A'' = 6.0\angle 35^\circ = 4.9149 + i3.4472$$
$$\vec{V}_B'' = 10.5\angle 160^\circ = -9.8668 + i3.5912$$
$$\vec{W}_L = 10.0\angle 270^\circ = 0.0000 - i10.0000$$
$$\vec{W}_R = 12.0\angle 180^\circ = -12.0000 + i0.0000$$

Las ecuaciones (8.17) y (8.18) proporcionan

$$\vec{A}_{AL} = \frac{\vec{V}_A' - \vec{V}_A}{\vec{W}_L} = \frac{-7.6915 - i2.4463}{0.0000 - i10.0000} = 0.2446 - i0.7691$$
$$\vec{A}_{BL} = \frac{\vec{V}_B' - \vec{V}_B}{\vec{W}_L} = \frac{2.9985 - i0.7002}{0.0000 - i10.0000} = 0.0700 + i0.2998$$

El uso de las ecuaciones (8.21) y (8.22) conduce a

$$\vec{A}_{AR} = \frac{\vec{V}_A'' - \vec{V}_A}{\vec{W}_R} = \frac{0.6649 - i3.9198}{-12.0000 + i0.0000} = -0.0554 + i0.3266$$
$$\vec{A}_{BR} = \frac{\vec{V}_B'' - \vec{V}_B}{\vec{W}_R} = \frac{-3.9758 + i6.3382}{-12.0000 + i0.0000} = 0.3313 - i0.5282$$

Los pesos de desbalance se determinan por las ecuaciones (8.23) y (8.24):

$$\vec{U}_L = \frac{(5.2962 + i0.1941) - (1.2237 - i1.7721)}{(-0.3252 - i0.3840) - (-0.1018 + i0.0063)} = \frac{(4.0725 + i1.9661)}{(-0.2234 - i0.3903)}$$
$$= -8.2930 + i5.6879$$
$$\vec{U}_R = \frac{(-1.9096 + i1.7898) - (3.5540 + i3.8590)}{(-0.1018 + i0.0063) - (-0.3252 - i0.3840)} = \frac{(1.6443 - i2.0693)}{(0.2234 + i0.3903)}$$
$$= -2.1773 - i5.4592$$

Por lo tanto, los pesos de balance requeridos están dados por

$$\vec{B}_L = -\vec{U}_L = (8.2930 - i5.6879) = 10.0561\angle 145.5548^\circ$$
$$\vec{B}_R = -\vec{U}_R = (2.1773 + i5.4592) = 5.8774\angle 248.2559^\circ$$

Esto muestra que la adición de un peso de 10.0561 oz en el plano izquierdo a 145.5548° y un peso de 5.8774 oz en el plano derecho a 248.2559° de la posición de referencia balanceará el rotor de la turbina. Se infiere que los pesos de balanceo se colocan a la misma distancia radial que los pesos de prueba. Si un peso de balanceo

se tuviera que colocar en una posición radial diferente, el peso de balanceo requerido tendría que modificarse en proporción inversa a la distancia radial del eje de rotación.

■

8.5 Remolineo de flechas rotatorias

En la sección anterior se supuso que el sistema de rotor: la flecha y el cuerpo rotatorio, eran rígidos. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas, como turbinas, compresores, motores eléctricos y bombas, se monta un rotor pesado sobre una flecha flexible ligera que está apoyada en rodamientos. Habrá desbalance en todos los rotores debido a errores de fabricación. Estos desbalances así como otros efectos, como la rigidez y amortiguamiento de la flecha, efectos giroscópicos y fricción de fluido en rodamientos, harán que la flecha se flexione de una manera complicada a ciertas velocidades de rotación, conocidas como velocidades de remolineo, latigueo o críticas. El remolineo se define como la rotación del plano formado por la línea de centros de los rodamientos y la flecha flexionada. En esta sección estudiamos los aspectos de modelado del sistema de rotor, las velocidades críticas, la respuesta del sistema, y la estabilidad [8.13-8.14].

8.5.1 Ecuaciones de movimiento

Considere una flecha apoyada por dos rodamientos y con un rotor o disco de masa m a la mitad, como se muestra en la figura 8.11. Supondremos que el rotor está sometido a una excitación de estado estable causada por un desbalance de masa. Las fuerzas que actúan en el rotor son la fuerza de inercia debido a la aceleración del centro de masa, la fuerza de resorte debido a la elasticidad de la flecha, y las fuerzas de amortiguamiento externas e internas.[3]

Sea O la posición de equilibrio de la flecha cuando está perfectamente balanceada, como se muestra en la figura 8.12. Se supone que la flecha (línea CG) gira a una velocidad angular constante ω. Durante la rotación, el rotor se flexiona radialmente a una distancia $A = OC$ (en estado estable). Se supone que el rotor (disco) tiene una excentricidad a de modo que su centro de masa (centro de gravedad) G está a una distancia a del centro geométrico, C. Utilizamos un sistema de coordenadas

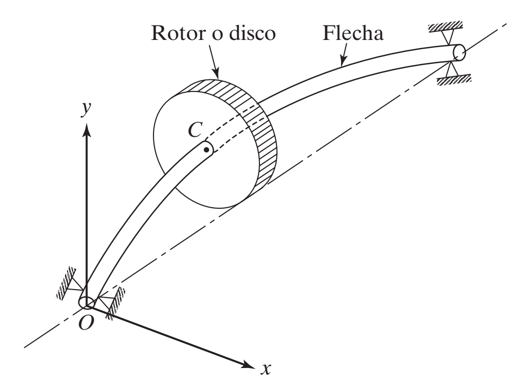


Figura 8.11 Flecha con un rotor.

[3] Cualquier sistema rotatorio responde en dos formas diferentes a las fuerzas de amortiguamiento o fricción, dependiendo de si las fuerzas giran con la flecha o no. Cuando las posiciones en que actúan las fuerzas permanecen fijas en el espacio, con en el caso de fuerzas de amortiguamiento (las cuales provocan pérdidas de energía) en la estructura de soporte, el amortiguamiento se conoce como *amortiguamiento estacionario* o *externo*. Por otra parte, si las posiciones en que actúan giran con la flecha en el espacio, como en el caso de fricción interna del material de la flecha, el amortiguamiento se conoce como *amortiguamiento rotatorio* o *interno*.

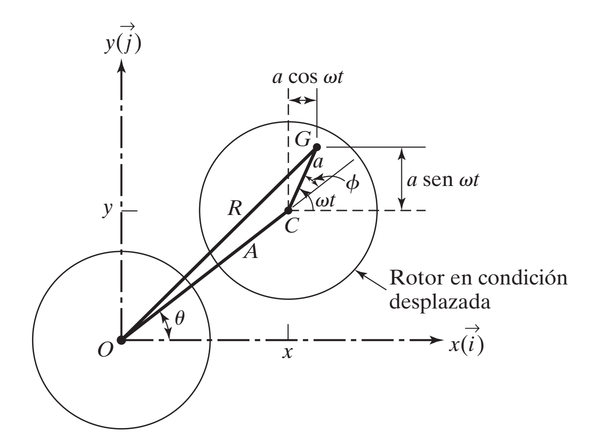


Figura 8.12 Rotor con excentricidad.

fijo (x y y fijo a la tierra) con O como el origen para describir el movimiento del sistema. La velocidad angular de la línea OC, $\dot{\theta} = d\theta/dt$, se conoce como velocidad de remolineo y no suele ser igual a ω. Las ecuaciones de movimiento del rotor (masa m) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\text{Fuerza de inercia}\,(\vec{F}_i) = {} & \text{Fuerza elástica}\,(\vec{F}_e) \\ & + \text{Fuerza de amortiguamiento interno}\;(\vec{F}_{di}) \\ & + \text{Fuerza de amortiguamiento externo}\;(\vec{F}_{de})\end{aligned} \tag{8.25}$$

Las diversas fuerzas en la ecuación (8.25) se pueden expresar como sigue:

$$\text{Fuerza de inercia: } \vec{F}_i = m\ddot{\vec{R}} \tag{8.26}$$

donde $\vec{R}$ indica el vector radio del centro de masa G dado por

$$\vec{R} = (x + a\cos\omega t)\vec{i} + (y + a\,\text{sen}\,\omega t)\vec{j} \tag{8.27}$$

donde x y y representan las coordenadas del centro geométrico C e $\vec{i}$ y $\vec{j}$ indican los vectores unitarios a lo largo de las coordenadas x y y, respectivamente. Las ecuaciones (8.26) y (8.27) conducen a

$$\vec{F}_i = m[(\ddot{x} - a\omega^2\cos\omega t)\vec{i} + (\ddot{y} - a\omega^2\,\text{sen}\,\omega t)\vec{j}] \tag{8.28}$$

$$\text{Fuerza elástica: } \vec{F}_e = -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \tag{8.29}$$

donde k es la rigidez de la flecha.

$$\text{Fuerza de amortiguamiento interno: } \vec{F}_{di} = -c_i\,[(\dot{x} + \omega y)\vec{i} + (\dot{y} + \omega x)\vec{j}] \tag{8.30}$$

donde c_i es el coeficiente de amortiguamiento interno o rotatorio:

$$\text{Fuerza de amortiguamiento externo: } \vec{F}_{de} = -c(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) \tag{8.31}$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento externo. Sustituyendo las ecuaciones (8.28) a (8.31) en la ecuación (8.25), obtenemos las ecuaciones de movimiento en forma escalar:

$$m\ddot{x} + (c_i + c)\dot{x} + kx - c_i\omega y = m\omega^2 a \cos \omega t \tag{8.32}$$

$$m\ddot{y} + (c_i + c)\dot{y} + ky - c_i\omega x = m\omega^2 a \operatorname{sen} \omega t \tag{8.33}$$

Estas ecuaciones de movimiento, las cuales describen la vibración lateral del rotor, están acopladas y dependen de la velocidad de rotación de estado estable ω, de la flecha. Definiendo una cantidad compleja w como

$$w = x + iy \tag{8.34}$$

donde $i = (-1)^{1/2}$ y sumando la ecuación (8.32) a la ecuación (8.33) multiplicada por i, obtenemos una única ecuación de movimiento:

$$m\ddot{w} + (c_i + c)\dot{w} + kw - i\omega c_i w = m\omega^2 a e^{i\omega t} \tag{8.35}$$

8.5.2 Velocidades críticas

Se dice que una velocidad crítica existe cuando la frecuencia de rotación de una flecha es igual a una de sus frecuencias naturales. La frecuencia natural no amortiguada del sistema de rotor se obtiene resolviendo las ecuaciones (8.32), (8.33) u (8.35), reteniendo sólo la parte homogénea con $c_i = c = 0$. Esto da la frecuencia natural del sistema (o velocidad crítica del sistema no amortiguado):

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \tag{8.36}$$

Cuando la velocidad de rotación es igual a esta velocidad crítica, el rotor experimenta grandes deflexiones y la fuerza transmitida a los rodamientos puede provocar fallas en éstos. Se espera que una rápida transición de la flecha rotatoria de una velocidad crítica limite las amplitudes de remolineo, mientras que una transición lenta por la velocidad crítica promueva el desarrollo de grandes amplitudes. La referencia [8.15] investiga el comportamiento del rotor durante la aceleración y desaceleración a través de velocidades críticas. En la referencia [8.16] se presenta un programa de computadora FORTRAN para calcular las velocidades críticas de flechas rotatorias.

8.5.3 Respuesta del sistema

Para determinar la respuesta del rotor, suponemos que la excitación es una fuerza armónica producida por el desbalance del rotor. Además, suponemos que el amortiguamiento interno es insignificante ($c_i = 0$). Entonces, podemos resolver las ecuaciones (8.32) y (8.33) (o de manera equivalente, la ecuación (8.35)) y determinar las amplitudes de remolineo dinámico del rotor originadas por el desbalance de la masa. Con $c_i = 0$, la ecuación (8.35) se reduce a

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = m\omega^2 a e^{i\omega t} \tag{8.37}$$

La solución de la ecuación (8.37) se puede expresar como

$$w(t) = Ce^{-(\alpha t + \beta)} + Ae^{i(\omega t - \phi)} \tag{8.38}$$

donde C, β, A y ϕ son constantes. Observe que el primer término en el lado derecho de la ecuación (8.38) contiene un término exponencial decadente que representa una solución transitoria y el segundo término denota un movimiento circular de estado estable (remolineo). Sustituyendo la parte de estado estable de la ecuación (8.38) en la ecuación (8.37), podemos determinar la amplitud del movimiento circular (remolineo) como

$$A = \frac{m\omega^2 a}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} = \frac{ar^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{8.39}$$

y el ángulo de fase como

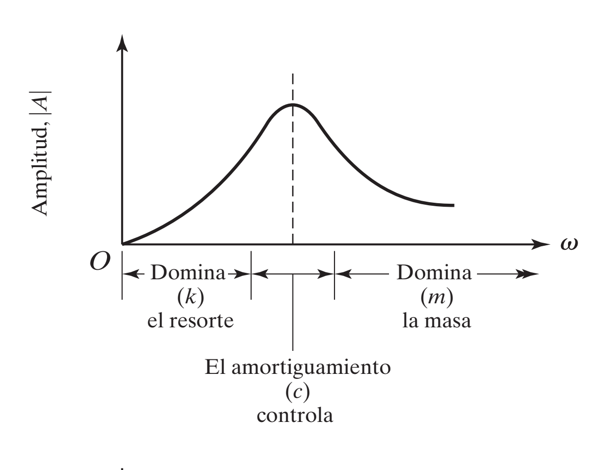
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{8.40}$$

donde

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \text{y} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Diferenciando la ecuación (8.39) con respecto a ω e igualando el resultado a cero, podemos hallar la velocidad de rotación ω a la cual la amplitud de remolineo se hace máxima:

$$\omega \approx \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \tag{8.41}$$



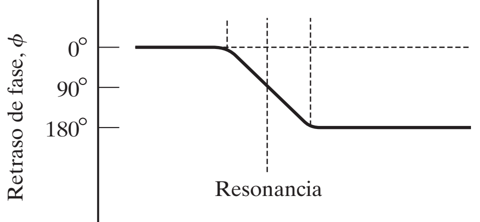


Figura 8.13 Gráficas de las ecuaciones (8.39) y (8.40).

donde la ecuación (8.36) resulta en ω_n. Se ve que la velocidad crítica corresponde exactamente a la frecuencia natural ω_n sólo cuando el amortiguamiento (c) es cero. Además, la ecuación (8.41) muestra que, por lo general, la presencia de amortiguamiento incrementa el valor de la velocidad crítica comparada con ω_n. En la figura 8.13 [8.14] se muestra una gráfica de las ecuaciones (8.39) y (8.40). Como la función forzada es proporcional a ω^2, normalmente esperamos que la amplitud de vibración se incremente con la velocidad ω. Sin embargo, la amplitud real aparece como se muestra en la figura 8.13. Por la ecuación (8.39) se observa que la constante de resorte k determina la amplitud de remolineo circular A a bajas velocidades, puesto que los otros dos términos, $m\omega^2$ y $c^2\omega^2$ son pequeños. Además, se ve que el valor del ángulo de fase ϕ es 0° según la ecuación (8.40) para valores pequeños de ω. A medida que ω se incrementa, la amplitud de la respuesta alcanza un pico, puesto que la resonancia ocurre con $k - m\omega^2 = 0$. Alrededor de la resonancia, en esencia el término de amortiguamiento limita la respuesta. El retraso de fase es de 90° en resonancia. A medida que la velocidad ω se incrementa más allá de ω_n, el término de masa $m^2\omega^4$ en la ecuación (8.39) domina la respuesta. Puesto que este término está desfasado 180° con respecto a la fuerza desbalanceada, la flecha gira en dirección opuesta a la de la fuerza desbalanceada, de ahí que su respuesta estará limitada.

Notas:

1. La ecuación (8.38) asume implícitamente una condición de remolineo sincrónico directo bajo estado estable (es decir, $\dot{\theta} = \omega$). Como un caso general, si la solución de estado estable de la ecuación (8.37) se supone como $w(t) = Ae^{i(\gamma t - \phi)}$, la solución se obtiene como $\gamma = \pm\omega$, con $\gamma = +\omega$ representando el remolineo sincrónico directo y $\gamma = -\omega$ denotando un remolineo sincrónico inverso. Para rotores simples, como el de la figura 8.11, sólo ocurre remolineo sincrónico directo en la práctica.
2. Para determinar las reacciones en los rodamientos, primero encontramos la deflexión del centro de masa del disco con respecto al eje de rodamiento, R en la figura 8.12, como

$$R^2 = A^2 + a^2 + 2Aa\cos\phi \tag{8.42}$$

Considerando las ecuaciones (8.39) y (8.40), la ecuación (8.42) se reescribe como

$$R = a\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2} \tag{8.43}$$

Las reacciones en los rodamientos se determinan entonces por la fuerza centrífuga, $m\omega^2 R$. La vibración y balanceo de rotores flexibles desbalanceados se presentan en las referencias [8.17, 8.18].

8.5.4 Análisis de estabilidad

La inestabilidad en un sistema de rotor flexible puede ocurrir debido a varios factores como fricción interna, excentricidad del rotor y el latigueo de aceite en los rodamientos. Como se vio antes, la estabilidad del sistema se puede investigar teniendo presente la ecuación que rige la dinámica del sistema. Suponiendo $w(t) = e^{est}$, la ecuación característica a la parte homogénea de la ecuación (8.35) se escribe como

$$ms^2 + (c_i + c)s + k - i\omega c_i = 0 \tag{8.44}$$

Con $s = i\lambda$, la ecuación (8.44) se escribe como

$$-m\lambda^2 + (c_i + c)i\lambda + k - i\omega c_i = 0 \quad (8.45)$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación más general

$$(p_2 + iq_2)\lambda^2 + (p_1 + iq_1)\lambda + (p_0 + iq_0) = 0 \quad (8.46)$$

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema regido por la ecuación (8.46) sea estable, según el criterio de Routh-Hurwitz, es que se satisfagan las siguientes desigualdades:

$$-\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} > 0 \quad (8.47)$$

y

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix} > 0 \quad (8.48)$$

Observando que $p_2 = -m$, $q_2 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = c_i + c$, $p_0 = k$ y $q_0 = -\omega c_i$, de acuerdo con la ecuación (8.45), la aplicación de las ecuaciones (8.47) y (8.48) conduce a

$$m(c_i + c) > 0 \quad (8.49)$$

y

$$km(c_i + c)^2 - m^2(\omega^2 c_i^2) > 0 \quad (8.50)$$

La ecuación (8.49) se satisface automáticamente, en tanto que la ecuación (8.50) produce la condición

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1 + \frac{c}{c_i}\right) - \omega > 0 \quad (8.51)$$

Esta ecuación también muestra que la fricción interna y externa puede provocar inestabilidad a velocidades de rotación por encima de la primera velocidad crítica de $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ejemplo 8.3 Amplitud de remolineo de una flecha con un rotor desbalanceado

Una flecha, con un rotor que pesa 100 lb y excentricidad de 0.1 pulg., gira a 1200 rpm. Determine (a) la amplitud de remolineo de estado estable y (b) la amplitud de remolineo máxima durante las condiciones de arranque del sistema. Suponga la rigidez de la flecha como 2×10^5 lb/pulg y la relación de amortiguamiento externo como 0.1.

Solución: La frecuencia forzada del rotor (velocidad de rotación de la flecha) está dada por

$$\omega = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi = 125.6640 \text{ rad/s}$$

La frecuencia natural del sistema se determina como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^5}{(100/386.4)}} = 87.9090 \text{ rad/s}$$

y la relación de frecuencia como

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{125.6640}{87.9090} = 1.4295$$

(a) La ecuación (8.39) proporciona la amplitud de estado estable:

$$A = \frac{ar^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{E.1}$$

$$= \frac{(0.1)(1.4295)^2}{\sqrt{(1 - 1.4295^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 1.4295)^2}} = 0.18887 \text{ pulg.} \tag{E.2}$$

(b) Durante las condiciones de arranque, la frecuencia (velocidad) del rotor, ω, pasa por la frecuencia natural del sistema. Por lo tanto, con $r = 1$ en la ecuación (E.1), obtenemos la amplitud de remolineo como

$$A|_{r=1} = \frac{a}{2\zeta} = \frac{0.1}{2(0.1)} = 0.5 \text{ pulg.}$$

■

8.6 Balanceo de motores reciprocantes

Los elementos móviles esenciales de un motor reciprocante son el pistón, el cigüeñal y la biela. Las vibraciones en motores reciprocantes se presentan debido a (1) la variación periódica de la presión de gas en el cilindro y (2) las fuerzas de inercia (periódicas) asociadas con las partes móviles. [8.19]. A continuación examinaremos un motor reciprocante y encontraremos las fuerzas desbalanceadas provocadas por estos factores.

8.6.1 Fuerzas desbalanceadas debido a fluctuaciones en la presión de gas

La figura 8.14(a) es un diagrama esquemático de un cilindro de un motor reciprocante. El motor es propulsado por el gas que se expande en el cilindro. El gas ejerce una fuerza de presión F en el pistón, la cual se transmite al cigüeñal por conducto de la biela. La reacción a la fuerza F se puede descomponer en dos componentes: una de magnitud $F/\cos\phi$, que actúa a lo largo de la biela, y la otra de magnitud $F \tan\phi$, que actúa en una dirección horizontal. La fuerza $F/\cos\phi$ induce un par de torsión M_i, la cual tiende a hacer girar el cigüeñal. (En la figura 8.14(b), M_i actúa con respecto a un eje perpendicular al plano de la página y pasa por el punto Q).

$$M_t = \left(\frac{F}{\cos\phi}\right) r \cos\theta \tag{9.52}$$

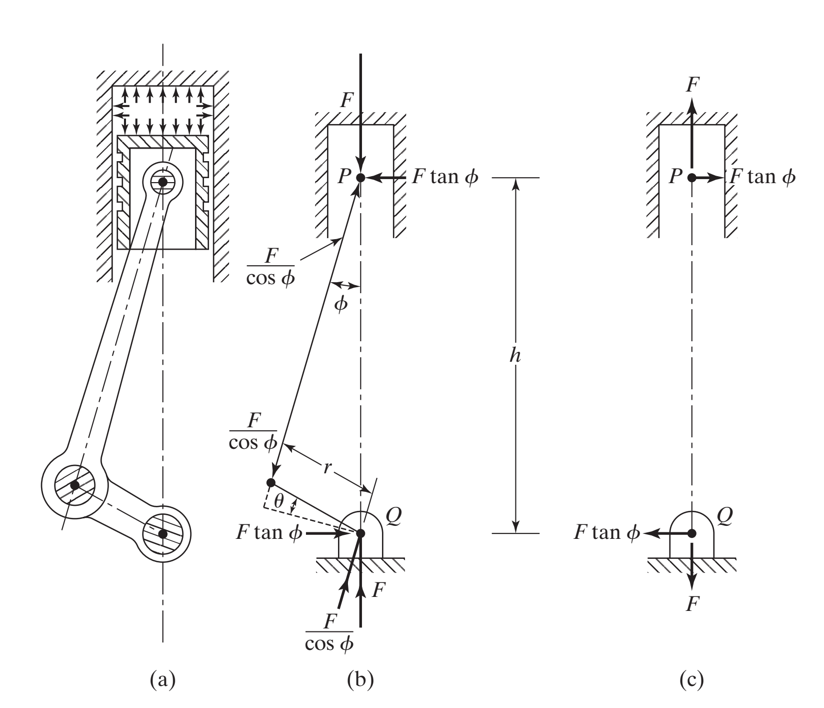


Figura 8.14 Fuerzas en un motor reciprocante.

Para el equilibrio de fuerzas de todo el sistema, las fuerzas en los rodamientos del cigüeñal serán F en la dirección vertical y $F \tan \phi$ en la dirección horizontal.

Por lo tanto, las fuerzas transmitidas a las partes estacionarias del motor son las siguientes:

1. La fuerza F que actúa hacia arriba en la cabeza de cilindros
2. La fuerza $F \tan \phi$ que actúa hacia la derecha en la cabeza de cilindros
3. La fuerza F que actúa hacia abajo en el rodamiento del cigüeñal Q
4. La fuerza $F \tan \phi$ que actúa hacia la izquierda en el rodamiento del cigüeñal.

Estas fuerzas se muestran en la figura 8.14(c). Aun cuando la fuerza resultante total es cero, hay un par de torsión resultante $M_Q = Fh \tan \phi$ que actúa en el cuerpo del motor, donde h se puede encontrar a partir de la geometría del sistema:

$$h = \frac{r \cos \theta}{\operatorname{sen} \phi} \tag{8.53}$$

Por lo tanto, el par de torsión resultante es

$$M_Q = \frac{Fr \cos \theta}{\cos \phi} \tag{8.54}$$

Como se esperaba, se ve que los pares M_i y M_Q dados por las ecuaciones (8.52) y (8.54) son idénticos, lo que indica que el par de torsión inducido en el cigüeñal debido a la presión de gas sobre el pistón se percibe en el soporte del motor. Como la magnitud de la fuerza del gas F varía con el tiempo, el par de torsión M_Q también varía con el tiempo. La magnitud de la fuerza F cambia desde un máximo hasta un mínimo a una frecuencia regida por el número de cilindros en el motor, el tipo del ciclo de operación y la velocidad de rotación del motor.

8.6.2 Fuerzas desbalanceadas debido a inercia de las partes móviles

Aceleración del pistón. La figura 8.15 muestra el cigüeñal (de longitud r), la biela (de longitud l) y el pistón de un motor reciprocante. Se supone que el cigüeñal gira en dirección contraria a las manecillas del reloj a una velocidad angular constante, ω, como se muestra en la figura 8.15. Si consideramos el origen del eje x (O) como la posición más alta del pistón, el desplazamiento del pistón P correspondiente a un desplazamiento angular del cigüeñal de $\theta = \omega t$ se puede expresar como en la figura 8.15. El desplazamiento del pistón P correspondiente a un desplazamiento angular del cigüeñal $\theta = \omega t$ de su posición más alta (origen O) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_p &= r + l - r\cos\theta - l\cos\phi \\ &= r + l - r\cos\omega t - l\sqrt{1 - \text{sen}^2\phi} \end{aligned} \tag{8.55}$$

Pero

$$l\,\text{sen}\,\phi = r\,\text{sen}\,\theta = r\,\text{sen}\,\omega t \tag{8.56}$$

y por consiguiente

$$\cos\phi = \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\text{sen}^2\omega t\right)^{1/2} \tag{8.57}$$

Sustituyendo la ecuación (8.57) en la ecuación (8.55), obtenemos

$$x_p = r + l - r\cos\omega t - l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\text{sen}^2\,\omega t} \tag{8.58}$$

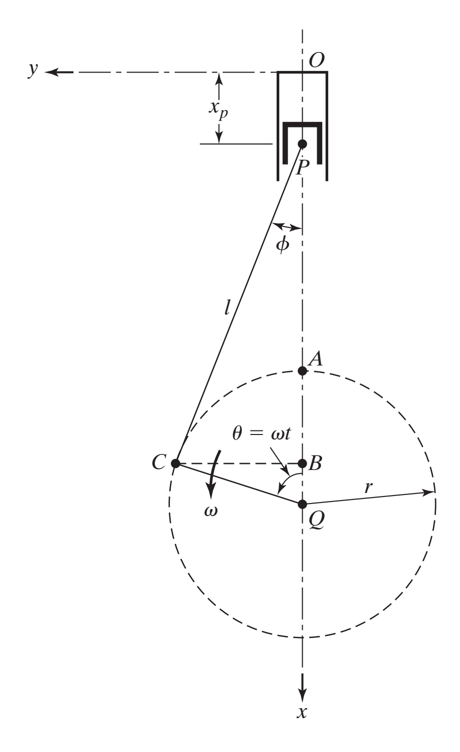


Figura 8.15 Movimientos del cigüeñal, biela y pistón.

Debido a la presencia del término que implica la raíz cuadrada, la ecuación (8.58) no es muy conveniente para mayores cálculos. La ecuación (8.58) se puede simplificar observando que, por lo general, $r/l < \frac{1}{4}$ y utilizando la relación de expansión.

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.59}$$

Por consiguiente, la ecuación (8.58) se puede aproximar como

$$x_p \simeq r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2l} \operatorname{sen}^2 \omega t \tag{8.60}$$

o, de forma equivalente,

$$x_p = r\left(1 + \frac{r}{2l}\right) - r\left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t\right) \tag{8.61}$$

La ecuación (8.61) se puede diferenciar con respecto al tiempo para obtener expresiones para la velocidad y aceleración del pistón:

$$\dot{x}_p = r\omega\left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{r}{2l} \operatorname{sen} 2\omega t\right) \tag{8.62}$$

$$\ddot{x}_p = r\omega^2\left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right) \tag{8.63}$$

Aceleración del muñón del cigüeñal. Con respecto a los ejes de coordenadas xy mostrados en la figura 8.15, los desplazamientos verticales y horizontales del muñón del cigüeñal C están dados por

$$x_c = OA + AB = l + r(1 - \cos \omega t) \tag{8.64}$$

$$y_c = CB = r \operatorname{sen} \omega t \tag{8.65}$$

La diferenciación de las ecuaciones (8.64) y (8.65) con respecto al tiempo proporciona los componentes de velocidad y aceleración del muñón del cigüeñal como

$$\dot{x}_c = r\omega \operatorname{sen} \omega t \tag{8.66}$$

$$\dot{y}_c = r\omega \cos \omega t \tag{8.67}$$

$$\ddot{x}_c = r\omega^2 \cos \omega t \tag{8.68}$$

$$\ddot{y}_c = -r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{8.69}$$

Fuerzas de inercia. Aunque la masa de la biela está distribuida a lo largo de toda su longitud, en general se idealiza como un eslabón sin masa enlazado a dos masas concentradas en sus extremos: el extremo del pistón y el extremo del muñón del cigüeñal. Si m_p y m_c indican la masa total del pistón y del muñón del cigüeñal (incluida la masa concentrada de la biela) respectivamente, el componente vertical de la fuerza de inercia (F_x) para un cilindro está dado por

$$F_x = m_p\ddot{x}_p + m_c\ddot{x}_c \tag{8.70}$$

Sustituyendo las ecuaciones (8.63) y (8.68) para las aceleraciones de P y C, la ecuación (8.70) se escribe como

$$F_x = (m_p + m_c)r\omega^2 \cos \omega t + m_p \frac{r^2\omega^2}{l} \cos 2\omega t \tag{8.71}$$

Se puede observar que el componente vertical de la fuerza de inercia se compone de dos partes. Una, conocida como *parte primaria*, tiene una frecuencia igual a la frecuencia de rotación del cigüeñal ω. La otra, conocida como *parte secundaria*, tiene una frecuencia igual a dos veces la frecuencia de rotación del cigüeñal.

Asimismo, el componente horizontal de la fuerza de inercia para un cilindro se obtiene como

$$F_y = m_p \ddot{y}_p + m_c \ddot{y}_c \tag{8.72}$$

donde la ecuación (8.69) da $\ddot{y}_p = 0$ y $\ddot{y}_c$. Por lo tanto

$$F_y = -m_c r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{8.73}$$

Se observa que el componente horizontal de la fuerza de inercia tiene sólo una parte primaria.

8.6.3 Balanceo de motores reciprocantes

Las ecuaciones (8.71) y (8.73) proporcionan las fuerzas desbalanceadas o de inercia en un cilindro. En estas ecuaciones, m_p y m_c representan masas reciprocante y rotatoria equivalentes, respectivamente. La masa m_p siempre es positiva, pero m_c puede hacerse cero contrapesando el cigüeñal. Por lo que es posible reducir la fuerza de inercia horizontal F_y a cero, pero la fuerza desbalanceada vertical siempre existe. Por lo tanto un motor de un cilindro es inherentemente desbalanceado.

En un motor de varios cilindros, es posible balancear algunas o todas las fuerzas de inercia y pares de torsión mediante la disposición apropiada de los cigüeñales. La figura 8.16(a) muestra la disposición general de un motor de N cilindros (sólo seis cilindros, $N = 6$, se muestran en la figura). Se supone que las longitudes de todos los cigüeñales y bielas son r y l, respectivamente, y que la velocidad angular de todos los cigüeñales es una constante, ω. Se supone que el desplazamiento axial y la orientación angular del cilindro i-ésimo con respecto a los del primer cilindro deben ser α_i y l_i, respectivamente; $i = 2, 3, \ldots, N$. Para el balance de fuerzas, la fuerza de inercia total en las direcciones x y y debe ser cero. Por consiguiente

$$(F_x)_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} (F_x)_i = 0 \tag{8.74}$$

$$(F_y)_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} (F_y)_i = 0 \tag{8.75}$$

donde $(F_x)_i$ y $(F_y)_i$ son los componentes vertical y horizontal de la fuerza de inercia del cilindro i proporcionados por (vea las ecuaciones (8.71) y (8.73)):

$$(F_x)_i = (m_p + m_c)_i r\omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i) + (m_p)_i \frac{r^2\omega^2}{l} \cos(2\omega t + 2\alpha_i) \tag{8.76}$$

$$(F_y)_i = -(m_c)_i r\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i) \tag{8.77}$$

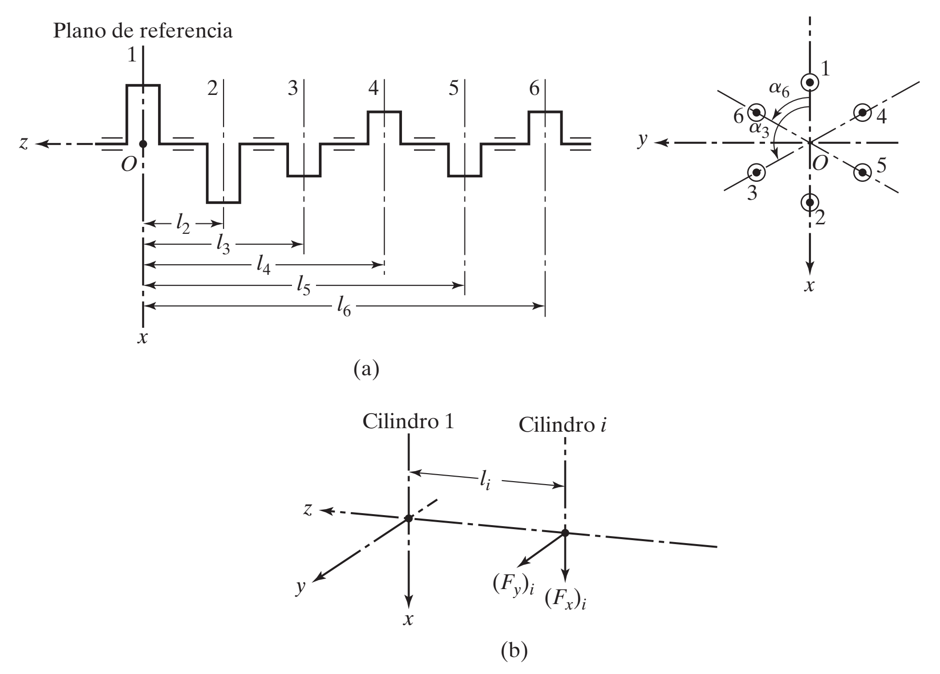


Figura 8.16 Disposición de un motor de N cilindros.

Para simplificar, suponemos que las masas reciprocantes y rotatorias de cada cilindro son las mismas, es decir, $(m_p)_i = m_p$ y $(m_c)_i = m_c$ con $i = 1, 2, ..., N$. Sin pérdida de generalidad, las ecuaciones (8.74) y (8.75) se pueden aplicar en el tiempo $t = 0$. Por lo tanto, las condiciones necesarias para el balance de fuerza total están dadas por

$$\sum_{i=1}^{N} \cos \alpha_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{N} \cos 2\alpha_i = 0 \tag{8.78}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sen} \alpha_i = 0 \tag{8.79}$$

Las fuerzas de inercia $(F_x)_i$ y $(F_y)_i$ del cilindro i-ésimo inducen momentos en cuanto a los ejes y y x, respectivamente, como se muestra en la figura 8.16(b). Los momentos con respecto a los ejes z y x son

$$M_z = \sum_{i=2}^{N} (F_x)_i l_i = 0 \tag{8.80}$$

$$M_x = \sum_{i=2}^{N} (F_y)_i l_i = 0 \tag{8.81}$$

Sustituyendo las ecuaciones (8.76) y (8.77) en las ecuaciones (8.80) y (8.81) y suponiendo $t = 0$, obtenemos las condiciones necesarias que deberán satisfacerse para el balanceo de momentos con respecto a los ejes z y x como

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \cos \alpha_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=2}^{N} l_i \cos 2\alpha_i = 0 \tag{8.82}$$

$$\sum_{i=2}^{N} l_i \operatorname{sen} \alpha_i = 0 \tag{8.83}$$

Por lo tanto, podemos acomodar los cilindros de un motor reciprocante de varios cilindros de manera que se satisfagan las ecuaciones (8.78), (8.79), (8.82) y (8.83); quedará completamente balanceado contra las fuerzas de inercia y momentos.

8.7 Control de vibración

En muchas situaciones prácticas, es posible reducir mas no eliminar las fuerzas dinámicas que provocan vibraciones. Se pueden utilizar varios métodos para controlar vibraciones. Entre ellos, los siguientes son importantes:

1. Controlar las frecuencias naturales del sistema y evitar la resonancia bajo excitaciones externas.
2. Impedir la respuesta excesiva del sistema, incluso en resonancia, con la introducción de amortiguamiento o un mecanismo disipador de energía.
3. Reducir la transmisión de las fuerzas de excitación de una parte de la máquina a otra por medio de aisladores de vibración.
4. Reducir la respuesta del sistema con la adición de un neutralizador de masa auxiliar o absorbedor de vibración.

A continuación consideraremos los detalles de estos métodos.

8.8 Control de frecuencias naturales

Se sabe muy bien que siempre que la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, ocurre resonancia. La característica más prominente de la resonancia es un desplazamiento grande. En la mayoría de los sistemas mecánicos y estructurales, los grandes desplazamientos indican esfuerzos y deformaciones indeseablemente grandes, los cuales pueden provocar la falla del sistema. De ahí que en cualquier sistema se deben evitar las condiciones de resonancia. En la mayoría de los casos, la frecuencia de excitación se puede controlar, porque es impuesta por requerimientos funcionales del sistema o máquina. Debemos concentrarnos en controlar las frecuencias naturales del sistema para evitar la resonancia.

Como indica la ecuación (2.14), la frecuencia natural de un sistema se puede cambiar variando ya sea la masa m o la rigidez k.[4] En muchos casos prácticos, sin embargo, la masa no se puede

[4]Aunque este enunciado se hace en relación con un sistema de un solo grado de libertad, por lo general es válido incluso para sistemas de varios grados de libertad y continuos.

cambiar con facilidad, puesto que su valor está determinado por los requerimientos funcionales del sistema. Por ejemplo, la masa de un volante en una flecha está determinada por la cantidad de energía que debe almacenar en un ciclo. Por consiguiente, la rigidez del sistema es el factor que con más frecuencia se cambia para modificar sus frecuencias naturales. Por ejemplo, la rigidez de una flecha rotatoria se puede modificar variando uno o más de sus parámetros, como los materiales o la cantidad y ubicación de los puntos de soporte (rodamientos).

8.9 Introducción al amortiguamiento

Aunque el amortiguamiento se omite para simplificar el análisis, sobre todo al determinar las frecuencias naturales, la mayoría de los sistemas poseen amortiguamiento hasta un cierto grado. La presencia de amortiguamiento es útil en muchos casos. En sistemas como amortiguadores de automóviles y muchos instrumentos de medición de vibración, se debe introducir amortiguamiento para satisfacer los requerimientos funcionales [8.20-8.21].

Si el sistema experimenta vibración forzada, su respuesta o amplitud de vibración tiende a incrementarse cerca de la resonancia si no hay amortiguamiento. La presencia de amortiguamiento siempre limita la amplitud de vibración. Si se conoce la frecuencia forzada, puede ser posible evitar la resonancia cambiando la frecuencia natural del sistema. Sin embargo, quizá se requiera que el sistema o máquina opere dentro de varios rangos de velocidad, como en el caso de un motor eléctrico de velocidad variable o un motor de combustión interna. Tal vez no se pueda evitar la resonancia en todas las condiciones de operación. En tales casos, podemos introducir amortiguamiento en el sistema para controlar su respuesta, utilizando materiales estructurales de alto amortiguamiento interno, como hierro colado o materiales laminados o emparedados.

En algunas aplicaciones estructurales se introduce amortiguamiento por medio de juntas. Por ejemplo, las juntas empernadas y remachadas, las cuales permiten resbalamiento entre las superficies, disipan más energía que las juntas soldadas, las cuales no lo permiten. De ahí que lo deseable para incrementar el amortiguamiento de la estructura es una junta empernada o remachada. Sin embargo, este tipo de juntas reducen la rigidez de la estructura, producen desechos debido al resbalamiento de las juntas y provocan corrosión por desgaste. A pesar de esto, si se desea una estructura muy amortiguada, no se deberán pasar por alto las juntas empernadas o remachadas.

Uso de materiales viscoelásticos. La ecuación de movimiento de un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento interno, sometido a excitación armónica $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, se expresa como

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = F_0 e^{i\omega t} \tag{8.84}$$

donde η se conoce como *factor de pérdida* (o *coeficiente de pérdida*), el cual se define como (vea la sección 2.6.4)

$$\eta = \frac{(\Delta W/2\pi)}{W} = \left(\frac{\text{Energía disipada durante 1 ciclo de desplazamiento armónico/radián}}{\text{Energía de deformación máxima en el ciclo}}\right) \tag{8.85}$$

La amplitud de la respuesta del sistema en resonancia ($\omega = \omega_n$) está dada por

$$\frac{F_0}{k\eta} = \frac{F_0}{aE\eta} \tag{8.86}$$

puesto que la rigidez es proporcional al módulo de Young ($k = aE$; $a =$ constante).

Los materiales viscoelásticos tienen factores de pérdida más grandes y por consiguiente se utilizan para proporcionar amortiguamiento interno. Cuando se utilizan materiales viscoelásticos para controlar la vibración se someten a deformación por cortante o directas. En la configuración más simple, una capa de material viscoelástico se adjunta a una elástica. En otro arreglo, una capa viscoelástica se coloca entre capas elásticas. Esta configuración se conoce como amortiguamiento de capa restringida.[5] Las cintas de amortiguamiento, que consisten en una delgada hoja de metal cubierta con un adhesivo viscoelástico se utilizan en estructuras vibratorias existentes. Una desventaja de los materiales viscoelásticos es que sus propiedades cambian con la temperatura, frecuencia y tensión. La ecuación (8.86) muestra que un material con el valor más alto de ($E\eta$) proporciona la amplitud resonante mínima. Dado que la deformación es proporcional al desplazamiento x y el esfuerzo es proporcional a Ex, el material con el valor más grande del factor de pérdida se someterá a los esfuerzos mínimos. A continuación se enuncian los valores del coeficiente de pérdida de algunos materiales .

Material	**Factor de pérdida (η)**
Poliestireno	2.0
Caucho duro	1.0
Tapetes de fibra con matriz	0.1
Corcho	0.13-0.17
Aluminio	1×10^{-4}
Hierro y acero	$2\text{-}6 \times 10^{-4}$

Las relaciones de amortiguamiento obtenibles con diferentes tipos de construcción/configuración se indican a continuación:

Tipo de construcción/configuración	**Relación de amortiguamiento viscoso equivalente (%)**
Construcción soldada	1-4
Construcción empernada	3-10
Marco de acero	5-6
Capa viscoelástica no restringida sobre una viga de acero y concreto	4-5
Capa viscoelástica restringida sobre una viga de acero y concreto	5-4

8.10 Aislamiento de la vibración

El aislamiento de la vibración es un procedimiento mediante el cual se reducen los efectos indeseables de vibración [8.22-8.24]. Básicamente, implica la inserción de un miembro elástico (o aislador)

[5]Parece que el amortiguamiento de capa restringida se utilizó, posiblemente sin saberlo, desde tanto tiempo atrás como el siglo XVII, en la fabricación de violines [8.22]. Antonio Stradivari (1644-1737), el renombrado fabricante italiano de violines, adquirió desde Venecia la madera necesaria para la fabricación de violines. El barniz utilizado para sellar la madera se elaboró con una mezcla de resina y piedras preciosas molidas. Este barniz, partículas de piedra en una matriz de resina, actuaba como una forma de capa restringida (mecanismo de fricción) que generaba suficiente amortiguamiento para explicar por qué muchos de sus violines tenían un espléndido y rico tono.

entre la masa vibratoria (equipo o carga útil) y la fuente de vibración de modo que se logre una reducción de la respuesta dinámica del sistema sometido a condiciones específicas de excitación por vibración. Se dice que un sistema de aislamiento es activo o pasivo según si se requiere o no potencia externa para que el aislador realice su función. Un aislador pasivo se compone de un miembro elástico (rigidez) y un disipador de energía (amortiguamiento). Algunos ejemplos de aisladores pasivos comprenden resortes metálicos, corcho, fieltro, resortes neumáticos y resortes elastoméricos (caucho). La figura 8.17 muestra soportes de resorte y neumáticos típicos que se pueden utilizar como aisladores pasivos y la figura 8.18 ilustra el uso de aisladores pasivos en los soportes de soporte de una prensa punzonadora de alta velocidad [8.25]. La síntesis óptima de aisladores de vibración se presenta en las referencias [8.26-8.30]. Un aislador activo se compone de un servomecanismo con un sensor, un procesador de señales y un actuador.

El aislamiento de vibración se puede utilizar en dos tipos de situaciones. En el primer tipo, el cimiento o base de una máquina vibratoria se protege contra grandes fuerzas desbalanceadas. En el segundo tipo, el sistema se protege contra el movimiento de su cimiento o base.

El primer tipo de aislamiento se utiliza cuando una masa (o máquina) se somete a una fuerza o excitación. Por ejemplo, en prensas de forja y estampado, grandes fuerzas impulsoras actúan en el objeto que se está formando o estampando. Estos impactos se transmiten a la base o cimiento pero también a las estructuras o máquinas circundantes o cercanas. También pueden provocar incomodidad a los operarios de estas máquinas. Asimismo, en el caso de máquinas reciprocantes

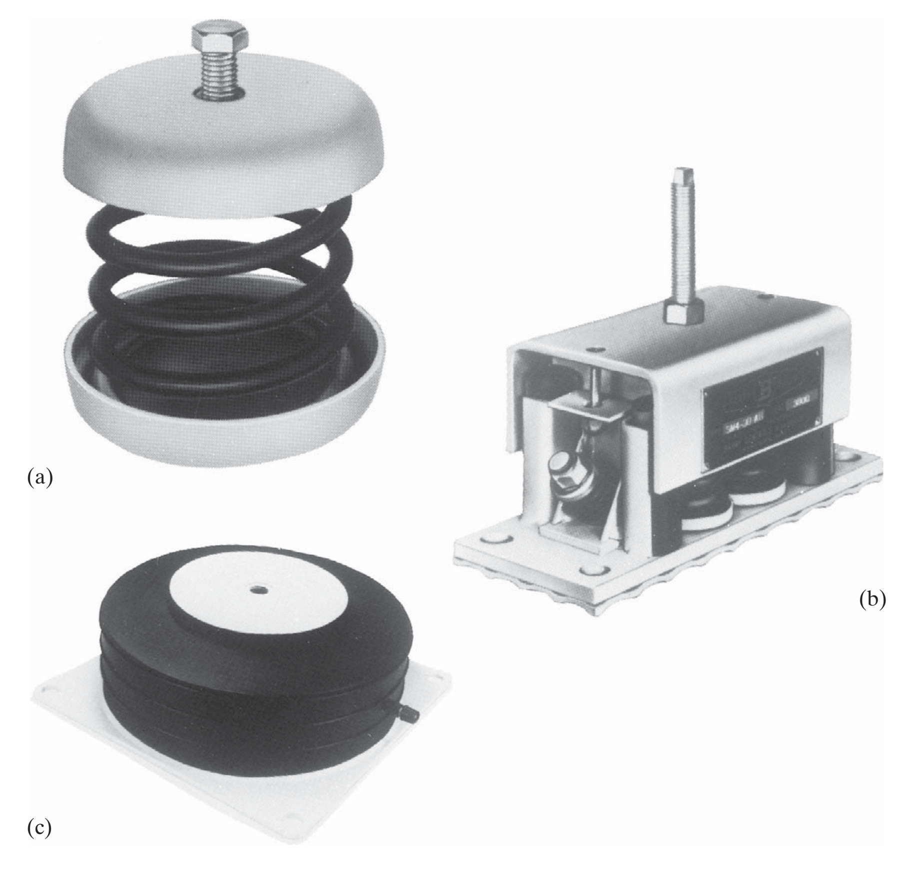


Figura 8.17 (a) Soporte de montaje de resorte no amortiguado; (b) soporte de montaje de resorte amortiguado; (c) soporte de montaje de caucho neumático. (Cortesía de *Sound and Vibration*).

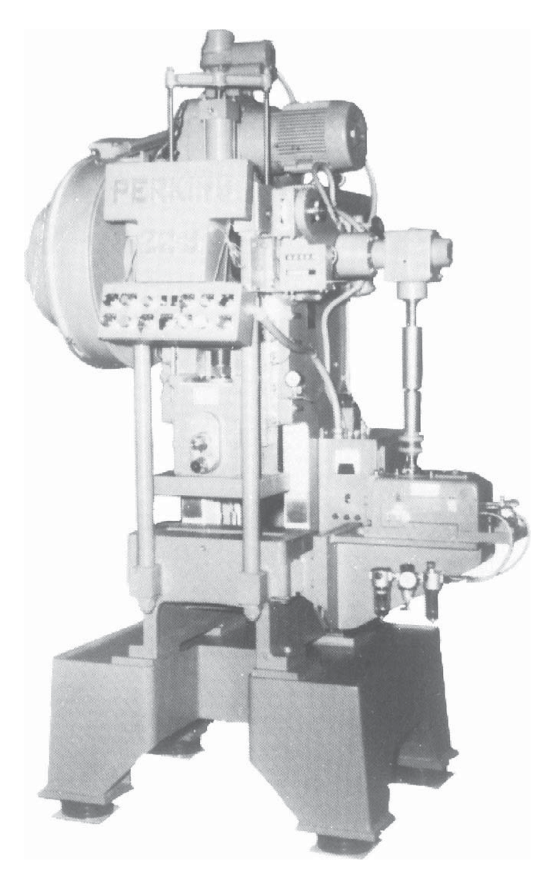


Figura 8.18 Prensa punzonadora de alta velocidad montada sobre soportes de caucho neumáticos. (Cortesía de *Sound and Vibration*).

y rotatorias, las fuerzas desbalanceadas inherentes se transmiten a la base o cimiento de la máquina. En tales casos, la fuerza transmitida a la base, $F_t(t)$ varía armónicamente, y los esfuerzos resultantes en los pernos también varían armónicamente, lo que podría provocar fallas por fatiga. Incluso si la fuerza no es armónica, su magnitud se tiene que limitar a valores permisibles seguros. En estas aplicaciones podemos insertar un aislador (en la forma de rigidez y/o amortiguamiento) entre la masa sometida a una fuerza o excitación y la base o cimiento para reducir la fuerza transmitida a la base o cimiento. Esto se llama *aislamiento de fuerza*. En muchas aplicaciones, el aislador también está previsto para que reduzca el movimiento vibratorio de la masa sometida a la fuerza aplicada (como en el caso de máquinas de forja y estampado). Por consiguiente, las transmisibilidades tanto de fuerza como de desplazamiento de los aisladores llegan a ser importantes para éstos.

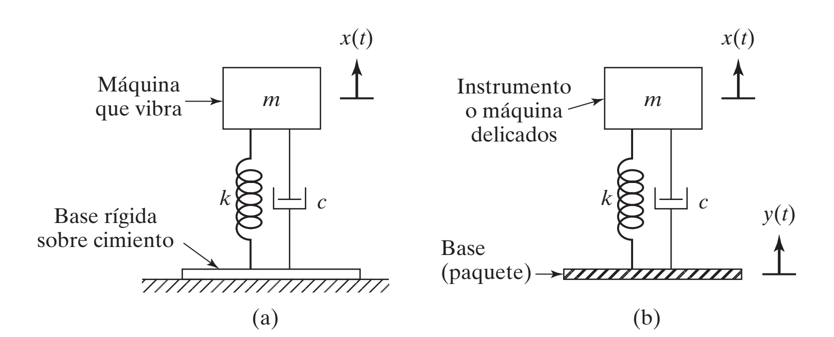


Figura 8.19 Aislamiento de la vibración.

El segundo tipo de aislamiento se utiliza cuando se tiene que proteger una masa contra el movimiento o excitación de su base o cimiento. Cuando la base se somete a vibración, la masa m experimentará no sólo un desplazamiento $x(t)$ sino también una fuerza $F_t(t)$. Se espera que el desplazamiento de la masa sea menor que el desplazamiento de la base $y(t)$. Por ejemplo, un instrumento o equipo delicado se tiene que proteger contra el movimiento de su contenedor o paquete (como cuando el vehículo que transporta el paquete experimenta vibración mientras transita por un camino escabroso). La fuerza transmitida a la masa también se tiene que reducir. Por ejemplo, el paquete o contenedor se tiene que diseñar apropiadamente para evitar la transmisión de fuerzas grandes al delicado instrumento en el interior del paquete para que no se dañe. La fuerza experimentada por el instrumento o masa m (la misma que la fuerza transmitida a la masa m) es

$$F_t(t) = m\ddot{x}(t) = k\{x(t) - y(t)\} + c\{\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\} \tag{8.87}$$

donde $y(t)$ es el desplazamiento de la base, $x(t) - y(t)$ es el desplazamiento relativo del resorte, y $\dot{x}(t) - \dot{y}(t)$ es la velocidad relativa del amortiguador. En tales casos, podemos insertar un aislador (que proporcione rigidez y/o amortiguamiento) entre la base sometida a una fuerza o excitación y la masa, para aminorar el movimiento y/o fuerza transmitida a la masa. Por consiguiente, tanto el aislamiento de fuerza como el aislamiento de movimiento también llegan a ser importantes.

Es importante notar que la eficacia de un aislador depende de la naturaleza de la fuerza o excitación. Por ejemplo, un aislador diseñado para reducir la fuerza transmitida a la base o cimiento debido a fuerzas de impacto de forja o estampado puede no ser efectivo si la perturbación es una fuerza desbalanceada armónica. Asimismo, un aislador diseñado para manejar excitación armónica a una frecuencia particular puede no ser efectivo para otras frecuencias u otros tipos de excitación como excitación escalonada o gradual.

8.10.1 Sistema de aislamiento de vibración con cimiento rígido

Reducción de la fuerza transmitida al cimiento. Cuando una máquina se atornilla directamente en un cimiento o piso rígido, el cimiento se verá sometido a una carga armónica debido al desbalance en la máquina, además de la carga estática originada por el peso de la máquina. De ahí que se coloque un miembro elástico entre la máquina y el cimiento rígido para reducir la fuerza transmitida al cimiento. El sistema se puede idealizar entonces como un sistema de un solo grado de libertad, como se muestra en la figura 8.20(a). Se supone que el miembro elástico tiene tanto elasticidad como amortiguamiento y se modela como un resorte k y un amortiguador hidráulico c, como se muestra en la figura 8.20(b). Se supone que la operación de la máquina origina una fuerza armónicamente variable $F(t) = F_0 \cos \omega t$. La ecuación de movimiento de la máquina (de masa m) está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{8.88}$$

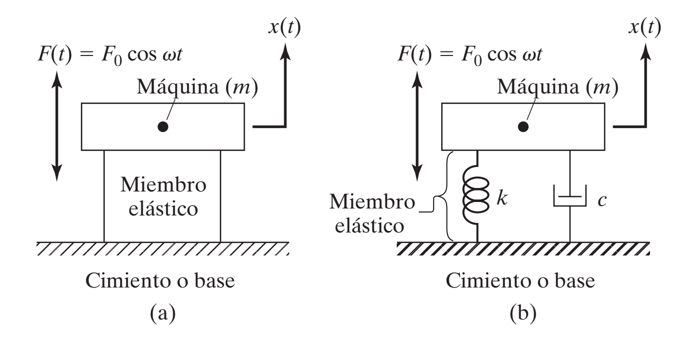


Figura 8.20 Máquina y miembro elástico sobre un cimiento rígido.

Como la solución transitoria desaparece después de un cierto tiempo, sólo la solución de estado estable permanecerá. La solución de estado estable de la ecuación (8.88) está dada por (vea la ecuación (3.25))

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi) \tag{8.89}$$

donde

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \tag{8.90}$$

y

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{k - m\omega^2}\right) \tag{8.91}$$

La fuerza transmitida al cimiento a través del resorte y el amortiguador, $F_t(t)$ es

$$F_t(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) = kX \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{8.92}$$

La magnitud de la fuerza total transmitida (F_T) es

$$\begin{aligned} F_T &= [(kx)^2 + (c\dot{x})^2]^{1/2} = X\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2} \\ &= \frac{F_0(k^2 + \omega^2 c^2)^{1/2}}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \end{aligned} \tag{8.93}$$

La transmisibilidad o relación de transmisión del aislador (T_f) se define como la relación de la magnitud de la fuerza transmitida a la de la fuerza de excitación:

$$\begin{aligned} T_f = \frac{F_T}{F_0} &= \left\{\frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{[1 - r^2]^2 + (2\zeta r)^2}\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{8.94}$$

donde $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ es la relación de frecuencia. La variación de T_f con la relación de frecuencia $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ se muestra en la figura 8.21. Para lograr el aislamiento, la fuerza transmitida al cimiento tiene que ser menor que la fuerza de excitación. En la figura 8.21 se ve que la frecuencia forzada tiene que ser mayor que $\sqrt{2}$ veces la frecuencia natural del sistema para lograr el aislamiento de vibración.

Para valores pequeños de la relación de amortiguamiento ζ y la relación de frecuencia $r > 1$, la transmisibilidad de fuerza, dada por la ecuación (8.94), se puede aproximar como

$$T_f = \frac{F_t}{F} \approx \frac{1}{r^2 - 1} \quad \text{o} \quad r^2 \approx \frac{1 + T_f}{T_f} \tag{8.95}$$

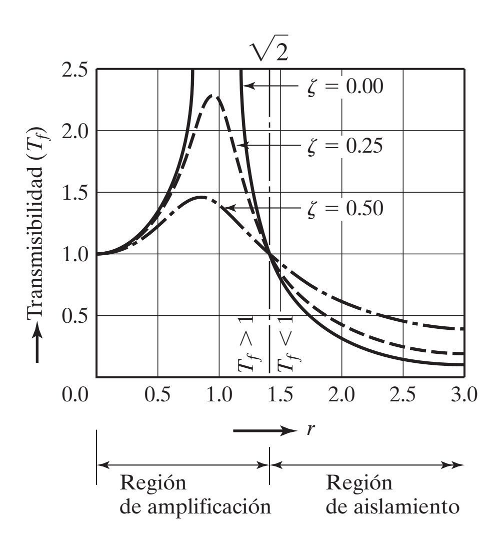


Figura 8.21 Variación de la relación de transmisión (T_f) con r.

Notas

1. La magnitud de la fuerza transmitida al cimiento se puede aminorar reduciendo la frecuencia natural del sistema (ω_n).
2. La fuerza transmitida al cimiento también se puede reducir aminorando la relación de amortiguamiento. Sin embargo, como el aislamiento de vibración requiere $r > \sqrt{2}$, la máquina debe pasar por la resonancia durante el arranque y detención. Por consiguiente, se requiere algo de amortiguamiento para evitar las amplitudes infinitamente grandes en resonancia.
3. Aunque el amortiguamiento reduce la amplitud de la masa (X) a todas las frecuencias, reduce la fuerza máxima transmitida al cimiento (F_t) sólo si $r < \sqrt{2}$. Por encima de este valor, la adición de amortiguamiento incrementa la fuerza transmitida.
4. Si la velocidad de la máquina (frecuencia forzada) varía, debemos comprometernos en seleccionar la cantidad de amortiguamiento que minimice la fuerza transmitida. La cantidad de amortiguamiento debe ser suficiente para limitar la amplitud X y la fuerza transmitida F_t mientras se pasa por la resonancia, pero no tanto como para incrementar innecesariamente la fuerza transmitida a la velocidad de operación.

Reducción del movimiento vibratorio de la masa. En muchas aplicaciones se requiere aislamiento para reducir el movimiento de la masa (máquina) bajo la fuerza aplicada. La amplitud de desplazamiento de la masa m originada por la fuerza $F(t)$, dada por la ecuación (8.90), se expresa como:

$$T_d = \frac{X}{\delta_{est}} = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{8.96}$$

donde $\frac{X}{\delta_{est}}$ se llama, en el presente contexto, *transmisibilidad de desplazamiento* o *relación de amplitud* e indica la relación de amplitud de la masa X, a la deflexión estática bajo la fuerza constante F_0, $\delta_{est} = \frac{F_0}{k}$. En la figura 8.22 se muestra la variación de la transmisibilidad de desplazamiento con

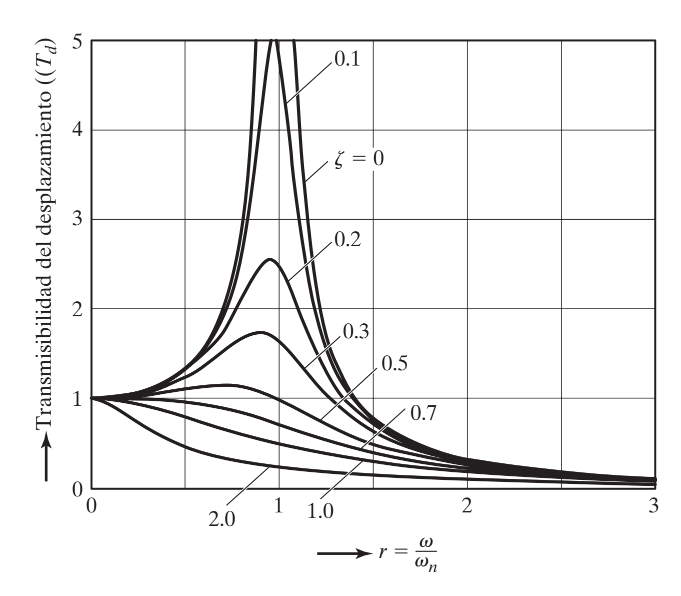


Figura 8.22 Variación de la transmisibilidad del desplazamiento (T_d) con r.

la relación de frecuencia r para varios valores de la relación de amortiguamiento ζ. A partir de la figura 8.22 se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. La transmisibilidad del desplazamiento se incrementa a un valor máximo de (ecuación (3.33)):

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{8.97}$$

La ecuación (8.97) muestra que, con valores pequeños de la relación de amortiguamiento ζ, la transmisibilidad del desplazamiento (o la amplitud de la masa) será máxima en $r \approx 1$ o $\omega \approx \omega_n$. Por lo tanto, en la práctica se tiene que evitar el valor de $r \approx 1$. En la mayoría de los casos, la frecuencia de excitación ω es fija y por consiguiente podemos evitar que $r \approx 1$ modificando el valor de la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ lo cual se puede lograr cambiando el valor ya sea de m y k o de ambos.

2. La amplitud de la masa, X, tiende a cero a medida que r se incrementa a un valor grande. La razón es que con valores grandes de r la fuerza aplicada $F(t)$ varía muy rápido y la inercia de la masa evita que siga a la fuerza fluctuante.

Ejemplo 8.4 Soporte de resorte de un ventilador

Un ventilador extractor, que gira a 1000 rpm, tiene que estar soportado por cuatro resortes, cada uno de rigidez K. Si sólo el 10 por ciento de la fuerza desbalanceada del ventilador se tiene que transmitir a la base, ¿cuál deberá ser el valor de K? Suponga que la masa del ventilador extractor es de 40 kg.

Solución: Como la transmisibilidad tiene que ser de 0.1, tenemos, de acuerdo con la ecuación (8.94),

$$0.1 = \left[\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]^{1/2} \tag{E.1}$$

donde la frecuencia forzada está dada por

$$\omega = \frac{1000 \times 2\pi}{60} = 104.72 \text{ rad/s} \tag{E.2}$$

y la frecuencia natural del sistema por

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{4K}{40}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{K}}{3.1623} \tag{E.3}$$

Suponiendo que la relación de amortiguamiento es $\zeta = 0$, con la ecuación (E.1) obtenemos,

$$0.1 = \frac{\pm 1}{\left\{1 - \left(\frac{104.72 \times 3.1623}{\sqrt{K}}\right)^2\right\}} \tag{E.4}$$

Para evitar valores imaginarios, tenemos que considerar el signo negativo en el lado derecho de la ecuación (E.4). Esto lleva a

$$\frac{331.1561}{\sqrt{K}} = 3.3166$$

o

$$K = 9969.6365 \text{ N/m}$$

■

Ejemplo 8.5 Diseño de un aislador no amortiguado

Una masa de 50 kg se somete a la fuerza armónica $F(t) = 1\,000 \cos 120t$ N. Diseñe un aislador no amortiguado de modo que la fuerza transmitida a la masa del sistema no exceda 5% de la fuerza aplicada. Incluso, halle la amplitud de desplazamiento de la masa del sistema con aislamiento.

Solución: Si hacemos el valor de transmisibilidad de fuerza igual a 0.05 y utilizando $\zeta = 0$, la ecuación (8.95) da

$$r^2 \approx \frac{1 + T_f}{T_f} = \frac{1 + 0.05}{0.05} = 21 \tag{E.1}$$

Utilizando la definición de r, junto con los valores de $m = 50$ kg y $\omega = 120$ rad/s, la ecuación (E.1) produce

$$r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{\omega^2 m}{k}$$

o

$$k = \frac{\omega^2 m}{r^2} = \frac{(120^2)(50)}{21} = 34.2857 \times 10^3 \text{ N/m} \tag{E.2}$$

La amplitud de desplazamiento de la masa del sistema con aislamiento se determina con la ecuación (8.96), con $\zeta = 0$:

$$X = \frac{F_0}{k}\frac{1}{(r^2 - 1)} = \frac{1000}{34.2857 \times 10^3}\frac{1}{(21 - 1)} = 1.4583 \times 10^{-3}\text{ m} \tag{E.3}$$

■

Gráfica de diseño para aislamiento:

La ecuación (8.94) proporciona la fuerza transmitida a la base o suelo por una fuente de vibración (masa vibratoria) y se muestra en la figura 8.21 como una gráfica entre $T_f = F_T/F_0$ y $r = \omega/\omega_n$. Como ya antes se señaló, el aislamiento de vibración, reducción de la fuerza transmitida al suelo, se puede lograr con $r > \sqrt{2}$. En la región $r > \sqrt{2}$, se desean valores bajos de amortiguamiento para un aislamiento más efectivo. Con valores grandes de r y valores bajos de ζ el término $(2\zeta r)^2$ se vuelve muy pequeño y se puede omitir en la ecuación (8.94) para simplificar. Por lo tanto, la ecuación (8.94) se puede escribir como se muestra en la ecuación (8.95) para $r > \sqrt{2}$ y ζ pequeño.

Definiendo la frecuencia natural de vibración del sistema no amortiguado como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{est}}}} \tag{8.98}$$

y la frecuencia de excitación ω como

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \tag{8.99}$$

donde δ_{est} es la deflexión estática del resorte y N es la frecuencia en ciclos por minuto o revoluciones por minuto (rpm) de máquinas rotatorias como motores eléctricos y turbinas, las ecuaciones (8.95) a (8.99) se pueden combinar para obtener

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi N}{60}\sqrt{\frac{\delta_{\text{est}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 - R}{1 - R}} \tag{8.100}$$

donde $R = 1 - T_f$ se utiliza para indicar la calidad del aislador y denota el porcentaje de reducción logrado de la fuerza transmitida. La ecuación (8.100) se reescribe como

$$N = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{est}}}\left(\frac{2 - R}{1 - R}\right)} = 29.9092\sqrt{\frac{2 - R}{\delta_{\text{est}}(1 - R)}} \tag{8 .101}$$

Se puede utilizar la ecuación (8.101) para generar la gráfica entre log N y log δ_{est} como una serie de líneas rectas correspondientes a diferentes valores de R, como se muestra en la figura 8.23. Esta gráfica sirve como gráfica de diseño para seleccionar un resorte adecuado para el aislamiento.

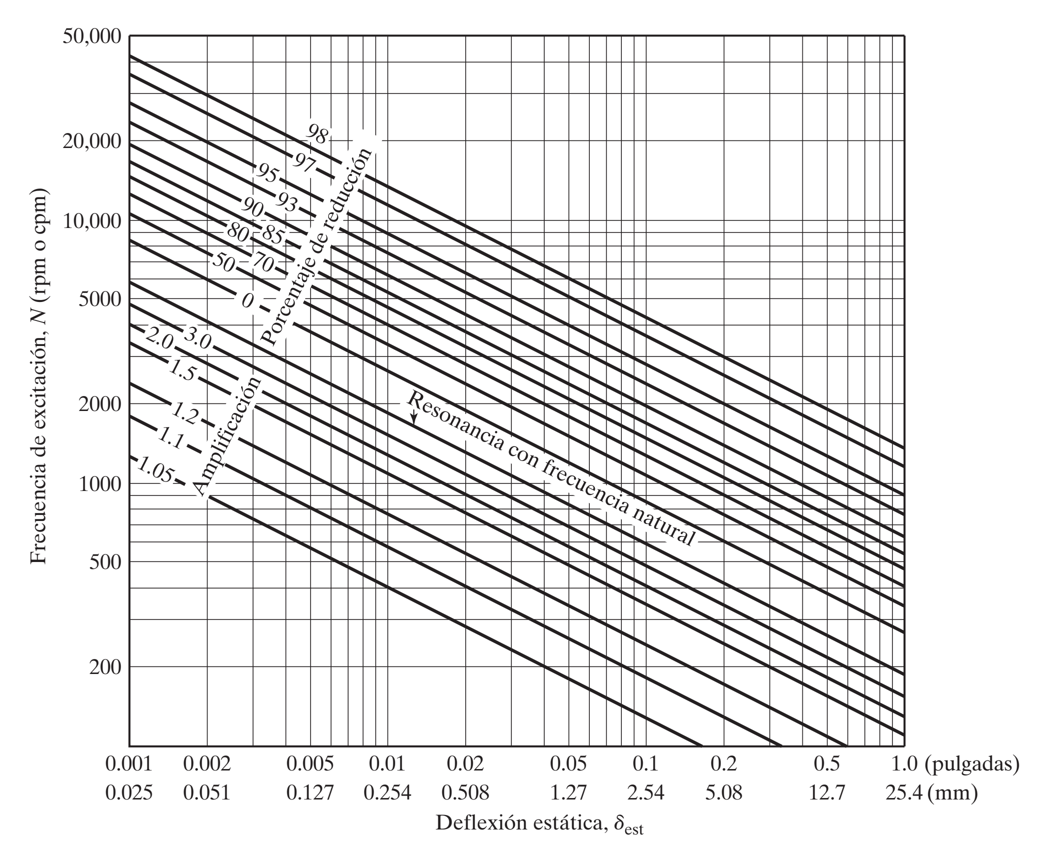


Figura 8.23 Eficiencia de aislamiento.

Ejemplo 8.6 Aislador de una tornamesa estereofónica

Una tornamesa estereofónica, de 1 kg de masa, genera una fuerza de excitación a una frecuencia de 3 Hz. Si está apoyada en una base mediante un soporte de montaje de hule, determine la rigidez del soporte de montaje para reducir 80 por ciento la vibración transmitida a la base.

Solución: Con $N = 3 \times 60 = 180$ cpm y $R = 0.80$, la ecuación (8.105) da

$$180 = 29.9092\sqrt{\frac{2 - 0.80}{\delta_{est}(1 - 0.80)}}$$

o

$$\delta_{est} = 0.1657 \text{ m}$$

La deflexión estática del soporte de montaje se puede expresar en función de su rigidez (k) como

$$\delta_{est} = \frac{mg}{k}$$

la cual da la rigidez del soporte de montaje como

$$0.1657 = \frac{1(9.81)}{k} \qquad \text{o} \qquad k = 59.2179 \text{ N/m}$$

■

Aislamiento de sistemas con desbalance rotatorio:

Una fuente común de fuerza armónica forzada es el desequilibrio en máquinas rotatorias como turbinas, bombas centrífugas y turbogeneradores. El desequilibrio en una máquina rotatoria implica que el eje de rotación no coincida con el centro de masa de todo el sistema. Incluso una excentricidad muy pequeña puede provocar una gran fuerza desbalanceada en máquinas de alta velocidad como sucede en las turbinas. En la figura 8.24 se muestra un sistema rotatorio típico desbalanceado. Aquí se supone que la masa total del sistema es M y se considera que la masa desbalanceada es una masa puntual m localizada en el centro de masa del sistema (con una excentricidad de e respecto del centro de rotación) como se muestra en la figura 8.24. Si la masa desbalanceada gira a una velocidad angular ω y el sistema está restringido para moverse en la dirección vertical, la ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t \equiv me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{8.102}$$

Aplicando $F_0 = me\omega^2$, la transmisibilidad de fuerza del sistema se puede hallar por la ecuación (8.88).

Sin embargo, la presencia de ω^2 en F_0 da como resultado la siguiente ecuación para la transmisibilidad de fuerza (T_f) debido a desbalance rotatorio:

$$T_f = \frac{F_t}{F_0} = \frac{F_t}{me\omega^2} = \frac{F_t}{mer^2\omega_n^2}$$

o

$$\frac{F_t}{me\omega_n^2} = r^2 \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.103}$$

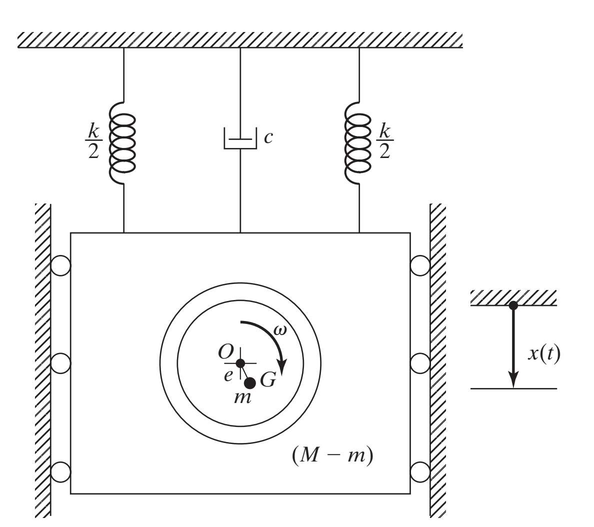


Figura 8.24 Sistema con desbalance rotatorio.

Ejemplo 8.7 Bomba centrífuga con desbalance-espacio u holgura para traqueteo

Una bomba centrífuga, con una masa de 50 kg y velocidad de rotación de 3000 rpm, está montada a la mitad de una viga simplemente apoyada de 100 cm de longitud, 20 cm de ancho y 0.5 cm de espesor. La relación de amortiguamiento del sistema (viga) se puede suponer como $\zeta = 0.05$. La hélice (parte rotatoria) de la bomba tiene una masa de 5 kg con una excentricidad de 1 mm. Si la deflexión máxima de la viga está restringida para que sea menor que el espacio para traqueteo disponible de 3 mm,[6] determine si el sistema de soporte de la bomba es el adecuado.

Solución: La rigidez a flexión o constante de resorte de la viga simplemente apoyada está dada por

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

donde el momento de inercia de la sección transversal de la viga se puede calcular como

$$I = \frac{1}{12}wt^3 = \frac{(20)(0.05^3)}{12} = 0.208333 \text{ cm}^4 = 20.8333 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

Con $E = 207 \times 10^9$ Pa, la constante de resorte de la viga se determina como

$$k = \frac{48(207 \times 10^9)(20.8333 \times 10^{-10})}{(1.0^3)} = 206{,}999.6688 \text{ N/m}$$

Considerando la densidad del acero como 7.85 gramos/cm^3, la masa de la viga (m_b) se determina como

$$m_b = 7.85(100)(20)(0.5) = 7850 \text{ gram} = 7.85 \text{ kg}$$

La masa total del sistema (M) es igual a la masa de la bomba más la masa efectiva de la viga en su centro (igual a $\frac{17}{35}m_b$; vea el problema 2.86):

$$M = m_{\text{bomba}} + \frac{17}{35}m_b = 50 + \frac{17}{35}(7.85) = 53.8128 \text{ kg}$$

La frecuencia natural del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{206999.6688}{53.8128}} = 62.0215 \text{ rad/s}$$

La velocidad del impulsor (rotor) de 3000 rpm dada $\omega = 2\pi(3000)/60 = 314.16$ rad/s. Por lo tanto, la relación de frecuencia (r) se escribe como

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{314.16}{62.0215} = 5.0653; \qquad r^2 = 25.6577$$

[6] El espacio libre disponible que permite que el sistema experimente la deflexión inducida libremente durante vibración se llama *espacio para traqueteo* u *holgura*. Si el espacio para traqueteo es demasiado pequeño como para acomodar la deflexión del sistema, éste experimentará impactos (al golpear la superficie u objeto circundante o cercano) en cada ciclo de vibración.

La amplitud de la función forzada es

$$me\omega^2 = 5(10^{-3})(314.16^2) = 493.4825 \text{ N}$$

Con $\zeta = 0.05$, la amplitud de estado estable de la bomba se determina con la ecuación (8.96) con $me\omega^2$ para F_0 como

$$X = \frac{me\omega^2}{k}\frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{493.4825}{206999.6688}\frac{1}{\sqrt{(1 - 25.6577)^2 + \{2(0.05)(5.0653)\}^2}}$$

$$= \frac{493.4825}{206999.6688}\frac{1}{24.6629} = 9.6662 \times 10^{-5}\, m$$

La deflexión estática de la viga bajo el peso de la bomba se determina como

$$\delta_{\text{bomba}} = \frac{W_{\text{bomba}}}{k} = \frac{(50)(9.81)}{206999.6688} = 236.9569 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Por lo tanto, la deflexión total del sistema es

$$\delta_{\text{total}} = X + \delta_{\text{bomba}} = 9.662 \times 10^{-5} + 236.9569 \times 10^{-5} = 246.6231 \times 10^{-5} \text{ m} = 2.4662 \text{ mm}$$

Esta deflexión es menor que el espacio para traqueteo de 3 mm. Como tal el sistema de soporte de la bomba es adecuado. En el caso de que el valor de δ_{total} exceda el espacio de traqueteo tenemos que rediseñar (modificar) el sistema de soporte. Esto se puede lograr cambiando la constante de resorte (dimensiones) de la viga y/o introduciendo un amortiguador.

■

8.10.2 Sistema de aislamiento de vibración con movimiento de la base

En algunas aplicaciones la base del sistema está sujeta a un movimiento vibratorio. Por ejemplo, la base o cimiento de una máquina como una turbina en una planta eléctrica puede verse sometida a movimiento del suelo durante un sismo. Sin un sistema de aislamiento adecuadamente diseñado, el movimiento de la base transmitido a la masa (turbina) podría provocar daños y fallas de corriente. Asimismo, un instrumento (masa) delicado quizá tenga que protegerse contra una fuerza o choque cuando el paquete que contiene el instrumento se deje caer accidentalmente desde algún punto alto. Además, si el instrumento se tiene que transportar, el vehículo que lo transporta puede experimentar vibración al transitar por una carretera con baches. En este caso, también, se tiene que utilizar aislamiento apropiado para proteger el instrumento contra desplazamiento excesivo o fuerza transmitida por el movimiento de la base.

Para un sistema de un solo grado de libertad con excitación de la base, como el que se muestra en la figura 8.19(b), el análisis se presentó en la sección 3.6. Cuando la base del sistema se somete a un movimiento armónico, $y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$, la ecuación (3.75) proporciona la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{8.104}$$

donde $z = x - y$ indica el desplazamiento de la masa con respecto a la base. Si el movimiento de la base es armónico, entonces el movimiento de la masa también será armónico. Por consiguiente la transmisibilidad del desplazamiento, $T_d = \frac{X}{Y}$, la da la ecuación (3.68):

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left\{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right\}^{1/2} \tag{8.105}$$

donde X y Y indican las amplitudes de desplazamiento de la masa y la base, respectivamente, y la expresión del lado derecho es la misma que aparece en la ecuación (8.94). Observe que la ecuación (8.105) también es igual a la relación de la aceleración estado estable máxima de la masa y la base. La variación de la transmisibilidad del desplazamiento con la relación de frecuencia (r) a diferentes valores de la relación de amortiguamiento (ζ) se muestra en la figura 8.25. Se pueden hacer las siguientes observaciones con base en la figura 8.25:

1. Para un sistema no amortiguado, la transmisibilidad del desplazamiento tiende a infinito en resonancia ($r = 1$). Por lo tanto, el aislador no amortiguado (rigidez) se tiene que diseñar para asegurarse de que la frecuencia natural del sistema (ω_n) se aleje de la frecuencia de excitación (ω).
2. Para un sistema amortiguado, la transmisibilidad del desplazamiento (y por consiguiente la amplitud de desplazamiento) alcanza un máximo para relaciones de frecuencia cercano a 1. La amplitud de desplazamiento máxima de la masa puede ser mayor que la amplitud de movimiento de la base, es decir, el movimiento de la base se puede amplificar por un factor grande.
3. La transmisibilidad del desplazamiento se aproxima a 1 con valores pequeños de la relación de frecuencia (r) y es exactamente igual a 1 en $r = \sqrt{2}$.
4. La amplitud de desplazamiento es mayor que 1 para $r < \sqrt{2}$ y menor que 1 para $r > \sqrt{2}$. Observe que una relación de amortiguamiento pequeña corresponde a una T_d mayor para $r < \sqrt{2}$ y T_d menor para $r > \sqrt{2}$. Por lo tanto, si el amortiguamiento del sistema no se puede modificar, se puede cambiar la frecuencia natural del sistema (rigidez) para lograr un valor de $r > \sqrt{2}$.

Si F_t indica la magnitud de la fuerza transmitida a la masa por el resorte y el amortiguador, la ecuación (3.74) produce la transmisibilidad de la fuerza (T_f) del sistema:

$$T_f = \frac{F_t}{kY} = r^2 \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.106}$$

donde kY se utiliza para que la transmisibilidad de fuerza no tenga unidades. Observe que una vez que la transmisibilidad de desplazamiento, T_d, o la amplitud de desplazamiento (X) de la masa se

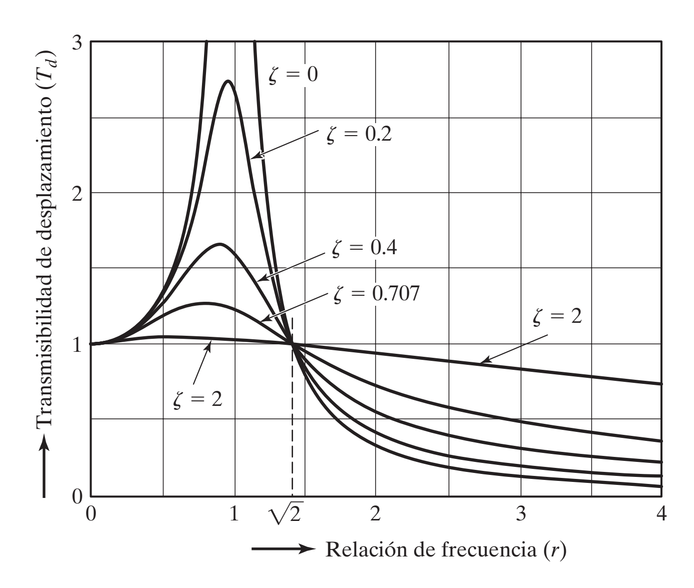


Figura 8.25 Variación de T_d con r (con movimiento de la base).

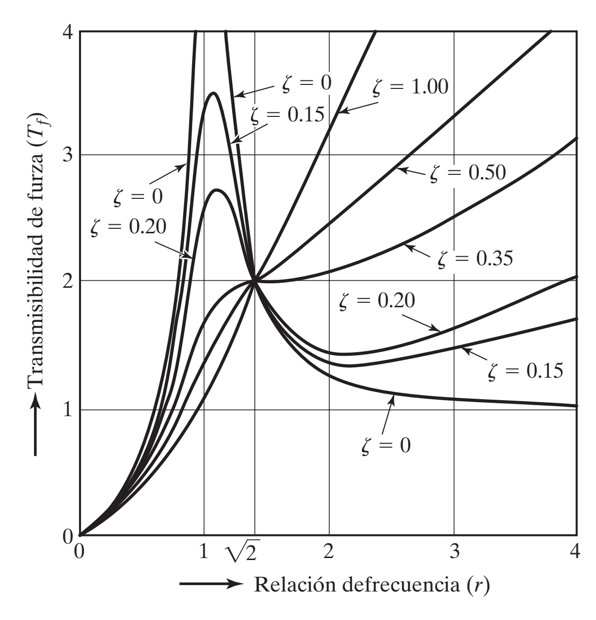


Figura 8.26 Variación de T_f con r (con movimiento de la base).

calcula aplicando la ecuación (8.105), la fuerza F_t transmitida a la masa se determina aprovechando la relación

$$\frac{F_t}{kY} = r^2 \frac{X}{Y} \qquad \text{o} \qquad F_t = kr^2 X \tag{8.107}$$

La variación de la transmisibilidad de fuerza con la relación de frecuencia (r) para diferentes valores de la relación de amortiguamiento (ζ) se muestra en la figura 8.26. A partir de esta figura se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. La transmisibilidad de fuerza (T_f) será 2 a la relación de frecuencia $r = \sqrt{2}$ para todos los valores de la relación de amortiguamiento (ζ).
2. Para $r > \sqrt{2}$, una relación de amortiguamiento baja corresponde a un valor bajo de transmisibilidad de fuerza.
3. Para $r > \sqrt{2}$, para cualquier valor específico de la relación de amortiguamiento, la transmisibilidad de fuerza se incrementa con r. Este comportamiento se opone al de la transmisibilidad de desplazamiento.
4. La transmisibilidad de fuerza se acerca a cero con valores pequeños de la relación de frecuencia r y alcanza un máximo con valores de r cercanos a 1.

Ejemplo 8.8 Aislamiento contra vibración de la base

Hay que aislar un sistema vibratorio de su base vibratoria. Encuentre la relación de amortiguamiento requerida que el aislador debe alcanzar para limitar la transmisibilidad de desplazamiento a $T_d = 4$. Suponga que el sistema tiene un solo grado de libertad.

Solución: Al establecer $\omega = \omega_n$, la ecuación (8.105) nos da

$$T_d = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta)^2}}{2\zeta}$$

o

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{T_d^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{15}} = 0.1291$$

■

Ejemplo 8.9 Diseño de aislamiento para una máquina de precisión con movimiento de la base

Una máquina de precisión utilizada para fabricar circuitos integrados, de 50 kg de masa, se coloca sobre un banco de trabajo (como base). La vibración del suelo transmitida por un motor de combustión interna cercano hace que la base (las cuatro esquinas del banco) vibre a una frecuencia de 1800 rpm. Resortes helicoidales, con una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.01$ y una relación de carga bilineal (P) a la deflexión (x) dada por

$$P = \begin{cases} 50{,}000x; & 0 \leq x \leq 8 \times 10^{-3} \\ 10^5 x - 4 \times 10^5; & 8 \times 10^{-3} \leq x \leq 13 \times 10^{-3} \end{cases} \tag{E.1}$$

(P en newtons y x en metros) están disponibles para usarse como aisladores en las cuatro esquinas de la base. Si no se debe transmitir más de 10% de la vibración de la base a la máquina de precisión, determine un método de lograr el aislamiento.

Solución: Como se requiere que la transmisibilidad de desplazamiento sea 0.1, la ecuación (8.105), para $\zeta =$ 0.01, da

$$T_d = \frac{X}{Y} = 0.1 = \sqrt{\frac{1 + \{2(0.01)r\}^2}{(1 - r^2)^2 + \{2(0.01)r\}^2}} \tag{E.2}$$

La simplificación de la ecuación (E.2) proporciona una ecuación cuadrática en r^2 como

$$r^4 - 2.0396r^2 - 99 = 0 \tag{E.3}$$

La solución de la ecuación (E.3) resulta

$$r^2 = 11.0218, -8.9822$$

la cual muestra el valor positivo de r como 3.3199. Utilizando la frecuencia de excitación de

$$\omega = \frac{2\pi(1800)}{60} = 188.496 \text{ rad/s}$$

y la relación de frecuencia $r = 3.3199$, la frecuencia natural requerida del sistema se puede determinar como

$$r = 3.3199 = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{188.496}{\omega_n} \tag{E.4}$$

La ecuación (E.4) produce $\omega_n = 56.7776$ rad/s.

Suponemos que en cada esquina de la base se instala un resorte (en las cuatro esquinas del banco). Debido a que la deflexión esperada de los resortes se desconoce, entonces también la rigidez correcta de los resortes (fuera de los dos valores posibles) se desconoce. Por consiguiente, utilizamos la relación (vea la ecuación (2.28)):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{est}}}} \quad \text{o} \quad 56.7776 = \sqrt{\frac{9.81}{\delta_{\text{est}}}} \tag{E.5}$$

para hallar la deflexión estática del sistema (δ_{est}) como

$$\delta_{\text{est}} = \frac{9.81}{56.7776^2} = 3.0431 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Dado que los cuatro resortes experimentan δ_{est}, la carga estática que actúa en cada resorte se determina por la ecuación (E.1) como

$$\text{P} = 50000(3.0431 \times 10^{-3}) = 152.155 \text{ N}$$

La carga total sobre los cuatro resortes es $4 \times 152.155 = 608.62$ N. Como el peso de la máquina es de 50 kg $= 50(9.81) = 490.5$ N, para obtener la carga total de 608.62 N, tenemos que agregar un peso de $609.62 - 490.50 = 118.12$ N al sistema. Este peso, en la forma de una placa de acero rectangular, se fija en la parte inferior de la máquina, de modo que la masa total vibratoria sea de 62.0408 kg (con un peso de 608.62 N).

■

Ejemplo 8.10 Sistema de aislamiento para un sistema con movimiento de la base

Una tarjeta de circuito impreso (TCI) hecha de un material compuesto de plástico con refuerzo de fibras se utiliza para controlar la computadora de un motor de automóvil. Se fija en el chasis de la computadora, el cual está fijo en el bastidor del automóvil, como se muestra en la figura 8.27(a). El bastidor del automóvil y el chasis de la computadora se someten a vibración producida por el motor cuando éste funciona a 3000 rpm. Si se requiere lograr una transmisibilidad de desplazamiento de no más de 10% en la tarjeta de circuito impreso, diseñe un sistema aislador adecuado entre el chasis de la computadora y el bastidor del automóvil. Suponga que el chasis de la computadora es rígido con una masa de 0.25 kg.

Datos de la tarjeta de circuito impreso: longitud (l): 25 cm, ancho (w): 20 cm, espesor (t): 0.3 cm, masa por unidad de superficie: 0.005 kg/cm^2, módulo de Young (E): 15×10^9 N/m^2, relación de amortiguamiento: 0.01.

Solución: Se supone que la tarjeta de circuito fijo está fija en el chasis de la computadora como una viga en voladizo. Su masa (m_{PCB}) es de $25 \times 20 \times 0.005 = 2.5$ kg. La masa equivalente en el extremo libre de la viga en voladizo es m_b (vea el ejemplo 2.9):

$$m_b = \frac{33}{140} m_{\text{PCB}} = \frac{33}{140}(2.5) = 0.5893 \text{ kg}$$

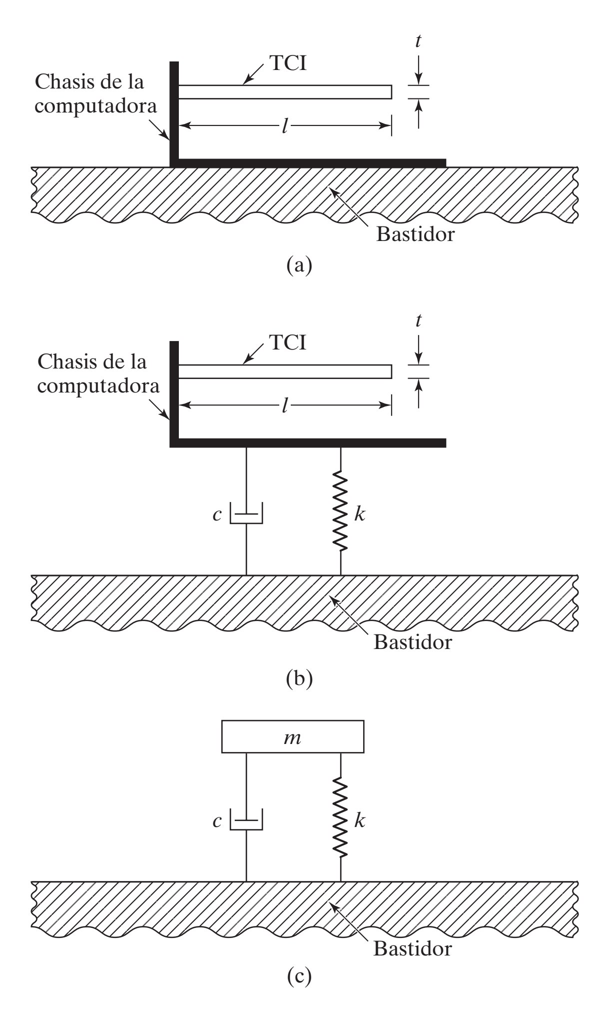


Figura 8.27

Utilizando el momento de inercia de la sección transversal de la TCI

$$I = \frac{1}{12}wt^3 = \frac{1}{12}(0.20)(0.003)^3 = 45 \times 10^{-8}\ \text{m}^4$$

la rigidez de la TCI como viga en voladizo se calcula como

$$k_b = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3(15 \times 10^9)(45 \times 10^{-8})}{(0.25)^3} = 1.296 \times 10^6\ \text{N/m}$$

La frecuencia natural de la TCI está dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_b}{m_b}} = \sqrt{\frac{1.296 \times 10^6}{0.5893}} = 1482.99\ \text{rad/s}$$

La frecuencia de vibración de la base (chasis de la computadora) es

$$\omega = \frac{2\pi(3000)}{60} = 312.66 \text{ rad/s}$$

La relación de frecuencia es

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{312.66}{1482.99} = 0.2108$$

Utilizando la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.01$, la transmisibilidad de desplazamiento se determina con la ecuación (8.105):

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left\{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{1 + [2(0.01)(0.2108)]^2}{(1 - 0.2108^2)^2 + [2(0.01)(0.2108)]^2}\right\}$$

$$= 1.0465 \tag{E.1}$$

Este valor de $T_d = 104.65\%$ excede el valor máximo permisible de 10%. De ahí que diseñemos un aislador (con rigidez k y constante de amortiguamiento c) entre el chasis de la computadora y el bastidor del automóvil como se muestra en la figura 8.27(b). Si modelamos la TCI con rigidez k_b y masa m_b como antes, el uso del aislador hace del problema un sistema de dos grados de libertad. Para simplificar, modelamos la viga en voladizo (TCI) como una masa rígida sin elasticidad. Esto conduce al sistema de un solo grado de libertad que se muestra en la figura 8.27(c), donde la masa equivalente m está dada por

$$m = m_{\text{TCI}} + m_{\text{chasis}} = 2.5 + 0.25 = 2.75 \text{ kg}$$

Suponiendo una relación de amortiguamiento de 0.01, para la transmisibilidad de desplazamiento requerida de 10%, la relación de frecuencia r se determina a partir de la relación

$$T_d = 0.1 = \left\{\frac{1 + [2(0.01)r]^2}{(1 - r^2)^2 + [2(0.01)r]^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{E.2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (E.2) y reordenando los términos, obtenemos

$$r^4 - 2.0396r^2 - 99 = 0 \tag{E.3}$$

La raíz positiva de la ecuación (E.3) es $r^2 = 11.0218$ o $r = 3.3199$. La rigidez del aislador está dada por

$$k = \frac{m\omega^2}{r^2} = \frac{(2.75)(312.66^2)}{11.0218} = 24{,}390.7309 \text{ N/m}$$

La constante de amortiguamiento del aislador se calcula como

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2(0.01)\sqrt{(2.75)(24390.7309)} = 5.1797 \text{ N-s/m}$$

■

8.10.3 Sistema de aislamiento de vibración con cimiento flexible

En muchas situaciones prácticas, la estructura o cimiento al cual está conectado el aislador se mueve cuando la máquina montada sobre él funciona. Por ejemplo, en el caso de una turbina apoyada en el casco de un buque, o un motor montado en el ala de un avión, el área circundante al punto de soporte también se mueve junto con el aislador. En tales casos, el sistema se puede representar como uno de dos grados de libertad. En la figura 8.28, m_1 y m_2 indican las masas de la máquina y la estructura de soporte que se mueve junto con el aislador, respectivamente. Para simplificar, el resorte se representa con un resorte k y se omite el amortiguamiento. Las ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_2 son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= F_0 \cos \omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{8.108}$$

Suponiendo una solución armónica de la forma

$$x_j = X_j \cos \omega t, \qquad j = 1, 2$$

las ecuaciones (8.108) resultan

$$\left.\begin{aligned} X_1(k - m_1\omega^2) - X_2 k &= F_0 \\ -X_1 k + X_2(k - m_2\omega^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.109}$$

Las raíces de la siguiente ecuación ofrecen las frecuencias naturales del sistema

$$\begin{vmatrix} (k - m_1\omega^2) & -k \\ -k & (k - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{8.110}$$

Las raíces de la ecuación (8.110) son

$$\omega_1^2 = 0, \qquad \omega_2^2 = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2} \tag{8.111}$$

El valor de $\omega_i = 0$ corresponde a movimiento de cuerpo rígido, puesto que el sistema no está restringido. En el estado estable, la ecuación (8.109) dicta las amplitudes de m_1 y m_2, cuya solución es

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(k - m_2\omega^2)F_0}{[(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2]} \\ X_2 &= \frac{kF_0}{[(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2]} \end{aligned} \tag{8.112}$$

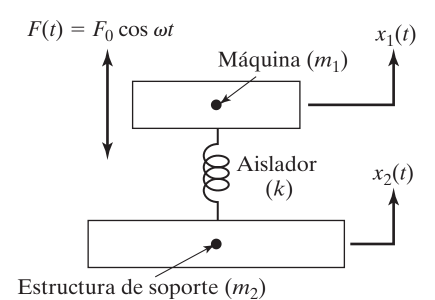


Figura 8.28 Máquina con aislador sobre un cimiento flexible.

La amplitud de $m_2\ddot{x}_2$ proporciona la fuerza (F_t) transmitida a la estructura de soporte:

$$F_t = -m_2\omega^2 X_2 = \frac{-m_2 k\omega^2 F_0}{[(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2]} \tag{8.113}$$

La transmisibilidad del aislador (T_f) está dada por

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{F_t}{F_0} \\ &= \frac{-m_2 k\omega^2}{[(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2]} \\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_2} - \dfrac{m_1\omega^2}{k}\right)} \\ &= \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}}\right) \end{aligned} \tag{8.114}$$

donde ω_2 es la frecuencia natural del sistema dada por la ecuación (8.111). La ecuación (8.114) indica, como en el caso de un aislador sobre una base rígida, que la fuerza transmitida al cimiento se reduce a medida que la frecuencia natural del sistema ω_2 se reduce.

8.10.4 Sistema de aislamiento de vibración con cimiento parcialmente flexible

La figura 8.29 muestra una situación más real en la cual la base del aislador, en lugar de ser del todo rígida o flexible es parcialmente flexible [8.34]. Podemos definir la impedancia mecánica de la estructura de la base, $Z(\omega)$, como la fuerza a la frecuencia ω requerida para producir un desplazamiento unitario de la base (como en la sección 3.5):

$$Z(\omega) = \frac{\text{Fuerza aplicada de frecuencia } \omega}{\text{Desplazamiento}}$$

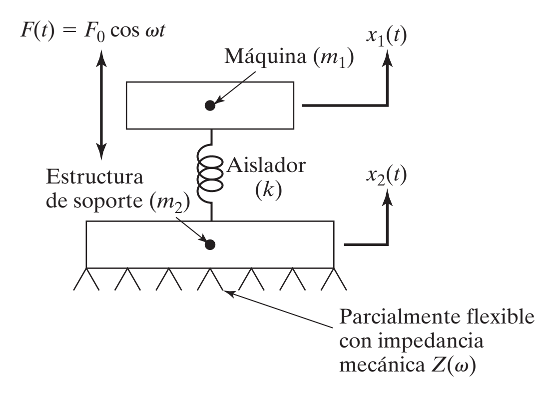


Figura 8.29 Máquina con aislador sobre un cimiento parcialmente flexible.

Las ecuaciones de movimiento son[7]

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \tag{8.115}$$

$$k(x_2 - x_1) = -x_2 Z(\omega) \tag{8.116}$$

Sustituyendo la solución armónica

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t, \qquad j = 1, 2 \tag{8.117}$$

en las ecuaciones (8.115) y (8.116), X_1 y X_2 se obtienen como en el caso previo:

$$X_1 = \frac{[k + Z(\omega)]X_2}{k} = \frac{[k + Z(\omega)]F_0}{[Z(\omega)\,(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2]}$$

$$X_2 = \frac{kF_0}{[Z(\omega)(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2]} \tag{8.118}$$

La amplitud de la fuerza transmitida es

$$F_t = X_2 Z(\omega) = \frac{kZ(\omega)F_0}{[Z(\omega)\,(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2]} \tag{8.119}$$

y la transmisibilidad del aislador es

$$T_f = \frac{F_t}{F_0} = \frac{kZ(\omega)}{[Z(\omega)\,(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2]} \tag{8.120}$$

En la práctica, la impedancia mecánica $Z(\omega)$ depende de la naturaleza de la estructura de la base. Se puede determinar experimentalmente midiendo el desplazamiento producido por un vibrador que aplica una fuerza armónica a la base. En algunos casos, por ejemplo si un aislador está descansando sobre una plataforma de concreto, la impedancia mecánica a cualquier frecuencia ω se determina en función del modelo de resorte-masa-amortiguador hidráulico del suelo.

8.10.5 Aislamiento contra choques

Como ya se mencionó, una carga de choque implica la aplicación de una fuerza durante una corta duración, por lo común durante un periodo menor que un periodo natural del sistema. Las fuerzas implicadas en martillos de forja, prensas punzonadoras, ondas expansivas y explosiones son ejemplos de cargas de choque. El aislamiento contra choques se puede definir como un procedimiento mediante el cual los efectos indeseables de un choque se reducen. Observamos que el aislamiento contra vibración producida por una perturbación armónica (impacto) ocurre con la relación de frecuencia $r > \sqrt{2}$ y un valor pequeño de la relación de amortiguamiento (ζ) que conduce a un mejor aislamiento. Por otra parte, el aislamiento contra choque debe ocurrir dentro de un amplio rango de frecuencias, en general con valores grandes de ζ. Por lo tanto, un buen diseño de aislamiento contra

[7] Si la base es completamente flexible con una masa no restringida m_2, $Z(\omega) = -\omega^2 m_2$, y las ecuaciones (8.115) a (8.117) conducen a la ecuación (8.109).

vibración resulta ser un diseño de aislamiento contra choque deficiente y viceversa. A pesar de las diferencias, los principios básicos implicados en el aislamiento contra choques son semejantes a los del aislamiento contra vibración; sin embargo, las ecuaciones son diferentes debido a la naturaleza transitoria del choque.

Una carga de choque de corta duración $F(t)$ aplicada durante un periodo T, se puede tratar como un impulso $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \int_0^T F(t)\,dt \tag{8.121}$$

Como este impulso actúa en la masa m, se puede aplicar el principio de impulso-cantidad de movimiento para determinar la velocidad impartida a la masa (v) como

$$v = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{8.122}$$

Ésta indica que la aplicación de una carga de choque de corta duración se puede considerar equivalente a impartir una velocidad inicial al sistema. Por lo tanto, la respuesta del sistema sometido a una carga de choque se puede determinar como la solución de vibración libre con una velocidad inicial especificada. Suponiendo las condiciones iniciales como $x(0) = x_0 = 0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v$, la solución de vibración libre de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad (desplazamiento de la masa m) se puede hallar a partir de la ecuación (2.72) como

$$x(t) = \frac{v e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \tag{8.123}$$

donde $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n$ es la frecuencia de vibraciones amortiguadas. La fuerza transmitida al cimiento, $F_t(t)$, debida al resorte y el amortiguador está dada por

$$F_t(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \tag{8.124}$$

Utilizando la ecuación (8.123), $F_t(t)$ se expresa como

$$F_t(t) = \frac{v}{\omega_d}\sqrt{(k - c\zeta\omega_n)^2 + (c\omega_d)^2}\, e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \tag{8.125}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega_d}{k - c\zeta\omega_n}\right) \tag{8.126}$$

Se pueden utilizar las ecuaciones (8.125) y (8.126) para determinar el valor máximo de la fuerza transmitida al cimiento.

Para cargas de choque de larga duración, la fuerza máxima transmitida puede ocurrir mientras se está aplicando el choque. En tales casos se puede utilizar el espectro del choque, analizado en la sección 4.6, para determinar la fuerza máxima transmitida al cimiento.

Los siguientes ejemplos ilustran diferentes métodos que se pueden utilizar para el diseño de aisladores de choque.

Ejemplo 8.11 Aislamiento en situación de choque

Un instrumento electrónico de 20 kg de masa se somete a un choque en la forma de una velocidad gradual de 2 m/s. Si los valores de deflexión máximos permisibles (debido al límite de holgura) y aceleración se especifican como 20 mm y 25 g, respectivamente, determine la constante de resorte de un aislador de choque no amortiguado.

Solución: El instrumento electrónico soportado por el resorte se puede considerar como un sistema no amortiguado sujeto a movimiento de la base (en la forma de velocidad gradual). La masa vibra a la frecuencia natural del sistema con las magnitudes de la velocidad y aceleración dadas por

$$\dot{x}_{\text{máx}} = X\omega_n \tag{E.1}$$

$$\ddot{x}_{\text{máx}} = -X\omega_n^2 \tag{E.2}$$

donde X es la amplitud de desplazamiento de la masa. Como el valor máximo de la velocidad (gradual) se especifica como 2 m/s y el valor permisible máximo de X es de 0.02 m, la ecuación (E.1) produce

$$X = \frac{\dot{x}_{\text{máx}}}{\omega_n} < 0.02 \qquad \text{o} \qquad \omega_n > \frac{\dot{x}_{\text{máx}}}{X} = \frac{2}{0.02} = 100 \text{ rad/s} \tag{E.3}$$

Asimismo, con el valor especificado máximo de $\ddot{x}_{\text{máx}}$ como 25 g, la ecuación (E.2) ofrece

$$X\omega_n^2 \leq 25\,(9.81) = 245.25 \text{ m/s}^2 \qquad \text{o} \qquad \omega_n \leq \sqrt{\frac{\ddot{x}_{\text{máx}}}{X}} = \sqrt{\frac{245.25}{0.02}} = 110.7362 \text{ rad/s} \tag{E.4}$$

Las ecuaciones (E.3) y (E.4) proporcionan 100 rad/s $\leq \omega_n \leq$ 110.7362 rad/s. Seleccionando el valor de ω_n a la mitad del rango permisible como 105.3681, la rigidez del resorte (aislador) se puede encontrar como

$$k = m\omega_n^2 = 20\,(105.3681)^2 = 2.2205 \times 10^5 \text{ N/m} \tag{E.5}$$

■

Ejemplo 8.12 Aislamiento bajo carga gradual

Un sensible instrumento electrónico de 100 kg de masa está soportado por resortes y empacado para envío. Durante el envío, el empaque se deja caer desde una altura que aplica una carga de choque de intensidad F_0 al instrumento, como se muestra en la figura 8.30(a). Determine la rigidez del resorte utilizado en el empaque si se requiere que la deflexión máxima del instrumento sea menor que 2 mm. El espectro de respuesta de la carga de choque se muestra en la figura 8.30(b) con $F_0 = 1\,000$ N y $t_0 = 0.1$ s.

Solución: El espectro de respuesta, que indica la respuesta máxima de un sistema de un solo grado de libertad no amortiguado sujeto al choque dado, está definido por

$$\frac{x_{\text{máx}}k}{F_0} = 1 + \frac{1}{\omega_n t_0}\sqrt{2\,(1 - \cos 2\omega_n t_0)} \tag{E.1}$$

donde ω_n es la frecuencia natural del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{100}} = 0.1\sqrt{k} \tag{E.2}$$

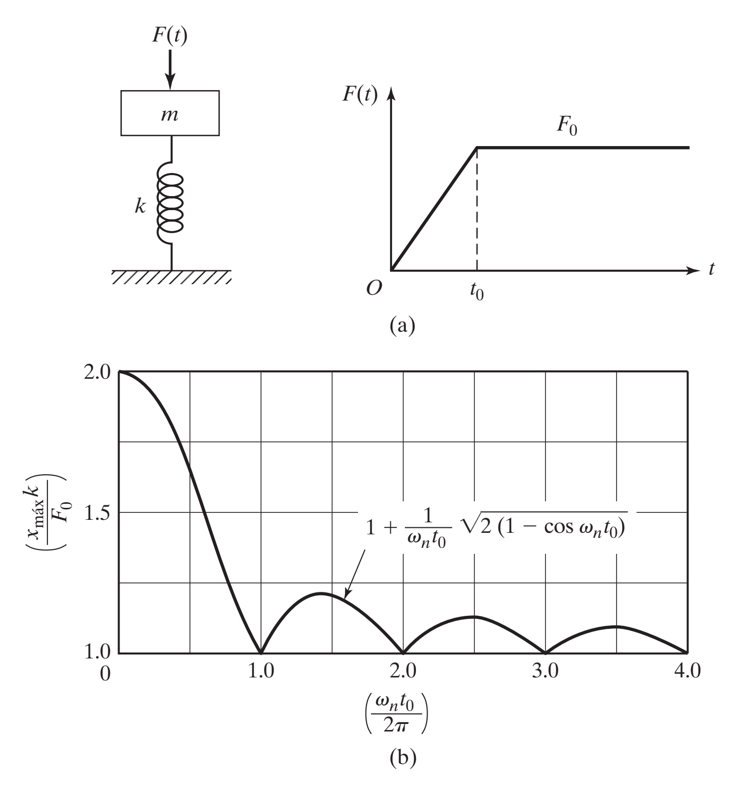


Figura 8.30 Carga de choque contra un instrumento electrónico.

$F_0 = 1000$ N, $t_0 = 0.1$ s y k es la rigidez del resorte utilizado en el empaque. Con los datos conocidos, la ecuación (E.1) se expresa como

$$\frac{x_{\text{máx}}k}{1000} = 1 + \frac{1}{0.1\sqrt{k}\,(0.1)}\sqrt{2\,(1 - \cos 2(0.1\sqrt{k})\,(0.1))} \leq \frac{2}{1000}\left(\frac{k}{1000}\right) \tag{E.3}$$

Utilizando el signo de igualdad, la ecuación (E.3) se reescribe como

$$\frac{100}{\sqrt{k}}\sqrt{2(1 - \cos 0.02\sqrt{k})} - 2 \times 10^{-6}k + 1 = 0 \tag{E.4}$$

La raíz de la ecuación (E.4) proporciona el valor de rigidez deseado como $k = 6.2615 \times 10^5$ N/m. Se puede utilizar el siguiente programa MATLAB para determinar la raíz de la ecuación (E.4):

```
>> x=1000:1:10000000;
>> f='(100/sqrt(x))*sqrt(2*(1-cos(0.02*sqrt(x))))-0.000002*x+1';
>> root=fzero(f,100000)

root =

 6.2615e+005

>>
```

■

8.10.6 Control de vibración activo

Un sistema de aislamiento de vibración se llama activo si utiliza potencia externa para realizar su función. Se compone de un servomecanismo con un sensor, un procesador de señales y un actuador, como se muestra esquemáticamente en la figura 8.31 [8.31-8.33]. Este sistema mantiene una distancia constante (l) entre la masa vibratoria y el plano de referencia. A medida que varía la fuerza $F(t)$ aplicada al sistema (masa), la distancia l tiende a variar. El sensor detecta este cambio de l, y se produce una señal proporcional a la magnitud de la excitación (o respuesta) del cuerpo vibratorio. El procesador de señales envía una señal de comando al actuador basado en la señal enviada por el sensor. El actuador desarrolla un movimiento o fuerza proporcional a la señal de mando. El movimiento o fuerza del actuador controlará el desplazamiento de la base de modo que la distancia l se mantiene al valor constante deseado.

Se cuenta con diferentes tipos de sensores para crear señales de retroalimentación basadas en el desplazamiento, velocidad, aceleración, sacudida, o fuerza. El procesador de señales puede constar de un mecanismo pasivo, como un enlace mecánico, o una red electrónica o fluídica activa capaz de realizar funciones como adición, integración, diferenciación, atenuación o amplificación. El actuador puede ser un sistema mecánico, por ejemplo un mecanismo de cremallera o un mecanismo de articulación de rótula, un sistema fluídico o un sistema generador de fuerza piezoeléctrica o electromagnética. Según los tipos de sensor, procesador de señales y actuador utilizados, un sistema de control de vibración activo se conoce como *electromecánico*, *electrofluídico*, *electromagnético*, *piezoeléctrico* o *fluídico*.

Análisis: Considere un sistema de un solo grado de libertad donde la masa m se somete a una fuerza aplicada $f(t)$ como se muestra en la figura 8.31. Si utilizamos un sistema de control activo para controlar la vibración de la masa m, el actuador se diseñará para que ejerza una fuerza de control $f_c(t)$ de modo que la ecuación de movimiento del sistema se escriba como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = f(t) + f_c(t) \tag{8.127}$$

El sensor (una computadora) mide el desplazamiento x y la velocidad $\dot{x}$ de la masa en tiempo real (de forma continua). La computadora calcula la fuerza de control $f_c(t)$ necesaria para controlar el movimiento y le ordena al actuador que ejerza la fuerza $f_c(t)$ en la masa m.

Por lo común la computadora se programa para que genere la fuerza de control proporcional al desplazamiento $x(t)$ y a la derivada del desplazamiento o velocidad $\dot{x}(t)$ de la masa de modo que

$$f_c(t) = -g_p x - g_d \dot{x} \tag{8.128}$$

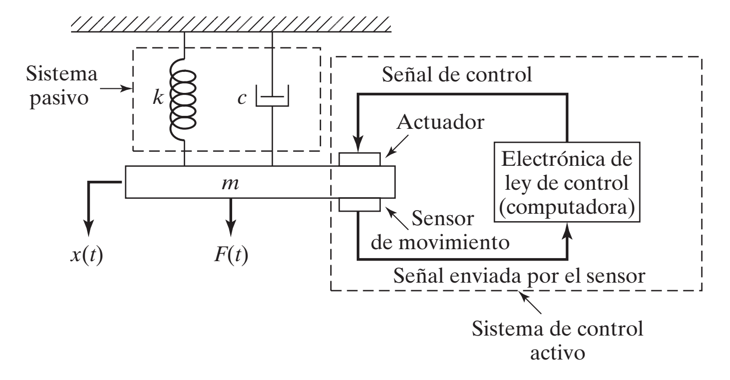


Figura 8.31 Sistema de aislamiento de vibración activo.

donde g_p y g_d son constantes cuyos valores tienen que ser determinados y programados en la computadora por el diseñador. Las constantes g_p y g_d se conocen como ganancias de control, con g_p denotando la ganancia proporcional y g_d indicando la derivada o tasa de ganancia. El algoritmo de control en este caso se conoce como control (PD) proporcional y derivado. Sustituyendo la ecuación (8.128) en la ecuación (8.127), obtenemos

$$m\ddot{x} + (c + g_d)\dot{x} + (k + g_p)x = f(t) \tag{8.129}$$

la cual indica que g_d actúa como amortiguamiento adicional (o artificial) y g_p como rigidez adicional (o artificial). La ecuación (8.129) conocida como ecuación de lazo cerrado, se puede resolver para determinar las características de respuesta del sistema. Por ejemplo, la nueva frecuencia (efectiva) es

$$\omega_n = \left(\frac{k + g_p}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.130}$$

y la nueva relación de amortiguamiento (efectiva) es

$$\zeta = \frac{c + g_d}{2\sqrt{m(k + g_p)}} \tag{8.131}$$

La nueva constante de tiempo (efectiva) del sistema, con $\zeta \leq 1$, es

$$\tau = \frac{2m}{c + g_d} \tag{8.132}$$

Por lo tanto, el funcionamiento del sistema de control de vibración activo se describe como sigue: dados los valores de m, c y k, calcule las ganancias de control g_p y g_d para lograr los valores deseados de ω_n, ζ o τ. En la práctica, la respuesta del sistema se monitorea de forma continua, se realizan los cálculos y se hace que el actuador aplique la fuerza de control f_c a la masa en tiempo real, de modo que la respuesta del sistema quede dentro de los límites establecidos. Observe que las ganancias g_p y g_d pueden ser positivas o negativas según las respuestas medidas y deseadas.

Ejemplo 8.13 Control de vibración de un sistema electrónico de precisión

Se propone controlar la vibración de un sistema electrónico de precisión soportado por una base elástica (sin amortiguamiento) mediante un método pasivo o activo. La masa del sistema es de 15 kg y su frecuencia natural es de 20 rad/s. Se estima que el sistema requiere una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.85$ para controlar la vibración. Suponga que los amortiguadores hidráulicos disponibles pueden proporcionar constantes de amortiguamiento sólo en el rango $0 \leq c \leq 400$ N-s/m.

Solución: Primero, investigamos el uso de un amortiguador hidráulico disponible para controlar la vibración (control pasivo). Por las frecuencias naturales conocidas del sistema, podemos determinar la rigidez de la base elástica como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{o} \quad k = m\omega_n^2 = 15(20)^2 = 6000 \text{ N/m} \tag{E.1}$$

La relación de amortiguamiento requerido del sistema da la constante de amortiguamiento necesaria (c) como

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.85 \quad \text{o} \quad c = 2\zeta\sqrt{km} = 2(0.85)\sqrt{6000(15)} = 510 \text{ N-s/m} \tag{E.2}$$

Como los amortiguadores hidráulicos pueden proporcionar valores constantes de amortiguamiento hasta de 400 N-s/m únicamente, no podemos lograr el control deseado aplicando amortiguamiento pasivo.

Por lo tanto, consideremos un sistema de control activo para crear la cantidad de amortiguamiento requerida en el sistema. Sea la fuerza de control de la forma $f_c = -g_d\dot{x}$, de modo que la relación de amortiguamiento, forma alterna de la ecuación (8.131), se pueda expresar como (con $g_p = 0$):

$$2\zeta\omega_n = \frac{c + g_d}{m} \tag{E.3}$$

Agregando el amortiguamiento hidráulico disponible, con constante de amortiguamiento de 400 N-s/m, la ecuación (E.3) se rescribe como

$$400 + g_d = 2m\zeta\omega_n = 2(15)(0.85)(20) = 510 \text{ N-s/m}$$

o

$$g_d = 110 \text{ N-s/m}$$

Esto da el valor de la constante de amortiguamiento que debe proporcionar el control activo (también conocido como ganancia derivada) como $g_d = 110$ N-s/m.

■

Ejemplo 8.14 Control activo de un sistema con desbalance rotatorio

Un sistema de un solo grado de libertad se compone de una masa (m) = 150 kg, constante de amortiguamiento (c) = 4000 N-s/m y rigidez (k) = 6×10^6 N/m. La masa se somete a una fuerza desbalanceada rotatoria dada por $f(t) = 100 \text{ sen } 60\pi t$ N. Se pueden hacer las siguientes observaciones con base en los datos proporcionados:

(i) La frecuencia natural del sistema $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6(10^6)}{150}} = 200$ rad/s, se aproxima a la frecuencia de la perturbación, $\omega = 60\pi = 188.4955$ rad/s.

(ii) La relación de amortiguamiento es pequeña con un valor de

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{4000}{2\sqrt{[6(10^6)(160)]}} = 0.06667$$

Se desea cambiar la frecuencia natural del sistema a 100 rad/s y la relación de amortiguamiento a 0.5. Como los valores de k y c del sistema no se pueden modificar, se propone utilizar un sistema de control activo. Determine las ganancias de control requeridas para lograr los valores deseados de ω_n y ζ. Encuentre también la magnitud de la respuesta y la fuerza del actuador del sistema en el estado estable.

Solución: Cuando se utiliza un sistema de control activo con ganancias de control g_p y g_d, la frecuencia natural del sistema se expresa como

$$\omega_n = 100 = \sqrt{\frac{6(10^6) + g_p}{150}}$$

o

$$g_p = 150(10^4) - 6(10^6) = -4.5(10^6) \text{ N/m}$$

Este valor implica que la rigidez del sistema se tenga que reducir a 1.5×10^6 N/m. La nueva relación de amortiguamiento del sistema es

$$\zeta = 0.5 = \frac{c + g_d}{2\sqrt{km}} = \frac{4000 + g_d}{2\sqrt{[1.5(10^6)](150)}}$$

o

$$g_d = 15000 - 4000 = 11000 \text{ N-s/m}$$

Este valor implica que se tiene que incrementar el amortiguamiento del sistema a 15 000 N-s/m.

La ecuación de movimiento del sistema activamente controlado se puede escribir como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = f_0 \text{ sen } \omega t \tag{E.1}$$

la cual, en este caso, adopta la forma

$$150\ddot{x} + 15000\dot{x} + 1.5(10^6)x = f(t) = 100 \text{ sen } 60\pi t \tag{E.2}$$

De acuerdo con la ecuación (E.1), la función de transferencia general del sistema se expresa como (vea la sección 3.12)

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{E.3}$$

La magnitud de la respuesta de estado estable del sistema correspondiente a la ecuación (E.3) es (vea la sección 3.13)

$$X = \frac{f_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{E.4}$$

En este caso, $f_0 = 100$ N, $m = 150$ kg, $c = 15000$ N-s/m, $k = 1.5 \times 10^6$ N-s/m y $\omega = 188.4955$ rad/s. Por lo tanto, la ecuación (E.4) da

$$X = \frac{150}{\left[\{1.5(10^6) - 150(188.4955)^2\}^2 + \{15000(188.4955)\}^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{150}{4.7602(10^6)}$$

$$= 31.5113(10^{-6}) \text{ N}$$

La fuerza del actuador (control), F_t, en estado estable se obtiene a partir de la relación

$$\frac{F_t(s)}{F(s)} = \frac{F_t(s)}{X(s)}\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k + cs}{ms^2 + cs + k} \tag{E.5}$$

como

$$\begin{aligned} F_t(i\omega) &= |4.5(10^6) - 11000i\omega|X(i\omega) \\ &= |4.5(10^6) - 11000(188.4955)i|(31.5113(10^{-6})) \\ &= \sqrt{\{4.5(10^6)\}^2 + \{11000(188.4955)\}^2}\,(31.5113(10^{-6})) \\ &= 156.1289 \text{ N} \end{aligned}$$

■

8.11 Absorbedores de vibración

El *absorbedor de vibración*, también llamado *absorbedor de vibración dinámico*, es un dispositivo mecánico que se utiliza para reducir o eliminar la vibración indeseable. Se compone de otra masa y rigidez anexadas a la masa principal (original) que tiene que ser protegida contra vibración. Por lo tanto, la masa principal y la masa del absorbedor anexada constituyen un sistema de dos grados de libertad, de ahí que el absorbedor de vibración tenga dos frecuencias naturales. El absorbedor de vibración se utiliza comúnmente en maquinaria que opera a velocidad constante, porque el absorbedor de vibración se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo sólo dentro de una banda angosta de frecuencias. Algunas aplicaciones comunes del absorbedor de vibración comprenden herramientas reciprocantes como lijadoras, sierras y compactadoras, así como grandes motores de combustión interna reciprocantes los cuales funcionan a velocidad constante (para un consumo mínimo de combustible). En estos sistemas, el absorbedor de vibración ayuda a balancear las fuerzas reciprocantes. Sin un absorbedor de vibración, las fuerzas reciprocantes desbalanceadas podrían hacer que el dispositivo fuera imposible de mantener o controlar. Los absorbedores de vibración también se utilizan en líneas de transmisión de alto voltaje. En este caso, los absorbedores de vibración dinámicos, en la forma de dispositivos tipo mancuerna (figura 8.32), se suspenden de las líneas de transmisión para mitigar los efectos de fatiga de las vibraciones inducidas por el viento.

Una máquina o sistema puede experimentar vibración excesiva si en ella actúa una fuerza cuya frecuencia de excitación casi coincida con una frecuencia natural de la máquina o sistema. En tales casos, la vibración de la máquina o sistema se puede reducir por medio de un *neutralizador de vibración* o *absorbedor de vibración dinámico*, el cual es simplemente otro sistema de resorte-masa. El absorbedor de vibración dinámico se diseña de modo que las frecuencias naturales del sistema

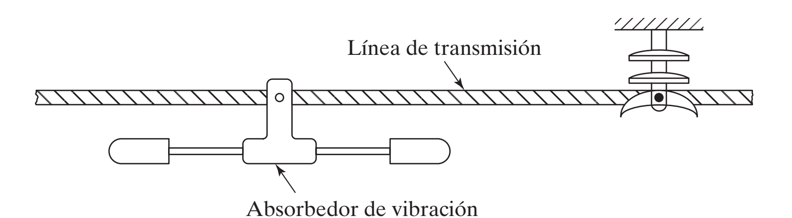


Figura 8.32

resultante se alejen de la frecuencia de excitación. Consideraremos el análisis de un absorbedor de vibración dinámico idealizando la máquina como un sistema de un solo grado de libertad.

8.11.1 Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado

Fijamos una masa auxiliar m_2 en una máquina de m_1 mediante un resorte de rigidez k_2, y el sistema de dos grados de libertad lucirá como se muestra en la figura 8.33. Las ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_2 son

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \text{ sen } \omega t$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{8.133}$$

Suponiendo una solución armónica,

$$x_j(t) = X_j \text{ sen } \omega t, \qquad j = 1, 2 \tag{8.134}$$

obtenemos las amplitudes de estado estable de las masas m_1 y m_2 como

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \tag{8.135}$$

$$X_2 = \frac{k_2F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \tag{8.136}$$

Nos interesa sobre todo reducir la amplitud de la máquina (X_1). Para reducir a cero la amplitud de m_1, el numerador de la ecuación (8.135) debe hacerse igual a cero. Esto entrega

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \tag{8.137}$$

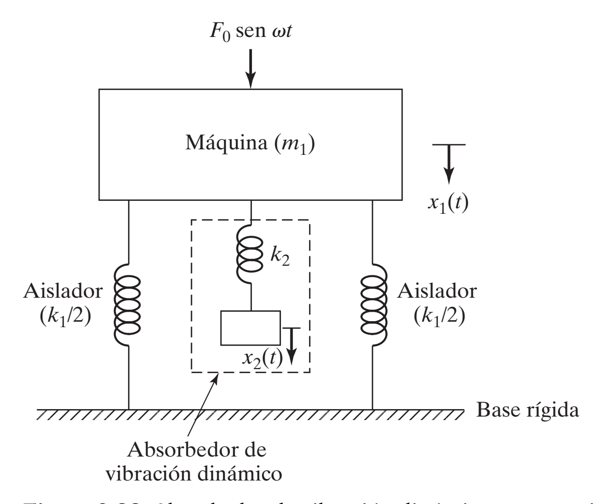


Figura 8.33 Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado.

Si la máquina, antes de la adición del absorbedor de vibración dinámico, opera cerca de su resonancia, $\omega^2 \simeq \omega_1^2 = k_1/m_1$. Por lo tanto, el absorbedor se diseña de modo que

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \tag{8.138}$$

la amplitud de vibración de la máquina, mientras opera a su frecuencia resonante original será cero. Definiendo

$$\delta_{\text{est}} = \frac{F_0}{k_1}, \qquad \omega_1 = \left(\frac{k_1}{m_1}\right)^{1/2}$$

como la frecuencia natural de la máquina o sistema principal, y

$$\omega_2 = \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2} \tag{8.139}$$

ya que la frecuencia natural del absorbedor o sistema auxiliar, las ecuaciones (8.135) y (8.136) se pueden reescribir como

$$\frac{X_1}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \tag{8.140}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \tag{8.141}$$

La figura 8.34 muestra la variación de la amplitud de vibración de la máquina $(X_1/\delta_{\text{est}})$ con su velocidad (ω/ω_1). Los dos picos corresponden a las dos frecuencias naturales del sistema compuesto. Como se vio antes, $X_1 = 0$ en $\omega = \omega_1$. A esta frecuencia, la ecuación (8.141) resulta

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2}\delta_{\text{est}} = -\frac{F_0}{k_2} \tag{8.142}$$

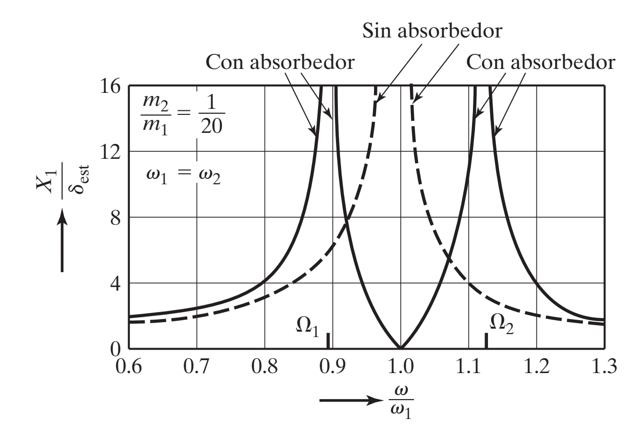


Figura 8.34 Efecto de un absorbedor de vibración no amortiguado en la respuesta de la máquina.

Esto demuestra que la fuerza ejercida por el resorte auxiliar es opuesta a la fuerza impartida ($k_2X_2 = -F_0$) y la neutraliza, y por consiguiente X_1 se reduce a cero. El tamaño del absorbedor de vibración dinámico se determina con las ecuaciones (8.142) y (8.138):

$$k_2X_2 = m_2\omega^2X_2 = -F_0 \tag{8.143}$$

Por tanto, los valores de k_2 y m_2 dependen del valor permisible de X_2.

En la figura 8.34 se ve que el absorbedor de vibración dinámico, al mismo tiempo que elimina vibración a la frecuencia impartida conocida ω, introduce dos frecuencias resonantes Ω_1 y Ω_2, a las cuales la amplitud de la máquina es infinita. En la práctica, la frecuencia de operación ω debe mantenerse por consiguiente alejada de las frecuencias Ω_1 y Ω_2. Los valores de Ω_1 y Ω_2 se determinan igualando el denominador de la ecuación (8.134) a cero. Observando que

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{m_2}\frac{m_2}{m_1}\frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \tag{8.144}$$

e igualando el denominador de la ecuación (8.140) a cero se llega a

$$\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^4\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\left[1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] + 1 = 0 \tag{8.145}$$

Las dos raíces de esta ecuación son

$$\left.\begin{matrix}\left(\dfrac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2\end{matrix}\right\} = \frac{\left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] \mp \left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2 - 4\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}\right\}}{2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \tag{8.146}$$

las cuales se ve que son funciones de (m_2/m_1) y (ω_2/ω_1).

Notas

1. Por la ecuación (8.146) se ve que Ω1 es menor que, y que Ω2 es mayor que, la velocidad de operación (la cual es igual a la frecuencia natural, v1) de la máquina. Por lo tanto, la máquina debe pasar por Ω1 durante el arranque y detención. Esto produce grandes amplitudes.
2. Como el absorbedor dinámico se sintoniza a una frecuencia de excitación (ω), la amplitud de estado estable de la máquina es cero sólo a dicha frecuencia. Si la máquina opera a otras frecuencias o si la fuerza que actúa en la máquina tiene varias frecuencias, entonces la amplitud de vibración de la máquina puede llegar a ser grande.
3. Las variaciones de Ω_1/ω_2 y Ω_2/ω_2 como funciones de la relación de masa m_2/m_1 se muestran en la figura 8.35 para tres valores diferentes de la relación de frecuencia ω_2/ω_1. Se ve que la diferencia entre Ω_1 y Ω_2 se incrementa con valores crecientes de m_2/m_1.

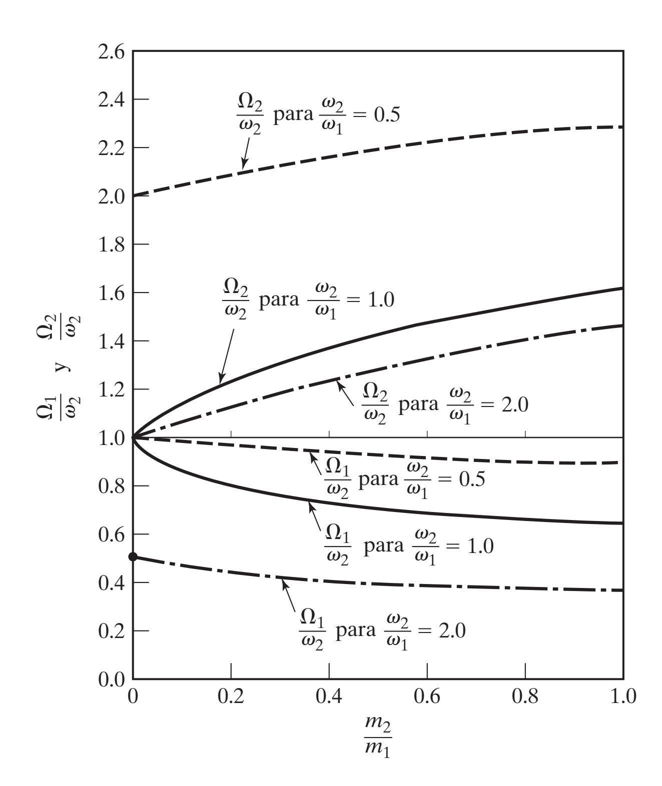


Figura 8.35 Variaciones de Ω_1 y Ω_2 dadas por la ecuación (8.146).

Ejemplo 8.15 Absorbedor de vibración para un motor diesel

Un motor diesel, que pesa 3000 N, está soportado por un pedestal. Se ha observado que el motor induce vibración en el área circundante a través de su pedestal a una velocidad de operación de 6000 rpm. Determine los parámetros del absorbedor de vibración que reducirán la vibración cuando se monte el pedestal. La magnitud de la fuerza de excitación es de 250 N, y la amplitud de movimiento de la masa auxiliar se tiene que limitar a 2 mm.

Solución: La frecuencia de vibración de la máquina es

$$f = \frac{6000}{60} = 100 \text{ Hz} \qquad \text{o} \qquad \omega = 628.32 \text{ rad/s}$$

Como el movimiento del pedestal se tiene que reducir a cero, la amplitud de movimiento de la masa auxiliar debe ser igual y opuesta a la de la fuerza de excitación. Por lo tanto, por la ecuación (8.143), obtenemos

$$|F_0| = m_2 \omega^2 X_2 \tag{E.1}$$

La sustitución de los datos dados resulta

$$250 = m_2\,(628.32)^2(0.002)$$

Por consiguiente, $m_2 = 0.31665$. La rigidez del resorte k_2 se determina por la ecuación (8.138):

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

Por consiguiente, $k_2 = (628.32)^2(0.31665) = 125009$ N/m.

■

Ejemplo 8.16 Absorbedor para un conjunto de motor-generador

El conjunto de motor-generador que se muestra en la figura 8.36 está diseñado para que opere en el rango de velocidad de 2000 a 4000 rpm. Sin embargo, se ve que el conjunto vibra violentamente a una velocidad de 3000 rpm debido a un leve desbalance en el rotor. Se propone utilizar un sistema absorbedor de masa concentrada montado en voladizo para eliminar el problema. Cuando se fija un voladizo que lleva una masa de prueba de 2 kg sintonizado a 3000 rpm en el conjunto, las frecuencias naturales resultantes del sistema son 2500 rpm y 3500 rpm. Diseñe el absorbedor (especificando su masa y rigidez) de modo que las frecuencias naturales queden fuera del rango de velocidad de operación del conjunto de motor-generador.

Solución: Las frecuencias naturales ω_1 del conjunto motor-generador y ω_2 del absorbedor son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{E.1}$$

La ecuación (8.146) proporciona las frecuencias resonantes Ω_1 y Ω_2 del sistema combinado. Como el absorbedor ($m = 2$ kg) está sintonizado, $\omega_1 = \omega_2 = 314.16$ rad/s (correspondiente a 3000 rpm). Utilizando la notación

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \qquad r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2}, \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_2}$$

La ecuación (8.146) se escribe como

$$r_1^2, r_2^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} \tag{E.2}$$

Como se sabe que Ω_1 y Ω_2 son 261.80 rad/s (o 2500 rpm) y 366.52 rad/s (o 3500 rpm), respectivamente, encontramos que

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{261.80}{314.16} = 0.8333$$

$$r_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_2} = \frac{366.52}{314.16} = 1.1667$$

Por consiguiente

$$r_1^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}$$

o

$$\mu = \left(\frac{r_1^4 + 1}{r_1^2}\right) - 2 \tag{E.3}$$

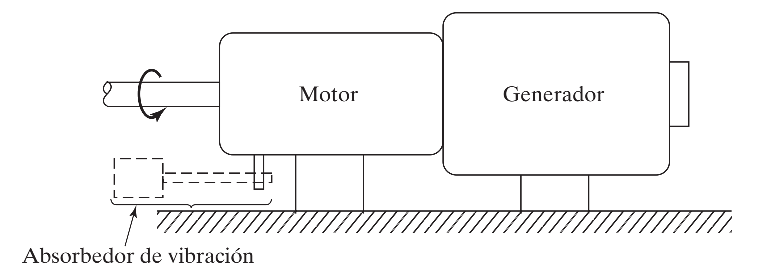


Figura 8.36 Conjunto de motor-generador.

Dado que $r_1 = 0.8333$, la ecuación (E.3) entrega $\mu = m_2/m_1 = 0.1345$ y $m_1 = m_2/0.1345 = 14.8699$ kg. El límite inferior especificado de Ω_1 es 2000 rpm o 209.44 rad/s, y así

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{209.44}{314.16} = 0.6667$$

Con este valor de r_1, la ecuación (E.3) entrega $\mu = m_2/m_1 = 0.6942$ y $m_2 = m_1(0.6942) = 10.3227$ kg. Con estos valores, la segunda frecuencia resonante se puede hallar a partir de

$$r_2^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} = 2.2497$$

la cual arroja $\Omega_2 \simeq 4499.4$ rpm, mayor que el límite superior especificado de 4000 rpm. La rigidez de resorte del absorbedor está dada por

$$k_2 = \omega_2^2 m_2 = (314.16)^2(10.3227) = 1.0188 \times 10^6 \text{ N/m}$$

■

8.11.2 Absorbedor de vibración dinámico amortiguado

El absorbedor de vibración dinámico descrito en la sección anterior elimina el pico de resonancia original en la curva de respuesta de la máquina pero introduce dos nuevos picos. De este modo, la máquina experimenta grandes amplitudes cuando pasa a través del primer pico durante el arranque y detención. La amplitud de la máquina se puede reducir agregando un absorbedor de vibración amortiguado, como se muestra en la figura 8.37. Las ecuaciones de movimiento de las dos masas son

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \text{ sen } \omega t \tag{8.147}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \tag{8.148}$$

Suponiendo que la solución es

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2 \tag{8.149}$$

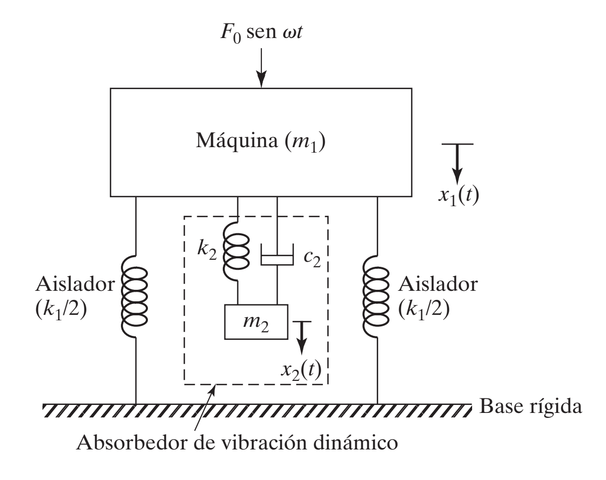


Figura 8.37 Absorbedor de vibración dinámico amortiguado.

se obtiene la solución de estado estable de las ecuaciones (8.147) y (8.148):

$$X_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2 + ic_2\omega)}{[(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - m_2k_2\omega^2] + i\omega c_2(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)} \tag{8.150}$$

$$X_2 = \frac{X_1(k_2 + i\omega c_2)}{(k_2 - m_2\omega^2 + i\omega c_2)} \tag{8.151}$$

Definiendo

$\mu = m_2/m_1$ = Relación de masa = Masa del absorbedor/masa principal

$\delta_{\text{est}} = F_0/k_1$ = Deflexión estática del sistema

$\omega_a^2 = k_2/m_2$ = Cuadrado de la frecuencia natural del absorbedor

$\omega_n^2 = k_1/m_1$ = Cuadrado de la frecuencia natural de la masa principal

$f = \omega_a/\omega_n$ = Relación de frecuencias naturales

$g = \omega/\omega_n$ = Relación de frecuencia forzada

$c_c = 2m_2\omega_n$ = Constante de amortiguamiento crítica

$\zeta = c_2/c_c$ = Relación de amortiguamiento

las magnitudes, X_1 y X_2, se expresan como

$$\frac{X_1}{\delta_{\text{est}}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2}\right]^{1/2} \tag{8.152}$$

y

$$\frac{X_2}{\delta_{\text{est}}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + f^4}{(2\zeta g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2}\right]^{1/2} \tag{8.153}$$

La ecuación (8.152) muestra que la amplitud de vibración de la masa principal es una función de μ, f, g y ζ. La gráfica de

$$\left|\frac{X_1}{\delta_{\text{est}}}\right|$$

contra la relación de frecuencia forzada $g = \omega/\omega_n$, se muestra en la figura 8.38 para $f = 1$ y m $= 1/20$ para algunos valores diferentes de ζ.

Si el amortiguamiento es cero ($c_2 = \zeta = 0$) entonces la resonancia ocurre a las dos frecuencias resonantes no amortiguadas del sistema, un resultado que ya se indicó en la figura 8.34. Cuando el amortiguamiento se hace infinito ($\zeta = \infty$), las dos masas m_1 y m_2 virtualmente se unen entre sí, y el sistema se comporta en esencia como un sistema de un solo grado de libertad con masa de $(m_1 + m_2) = (21/20)\, m$ y rigidez de k_1. En este caso, también la resonancia ocurre con $X_1 \to \infty$ en

$$g = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} = 0.9759$$

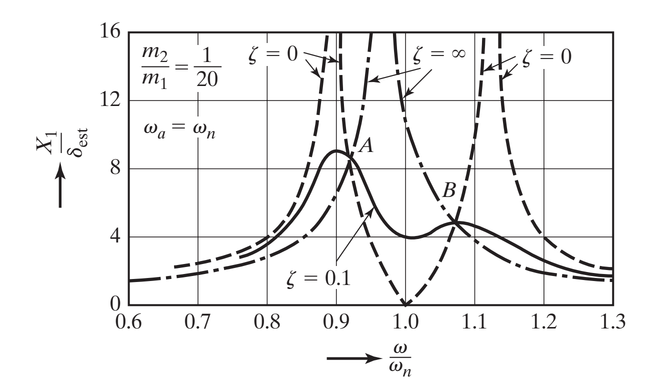


Figura 8.38 Efecto del absorbedor de vibración amortiguado en la respuesta de la máquina.

Por lo tanto, el pico X_1 es infinito para $c_2 = 0$ y también con $c_2 = \infty$. En alguna parte entre estos límites, el pico de X_1 será mínimo.

Absorbedor de vibración óptimamente sintonizado. En la figura 8.38 se ve que todas las curvas se cortan en los puntos A y B independientemente del valor de amortiguamiento. Estos puntos se pueden localizar sustituyendo los casos extremos de $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$ en la ecuación (8.152) e igualando los dos. Esto produce

$$g^4 - 2g^2\left(\frac{1 + f^2 + \mu f^2}{2 + \mu}\right) + \frac{2f^2}{2 + \mu} = 0 \tag{8.154}$$

Las dos raíces de la ecuación (8.154) indican los valores de la relación de frecuencia $g_A = \omega_A/\omega$ y $g_B = \omega_B/\omega$, correspondientes a los puntos A y B. Las ordenadas de A y B se determinan sustituyendo los valores de g_A y g_B, respectivamente, en la ecuación (8.146). Se ha observado que el absorbedor de vibración más eficiente es uno para el cual las ordenadas de los puntos A y B son iguales. Esta condición requiere que [8.35]

$$f = \frac{1}{1 + \mu} \tag{8.155}$$

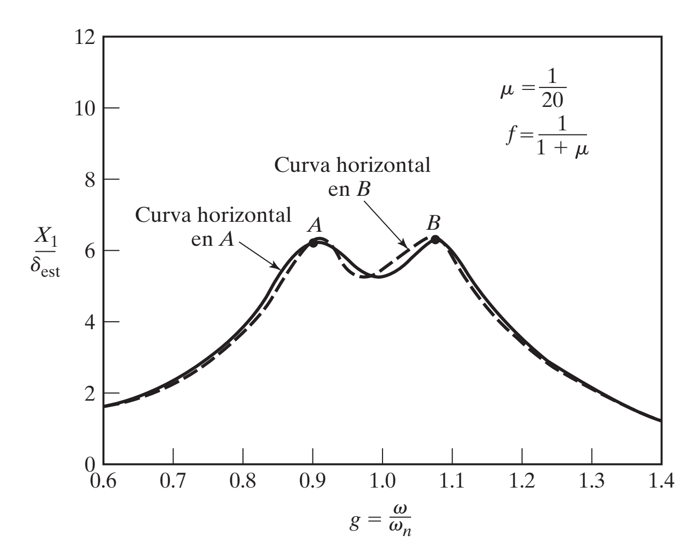


Figura 8.39 Absorbedor de vibración sintonizado.

Un absorbedor que satisface la ecuación (8.155) puede ser llamado correctamente *absorbedor de vibración sintonizado*. Aunque la ecuación (8.155) indica cómo sintonizar un absorbedor, no indica el valor óptimo de la relación de amortiguamiento ζ y el valor correspondiente de X_1/δ_{est}. El valor óptimo de ζ se determina haciendo la curva de respuesta X_1/δ_{est} lo más plana posible en los picos A y B. Esto se logra haciendo la curva horizontal ya sea en A o en B, como se muestra en la figura 8.39. Para esto, primero se sustituye la ecuación (8.155) en la ecuación (8.152) para que la ecuación resultante sea aplicable al caso de sintonización óptima. Entonces la ecuación modificada (8.152) se diferencia con respecto a g para encontrar la pendiente de la curva de X_1/δ_{est}. Al igualar a cero en los puntos A y B, obtenemos

$$\zeta^2 = \frac{\mu\left\{3 - \sqrt{\dfrac{\mu}{\mu + 2}}\right\}}{8(1 + \mu)^3} \qquad \text{para el punto } A \tag{8.156}$$

y

$$\zeta^2 = \frac{\mu\left\{3 + \sqrt{\dfrac{\mu}{\mu + 2}}\right\}}{8(1 + \mu)^3} \qquad \text{para el punto } B \tag{8.157}$$

Un valor promedio conveniente de ζ^2 dado por las ecuaciones (8.156) y (8.157) se utiliza en el diseño de modo que

$$\zeta^2_{\text{óptima}} = \frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3} \tag{8.158}$$

El valor óptimo correspondiente de $\left(\dfrac{X_1}{\delta_{est}}\right)$ se escribe como

$$\left(\frac{X_1}{\delta_{est}}\right)_{\text{óptima}} = \left(\frac{X_1}{\delta_{est}}\right)_{\text{máx}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \tag{8.159}$$

Notas:

1. Por la ecuación (8.153) se ve que la amplitud de la masa del absorbedor (X_2) siempre es mucho mayor que la de la masa principal (X_1). Por lo tanto, el diseño debe ser capaz de aceptar grandes amplitudes de la masa del absorbedor.
2. Como se espera que las amplitudes de m_2 sean grandes, el resorte del absorbedor (k_2) se tiene que diseñar desde un punto de vista de fatiga.
3. La mayoría de los absorbedores de vibración utilizados en aplicaciones prácticas son no amortiguados. Si se agrega amortiguamiento, se frustra el propósito del absorbedor de vibración, el cual es eliminar la vibración indeseable. En un absorbedor de vibración amortiguado, la amplitud de vibración de la masa principal será no cero. Se tiene que agregar amortiguamiento sólo en situaciones en las que la banda de frecuencia en la cual el absorbedor sea efectivo es demasiado angosta para que opere.
4. En las referencias [8.36-8.39] se encuentran obras adicionales sobre el diseño óptimo de absorbedores de vibración.

8.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

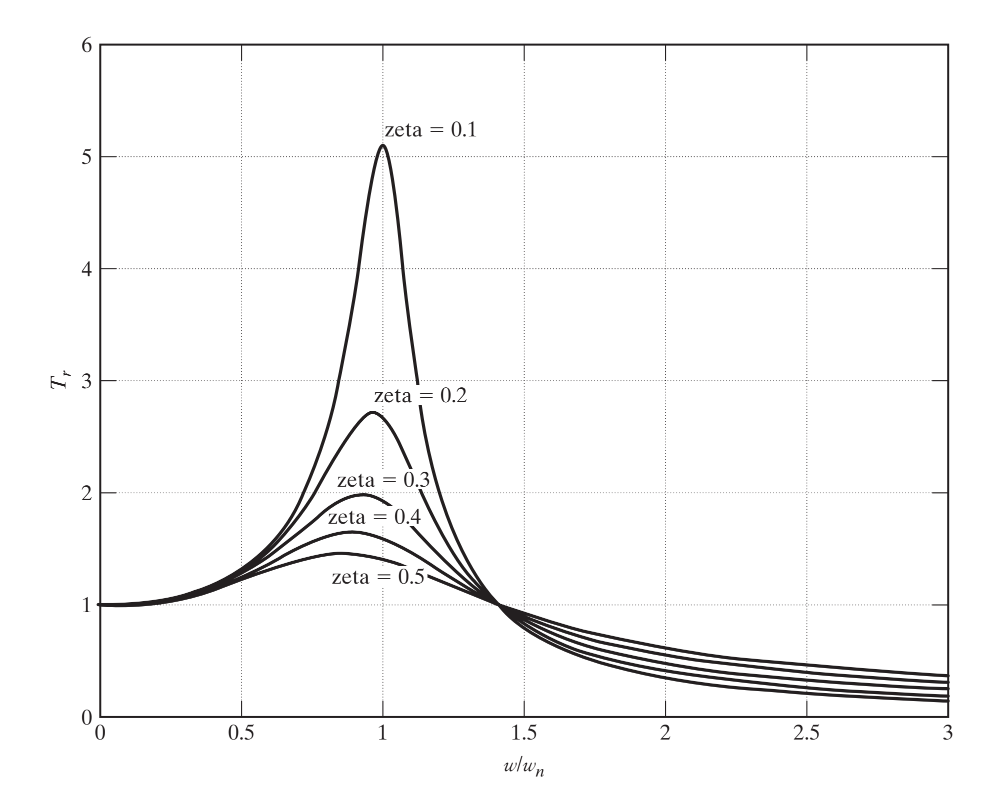
Ejemplo 8.17 Trazo de la transmisibilidad

Utilizando MATLAB, trace la variación de transmisibilidad de un sistema de un solo grado de libertad con la relación de frecuencia, dada por la ecuación (8.94), correspondiente a ζ =0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5.

Solución: El siguiente programa MATLAB traza la variación de transmisibilidad como una función de la relación de frecuencia con la ecuación (8.94):

```
%Exam 9-17
para j = 1 : 5
    kesi = j * 0.1;
    for i = 1 : 1001
        w_wn(i) = 3 * (i - 1)/1000;
        T(i) = sqrt((1 + (2 * kesi * w_wn(i)) ^ 2)/((1 - w_wn(i) ^ 2)
        ^ 2 + ↙
2 * kesi * w_wn(i) ^2));
    end;
    plot(w_wn, T);
    hold on;
y;

xlabel ('w/w_n');
ylabel('Tr');
gtext('zeta = 0.1');
gtext('zeta = 0.2');
gtext('zeta = 0.3');
gtext('zeta = 0.4');
gtext('zeta = 0.5');
title('Ex9.2');
grid on;
```

■



Ejemplo 8.18 Amplitudes de vibración de las masas de un absorbedor de vibración

Utilizando MATLAB, trace las variaciones de las amplitudes de vibración de las masas principales y auxiliar de un absorbedor de vibración, ecuaciones (8.140) y (8.141), como una función de la relación de frecuencia.

Solución: Las ecuaciones (8.140) y (8.141) se trazan para los siguientes datos: $f = \omega_a/\omega_n = 1$, $\zeta = 0.1$ y 0.5, $\mu = m_2/m_1 = 0.05$ y 0.1.

```
f = 1;
%------    zeta = 0.1, mu=0.05 -------------------------------------↙
-------
zeta = 0.1;
mu = 0.05;
g = 0.6 : 0.001 : 1.3;

tzg2 = (2.*zeta.*g).^2 ;%---   tzg2 = (2*zeta*g)^2
g2_f2_2 = (g.^2-f.^2).^2 ;% g2_f2_2 = (g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2 = (g.^2—1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2 = mu.*f.^2*g.^2 ;
g2_1 = g.^2—1 ;
g2_f2 = g.^2-f.^2 ;

x1r =sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r =sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r)
hold on
plot(g,x2r);
hold on
%------    zeta = 0.1, mu=0.01 -------------------------------------↙
------
zeta = 0.1;
mu = 0.1; 0.001:1.3;
g = 0.6:

tzg2 = (2.*zeta.*g).^2 ;%—--- tzg2 = (2*zeta*g)^2
g2_f2_2 = (g.^2-f.^2).^2 ;% g2_f2_2 = (g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2 = (g.^2—1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2 = mu.*f.^2*g.^2 ;
g2_1 = g.^2—1 ;
g2_f2 = g.^2-f.^2 ;

x1r =sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r =sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r,'-.');
hold on
plot(g,x2r,'-.');
hold on
%------   zeta = 0.5, mu=0.05 -------------------------------------↙
------
zeta = 0.5;
mu = 0.05;
g = 0.6 : 0.001 : 1.3;

tzg2 = (2.*zeta.*g).^2 ;%—--- tzg2 = (2*zeta*g)^2
g2_f2_2 = (g.^2-f.^2).^2) ;% g2_f2_2 = (g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2 = (g.^2—1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2 = mu.*f.^2*g.^2;
g2_1 = g.^2—1 ;
g2_f2 = g.^2-f.^2;

x1r =sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r =sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r,'—');
hold on
plot(g,x2r,'—');
hold on
%------    zeta = 0.5, mu=0.1 --------------------------------------↙
------
zeta = 0.5;
mu = 0.1;
g = 0.6 : 0.001 : 1.3;
```

```
tzg2 = (2.*zeta.*g).^2 ;%—--- tzg2 = (2*zeta*g)^2
g2_f2_2 = (g.^2-f.^2).^2 ;% g2_f2_2 = (g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2 = (g.^2—1+mu.*g.^2).^2 ;
muf2g2 = mu.*f.^2*g.^2 ;
g2_1 = g.^2—1 ;
g2_f2 = g.^2-f.^2 ;

x1r =sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r =sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2 1mug2 2+(muf2g2-g2 1.*g2 f2).^2));
plot(g,x1r,':');
hold on
plot(g,x2r,':');
xlabel('g')
ylabel('X1r and X2r')
axis ([0.6 1.3 0 16])
```

16
14
12
10
8
6
4
2
0
X1r y X2r
X2r, zeta = 0.1, mu = 0.1
X1r
zeta = 0.5
mu = 0.05
X2r
zeta = 0.5
mu = 0.1
X2r
zeta = 0.1
mu = 0.05
X2r
zeta = 0.5
mu = 0.05
X1r
zeta = 0.5
mu = 0.1
X1r
zeta = 0.1
mu = 0.05
X1r, zeta = 0.1, mu = 0.1
0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3
g

■

Ejemplo 8.19 Frecuencias resonantes de un absorbedor de vibración

Utilizando MATLAB, trace las variaciones de las relaciones de frecuencia resonante proporcionadas por la ecuación (8.146) con la relación de masa, m_2/m_1.

Solución: Las relaciones Ω_1/ω_2 y Ω_2/ω_2, resultado de la ecuación (8.146), se trazan para $\omega_2/\omega_1 = 0.5$, 1.0 y 2.0 en el rango de $m_2/m_1 = 0$ a 1.

```
%------ omega2/omega1=0.5 -----------------------------------------↙
---
omega21=0.5
m21 = 0:0.001:1.0
X11 = sqrt(((1 + (1+m21)*omega21.^2) +((1+(1+m21).*omega21.^2).^2-↙
4.*omega21.^2).^0.5)...
    /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X11,':')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on
```

```
X12 = sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2) - ((1 + (1+m21).*omega21.^2).^2-↙
4.*omega21.^2).^0.5)...
    /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X12,':')
hold on

%------ omega2/omega1=1.0 ------------------------------------------↙
---

omega21=1.0
m21 = 0:0.001:1.0
X21 = sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2) +((1+(1+m21).*omega21.^2).^2-↙
4.*omega21.^2).^0.5)...
    /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X21,'-')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on

X22 = sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2) -((1+(1+m21).*omega21.^2).^2-↙
4.*omega21.^2).^0.5)...
    /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X22,'-')
hold on

%------ omega2/omega1=2.0 ------------------------------------------↙
---

omega21=2.0
m21 = 0 : 0.001 : 1.0
X31 = sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2) +((1+(1+m21).*omega21.^2).^2).↙
^2-4.*omega21.^2).^0.5)...
    / (2.*omega21.^2))
plot(m21,X31,'-.')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on

X32 = sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2) -((1+(1+m21).*omega21.^2).^2-4.↙
*omega21.^2) .^0.5)...
    /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X32,'-.')
hold on
xlabel ('mr')
ylabel ('OM1 and OM2')
```


■

Ejemplo 8.20 Balanceo en dos planos

Desarrolle un programa MATLAB general llamado **Program13.m** para el balanceo en dos planos de máquinas rotatorias. Úselo para resolver el ejemplo 8.2.

Solución: El programa **Program13.m** se desarrolla para que acepte los vectores $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, $\vec{V}_A'$, $\vec{V}_B'$, $\vec{V}_A''$, $\vec{V}_B''$, $\vec{W}_L$, y $\vec{W}_R$ como datos de entrada en la forma de matrices bidimensionales *VA*, *VB*, *VAP*, *VBP*, *VAPP*, *VBPP*, *WL*, *WR*, *BL* y *BR*, respectivamente. El programa proporciona los vectores B_L y B_R como resultados de salida en la forma de matrices bidimensionales *BL* y *BR* que indican la magnitud y posición de los pesos de balanceo en los planos izquierdo y derecho, respectivamente. A continuación se presenta el listado y resultados del programa.

```
%=====================================================================
%
% Program13.m
% Balanceo en dos planos
%
%=====================================================================
% Ejecuta "Program13" en la ventana de comandos de MATLAB,
vsub.m,
% vdiv.m y vmult.m deben estar en la misma carpeta, y establezca la
ruta MATLAB
% a esta carpeta.
% los 8 renglones siguientes contienen los datos dependientes del problema
va=[8.5 60];
vap=[6 125];
wl=[10 270];
vb=[6.5 205];
vbp=[4.5 230];
vapp=[6 35];
vbpp=[10.5 160];
wr=[12 180];
% final de los datos dependientes del problema
[bl,br]=balan(va,vb,vap,vbp,vapp,vbpp,wl,wr);
fprintf('            Resultados del balanceo en dos planos \n\n');
fprintf('Peso de balanceo en el plano izquierdo Peso de balanceo en el plano derecho')
fprintf('\n\n');
fprintf('Magnitud=%8.6f           Magnitud=%8.6f \n\n',bl(1),br(1));
fprintf('Ángulo=%8.6f               Ángulo=%8.6f \n\n',bl(2),br(2));
%=====================================================================
%
%Function Balan.m
%
%=====================================================================
function [bl,br]=balan(va,vb,vap,vbp,vapp,vbpp,wl,wr);
pi=180/3.1415926;
va(2)=va(2)/pi;
p(1)=va(1);
p(2)=va(2);
va(1)=p(1)*cos(p(2));
va(2)=p(1)*sin(p(2));
vb(2)=vb(2)/pi;
p(1)=vb(1);
p(2)=vb(2);
vb(1)=p(1)*cos(p(2));
vb(2)=p(1)*sin(p(2));
vap(2)=vap(2)/pi;
p(1)=vap(1);
p(2)=vap(2);
vap(1)=p(1)*cos(p(2));
vap(2)=p(1)*sin(p(2));
vbp(2)=vbp(2)/pi;
p(1)=vbp(1);
p(2)=vbp(2);
vbp(1)=p(1)*cos(p(2));
vbp(2)=p(1)*sin(p(2));
vapp(2)=vapp(2)/pi;
p(1)=vapp(1);
p(2)=vapp(2);
```

```
vapp(1)=p(1)*cos(p(2));
vapp(2)=p(1)*sin(p(2));
vbpp(2)=vbpp(2)/pi;
p(1)=vbpp(1);
p(2)=vbpp(2);
vbpp(1)=p(1)*cos(p(2));
vbpp(2)=p(1)*sin(p(2));
wl(2)=wl(2)/pi;
p(1)=wl(1);
p(2)=wl(2);
wl(1)=p(1)*cos(p(2));
wl(2)=p(1)*sin(p(2));
wr(2)=wr(2)/pi;
p(1)=wr(1);
p(2)=wr(2);
wr(1)=p(1)*cos(p(2));
wr(2)=p(1)*sin(p(2));
[r]=vsub(vap,va);
[aal]=vdiv(r,wl);
[s]=vsub(vbp,vb);
[abl]=vdiv(s,wl);
[p]=vsub(vapp,va);
[aar]=vdiv(p,wr);
[q]=vsub(vbpp,vb);
[abr]=vdiv(q,wr);
[ar1]=sqrt(aar(1)^2+aar(2)^2);
[ar2]=atan(aar(2)/aar(1))*pi;
[al1]=sqrt(aal(1)^2+aal(2)^2);
[al2]=atan(aal(2)/aal(1))*pi;
[r]=vmult(abl,va);
[s]=vmult(aal,vb);
[vap]=vsub(r,s);
[r]=vmult(aar,abl);
[s]=vmult(aal,abr);
[vbp]=vsub(r,s);
[ur]=vdiv(vap,vbp);
[r]=vmult(abr,va);
[s]=vmult(aar,vb);
[vap]=vsub(r,s);
[r]=vmult(abr,aal);
[s]=vmult(aar,abl);
[vbp]=vsub(r,s);
[ul]=vdiv(vap,vbp);
bl(1)=sqrt(ul(1)^2+ul(2)^2);
a1=ul(2)/ul(1);
bl(2)=atan(ul(2)/ul(1));
br(1)=sqrt(ur(1)^2+ur(2)^2);
a2=ur(2)/ur(1);
br(2)=atan(ur (2)/ur (1));
bl(2)=bl(2)*pi;
br(2)=br(2)*pi;
bl(2)=bl(2)+180;
br(2)=br(2)+180;

%==================================================================
%
%Function vdiv.m
%
%==================================================================
function [c]=vdiv(a,b);
c(1)=(a(1)*b(1)+a(2)*b(2))/(b(1)^2+b(2)^2);
c(2)=(a(2)*b(1)-a(1)*b(2))/(b(1)^2+b(2)^2);
%==================================================================
%
%Function vmult.m
%
%==================================================================
function [c]=vmult(a,b);
c(1)=a(1)*b(1)-a(2)*b(2);
c(2)=a(2)*b(1)+a(1)*b(2);

%==================================================================
%
%Function vsub.m
%
```

```
%==================================================================
function [c]=vsub(a,b);
c(1)=a(1)-b(1);
c(2)=a(2)-b(2);
```

```
              Resultados del balanceo en dos planos

Peso de balanceo en el plano         Peso de balanceo en el plano derecho
izquierdo

Magnitud = 10.056139                 Magnitud = 5.877362

Ángulo = 14.554799                   Ángulo = 248.255931
```

■

Resumen del capítulo

Analizamos el uso de nomógrafos de vibración y los criterios de vibración para determinar los niveles aceptables de vibración. Presentamos varios métodos, como el de balanceo de máquinas rotatorias y reciprocantes, para eliminar o reducir la vibración en la fuente. Describimos métodos de cambiar la masa y/o rigidez, así como la energía que se disipa por medio de la adición de amortiguamiento. Estudiamos métodos de diseño de aisladores de vibración, absorbedores de vibración y sistemas de control de vibración activos. Presentamos la solución a problemas de control de vibración utilizando MATLAB.

Ahora que ya terminó este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se proponen a continuación.

Referencias

8.1 J. E. Ruzicka, "Fundamental concepts of vibration control", *Sound and Vibration*, Vol. 5, julio de 1971, págs.16-22.

8.2 J. A. Macinante, *Seismic Mountings for Vibration Isolation*, Wiley, Nueva York, 1984.

8.3 International Organization for Standardization, *Mechanical Vibration of Machines with Operating Speeds from 10 to 200 rev/s–Basis for Specifying Evaluation Standards*, ISO 2372, 1974.

8.4 International Organization for Standardization, *Evaluation and Measurement of Vibration in Buildings*, Draft Proposal, ISO DP 4866, 1975.

8.5 R. J. Steffens, "Some aspects of structural vibration", en *Proceedings of the Symposium on Vibrations in Civil Engineering*, B. O. Skipp (ed.), Butterworths, Londres, 1966, págs. 1-30.

8.6 International Organization for Standardization, *Guide for the Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration*, ISO 2631, 1974.

8.7 C. Zenz, *Occupational Medicine: Principles and Practical Application* (2a. ed.), Year Book Medical Publishers, Chicago, 1988.

8.8 R. L. Fox, "Machinery vibration monitoring and analysis techniques", *Sound and Vibration*, Vol. 5, noviembre de 1971, págs. 35-40.

8.9 D. G. Stadelbauer, "Dynamic balancing with microprocessors", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, diciembre de 1982, págs. 3-7.

8.10 J. Vaughan, *Static and Dynamic Balancing* (2a. ed.), Bruel and Kjaer Application Notes, Naerum, Dinamarca.

8.11 R. L. Baxter, "Dynamic balancing", *Sound and Vibration*, Vol. 6, abril de 1972, págs. 30-33.

8.12 J. H. Harter y W. D. Beitzel, *Mathematics Applied to Electronics*, Reston Publishing, Restan, VA, 1980.

8.13 R. G. Loewy y V. J. Piarulli, "Dynamics of rotating shafts", *Shock and Vibration Monograph SVM-4*, Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1969.

8.14 J. D. Irwin y E. R. Graf, *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

8.15 T. Iwatsuba, "Vibration of rotors through critical speeds", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, Núm. 2, febrero de 1976, págs. 89-98.

8.16 R. J. Trivisonno, "Fortran IV computer program for calculating critical speeds of rotating shafts", NASA TN D-7385, 1973.

8.17 R. E. D. Bishop y G. M. L. Gladwell, "The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 1, 1959, págs. 66-77.

8.18 A. G. Parkinson, "The vibration and balancing of shafts rotating in asymmetric bearings", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 2, 1965, págs. 477-501.

8.19 C. E. Crede, *Vibration and Shock Isolation*, Wiley, Nueva York, 1951.

8.20 W. E. Purcell, "Materials for noise and vibration control", *Sound and Vibration*, Vol. 16, julio de 1982, págs. 6-31.

8.21 B. C. Nakra, "Vibration control with viscoelastic materials", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, Núm. 6, junio de 1976, págs. 3-12.

8.22 G. R. Tomlinson, "The use of constrained layer damping in vibration control", en *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, J. E. Mottershead (ed.), Pergamon Press, Oxford, 1989, págs. 99-107.

8.23 D. E. Baxa y R. A. Dykstra, "Pneumatic isolation systems control forging hammer vibration", *Sound and Vibration*, Vol. 14, mayo de 1980, págs. 22-25.

8.24 E. I. Rivin, "Vibration isolation of industrial machinery–Basic considerations", *Sound and Vibration*, Vol. 12, noviembre de 1978, págs. 14-19.

8.25 C. M. Salerno y R. M. Hochheiser, "How to select vibration isolators for use as machinery mounts", *Sound and Vibration*, Vol. 7, agosto de 1973, págs. 22-28.

8.26 C. A. Mercer y P. L. Rees, "An optimum shock isolator", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, págs. 511-520.

8.27 M. L. Munjal, "A rational synthesis of vibration isolators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 39, 1975, págs. 247-263.

8.28 C. Ng y P. F. Cunniff, "Optimization of mechanical vibration isolation systems with multidegrees of freedom", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 36, 1974, págs. 105-117.

8.29 S. K. Hati y S. S. Rao, "Cooperative solution in the synthesis of multidegree of freedom shock isolation systems", *Journal of Vibration, Acoustics*, *Stress*, *and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, págs. 101-103.

8.30 S. S. Rao y S. K. Hati, "Optimum design of shock and vibration isolation systems using game theory", *Journal of Engineering Optimization*, Vol. 4, 1980, págs. 1-8.

8.31 J. E. Ruzicka, "Active vibration and shock isolation", Documento no. 680747, *SAE Transactions*, Vol. 77, 1969, págs. 2872-2886.

8.32 R. W. Horning y D. W. Schubert, "Air suspension and active vibration-isolation systems", en *Shock and Vibration Handbook (*3a. ed.), C. M. Harris (ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1988.

8.33 O. Vilnay, "Active control of machinery foundation", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE,* Vol. 110, 1984, págs. 273-281.

8.34 J. I. Soliman y M. G. Hallam, "Vibration isolation between non-rigid machines and non-rigid foundations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 8, 1968, págs. 329-351.

8.35 J. Ormondroyd y J. P. Den Hartog, "The theory of the dynamic vibration absorber", *Transactions of ASME*, Vol. 50, 1928, p. APM-241.

8.36 H. Puksand, "Optimum conditions for dynamic vibration absorbers for variable speed systems with rotating and reciprocating unbalance", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 3, abril de 1975, págs. 145-152.

8.37 A. Soom y M. S. Lee, "Optimal design of linear and nonlinear absorbers for damped systems", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, págs. 112-119.

8.38 J. B. Hunt, *Dynamic Vibration Absorbers,* Mechanical Engineering Publications, Londres, 1979.

Preguntas de repaso

8.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Mencione algunas fuentes de vibración industrial.
2. ¿Cuáles son los diversos métodos disponibles de control de vibración?
3. ¿Qué es balanceo en un solo plano?
4. Describa el procedimiento de balanceo en dos planos.
5. ¿Qué es el remolineo?
6. ¿Cuál es la diferencia entre amortiguamiento estacionario y amortiguamiento rotatorio?
7. ¿Cómo se determina la velocidad crítica de una flecha?
8. ¿Qué provoca la inestabilidad en un sistema de rotor?
9. ¿Qué consideraciones se deben tomar en cuenta para el balanceo de un motor reciprocante?
10. ¿Cuál es la función de un aislador de vibración?
11. ¿Qué es un absorbedor de vibración?
12. ¿Cuál es la diferencia entre un aislador de vibración y un absorbedor de vibración?
13. ¿Un soporte de montaje de resorte reduce siempre la vibración del cimiento de una máquina?
14. ¿Es mejor utilizar un resorte blando en soporte de montaje flexible de una máquina? ¿Por qué?
15. ¿Es la fuerza de sacudimiento proporcional al cuadrado de la velocidad de una máquina? ¿Con la velocidad de la máquina se incrementa la fuerza vibratoria transmitida al cimiento?
16. ¿Por qué el balanceo dinámico implica balanceo estático?
17. Explique por qué nunca se puede lograr el balanceo dinámico con una sola prueba.
18. ¿Por qué siempre vibra una flecha rotatoria? ¿Cuál es la fuente de la fuerza de sacudimiento?
19. ¿Siempre es ventajoso incluir un amortiguador en el sistema secundario de un absorbedor de vibración dinámico?
20. ¿Qué es el aislamiento de vibración activo?
21. Explique la diferencia entre aislamiento pasivo y activo.

8.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

1. La vibración puede provocar fallas estructurales y mecánicas.
2. La respuesta de un sistema se puede reducir por el uso de aisladores y absorbedores.
3. Control de vibración significa la eliminación o reducción de la vibración.
4. La vibración provocada por un disco desbalanceado rotatorio se puede eliminar agregando una masa adecuada al disco.
5. Cualquier masa desbalanceada puede ser reemplazada por dos masas desbalanceadas equivalentes en los planos extremos del rotor.
6. El latigueo de aceite en los rodamientos puede provocar inestabilidad en un sistema de rotor.
7. La frecuencia natural de un sistema se puede cambiar variando su amortiguamiento.
8. La rigidez de una flecha rotatoria se puede modificar cambiando la ubicación de sus rodamientos.
9. Todos los sistemas prácticos tienen amortiguamiento.
10. Un alto factor de pérdida de un material implica menos amortiguamiento.
11. Los sistemas de aislamiento pasivo requieren potencia externa para funcionar.
12. La transmisibilidad también se llama relación de transmisión.
13. La fuerza transmitida al cimiento rígido de un aislador nunca puede ser infinita.
14. La fricción interna o externa puede provocar inestabilidad en una flecha rotatoria a velocidades por encima de la primera velocidad crítica.

8.3 Llene cada uno de los siguientes espacios en blanco con la palabra apropiada:

1. Incluso una pequeña fuerza de excitación puede provocar una respuesta indeseablemente grande cerca de ____________.
2. El uso de tolerancias estrechas y un mejor acabado superficial de las piezas de una máquina tiende a hacer a la máquina ________ susceptible a vibración.
3. La presencia de una masa desbalanceada en un disco rotatorio provoca __________.
4. Cuando la velocidad de rotación de una flecha es igual a una de las frecuencias naturales de la flecha se llama velocidad _______.

5. Los elementos móviles de un motor reciprocante son el cigüeñal, la biela y el __________.
6. El componente vertical de la fuerza de inercia de un motor reciprocante tienes partes primarias y __________.
7. Las estructuras laminadas tienen amortiguamiento ________.
8. Los materiales con valor grande de factor de pérdida están sujetos a un esfuerzo _________.
9. El aislamiento de vibración implica la inserción de un miembro elástico entre la masa vibratoria y la _______ de vibración.
10. El corcho es un aislador _________.
11. Un aislador activo se compone de un sensor, un procesador de señales y un __________.
12. El neutralizador de vibración también se conoce como _______ de vibración dinámico.
13. Aunque un absorbedor de vibración no amortiguado elimina el pico de resonancia original de la respuesta, introduce ______ nuevos picos.
14. El balanceo en un solo plano también se conoce como balanceo _________.
15. Las marcas de fase se utilizan en el balanceo en ______ planos por medio de un analizador de vibración.
16. Los errores de maquinado pueden provocar ________ en máquinas rotatorias.
17. Las inestabilidades de combustión son la fuente de _______ en motores.
18. La deflexión de una flecha rotatoria llega a ser muy grande a la velocidad __________.
19. El latigueo de aceite en rodamientos puede provocar _________ en un sistema de rotor flexible.

8.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones múltiples que se presentan.

1. Un ejemplo de una fuente de vibración que no se puede modificar es:
   a. turbulencia atmosférica
   b. un golpe de martillo
   c. la rigidez de la llanta de un automóvil
2. El balanceo en dos planos también se conoce como:
   a. balanceo estático
   b. balanceo dinámico
   c. balanceo apropiado
3. La fuerza desbalanceada ocasionada por una masa excéntrica m que gira a una velocidad angular ω localizada a una distancia r del eje de rotación es
   a. $mr^2\omega^2$ **b.** $mg\omega^2$ **c.** $mr\omega^2$
4. El siguiente material tiene un alto amortiguamiento interno:
   a. hierro colado **b.** cobre **c.** latón
5. La transmisibilidad es la relación de
   a. fuerza transmitida y fuerza de excitación
   b. fuerza aplicada y el desplazamiento resultante
   c. desplazamiento de entrada y desplazamiento de salida
6. La impedancia mecánica es la relación de
   a. fuerza transmitida y fuerza de excitación
   b. fuerza aplicada y fuerza transmitida
   c. fuerza aplicada y desplazamiento
7. La vibración se puede eliminar con base en un análisis teórico
   a. en ocasiones **b.** siempre **c.** nunca
8. Un rotor largo se puede balancear agregando pesos en
   a. un solo plano
   b. dos planos cualesquiera
   c. dos planos específicos

9. El amortiguamiento provocado por las fuerzas internas del material de una flecha se llama
a. amortiguamiento estacionario
b. amortiguamiento externo
c. amortiguamiento rotatorio

10. El amortiguamiento provocado por la estructura de apoyo de rodamiento de una flecha rotatoria se llama
a. amortiguamiento estacionario
b. amortiguamiento externo
c. amortiguamiento rotatorio

11. Un absorbedor de vibración no amortiguado elimina el pico de resonancia original pero introduce
a. un nuevo pico **b.** dos nuevos picos **c.** varios picos nuevos

8.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes.

1. Frecuencia natural de control	**a.** Introducir amortiguamiento
2. Evitar la respuesta excesiva en resonancia	**b.** Utilizar un aislador de vibración
3. Reducir la transmisión de una fuerza de excitación de una parte a otra	**c.** Agregar un absorbedor de vibración
4. Reducir la respuesta del sistema	**d.** Evitar la resonancia

Problemas

Sección 8.2 Criterios de vibración

8.1 Un automóvil que transita por una carretera escabrosa, cuya superficie es senoidal, se modela como un sistema de resorte-masa, como se muestra en la figura 8.40. La superficie senoidal tiene una longitud de onda de 5 m y una amplitud de $Y = 1$ mm. Si la masa del automóvil, incluidos los pasajeros, es de 1500 kg y la rigidez del sistema de suspensión (k) es de 400 kN/m, determine el rango de velocidad (v) del automóvil en el cual los pasajeros perciben la vibración. Sugiera posibles métodos de mejorar el diseño para un viaje más confortable de los pasajeros.

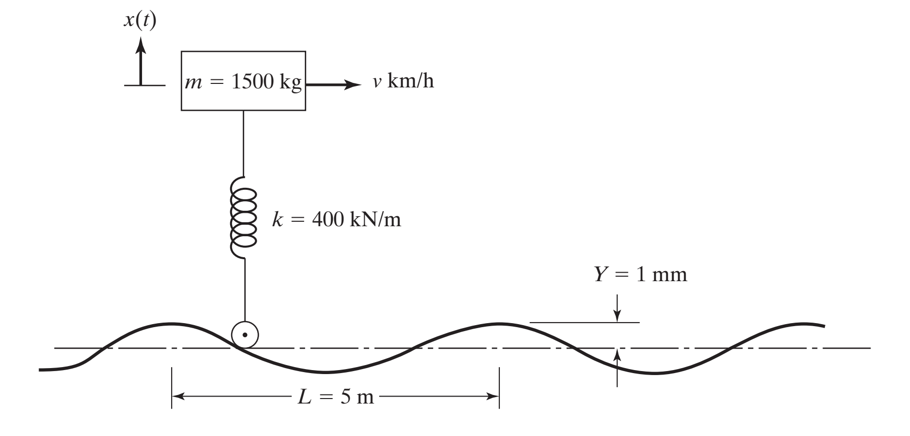


Figura 8.40

8.2 El valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de una señal $x(t)$, x_{rcm}, se define como

$$x_{\text{rcm}} = \left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt \right\}^{1/2}$$

Utilizando esta definición, encuentre los valores de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados del desplazamiento (x_{rcm}), velocidad $(\dot{x}_{\text{rcm}})$ y la aceleración $(\ddot{x}_{\text{rcm}})$ correspondientes a $x(t) = X \cos \omega t$.

Sección 8.4 Balanceo de máquinas rotatorias

8.3 Dos discos idénticos se conectan por medio de cuatro birlos de diferentes tamaños y se montan en una flecha, como se muestra en la figura 8.41. Las masas y ubicación de los tres birlos son como sigue: m_1 = 35 gramos, r_1 = 110 mm y $\theta_1 = 40°$; m_2 = 15 gramos, r_2 = 90 mm y $\theta_2 = 220°$; y θ_3 = 25 gramos, r_3 = 130 mm, $\theta_3 = 280°$. Encuentre la masa y ubicación del cuarto birlo (m_c, r_c y θ_c), el cual produce el balanceo estático de los discos.

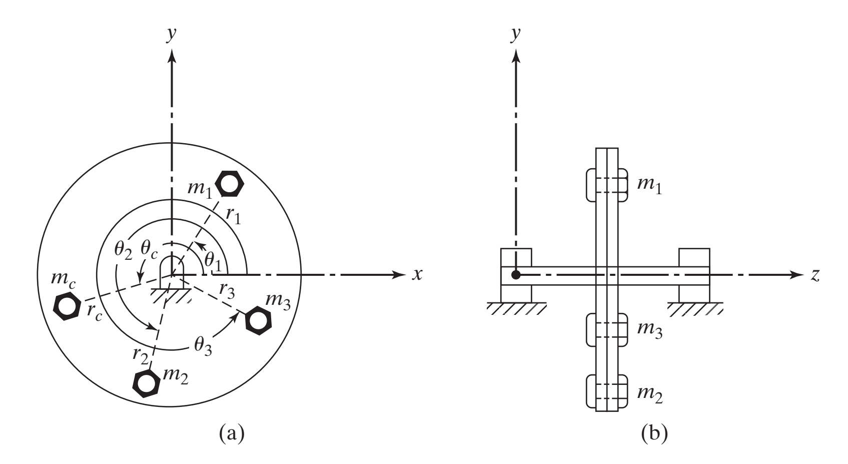


Figura 8.41

8.4 Se perforan cuatro agujeros en un disco uniforme en un radio de 4 pulg y ángulos de 0°, 60º, 120° y 180°. El peso removido en los agujeros 1 y 2 es de 4 oz cada uno y el peso eliminado de los agujeros 3 y 4 es de 5 oz cada uno. Si el disco se tiene que balancear estáticamente perforando un quinto agujero en un radio de 5 pulg, determine el peso que se tiene que eliminar y la localización angular del quinto agujero.

8.5 Se colocan tres masas, que pesan 0.5 lb, 0.7 lb y 1.2 lb alrededor de un volante de 30 pulg de diámetro en las ubicaciones angulares $\theta = 10°$, 100° y 190°, respectivamente. Encuentre el peso y la ubicación angular de la cuarta masa que se colocará en el borde que conduce al balanceo dinámico del volante.

8.6 La amplitud y ángulo de fase debido al desbalance original en una rueda de amolar que opera a 1200 rpm es de 10 mils y 40° en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir de la marca de fase. Cuando se agrega un peso de prueba W = 6 oz a 65° en el sentido de las manecillas del reloj a partir de la masa de fase y a una distancia radial de 2.5 pulg del centro de rotación, se observa que la amplitud y ángulo de fase son de 19 mils y 150° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Encuentre la magnitud y la posición angular del peso de balanceo si se tiene que colocar a 2.5 pulg radialmente del centro de rotación.

8.7 Un volante desbalanceado muestra una amplitud de 6.5 mils y un ángulo de fase de 15° en el sentido de las manecillas del reloj a partir de la marca de fase. Cuando se agrega un peso de prueba de 2 oz a 45°

en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir de la marca de fase, la amplitud y el ángulo de fase son de 8.8 mils y 35° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, respectivamente. Encuentre la magnitud y posición angular del peso de balanceo requerido. Suponga que los pesos se agregan en el mismo radio.

8.8 Para determinar el desbalance en una rueda de amolar, que gira en el sentido de las manecillas del reloj a 2400 rpm, se utiliza un analizador de vibración y se observa una amplitud de 4 mils y un ángulo de fase de 45° con el desbalance original. Cuando se agrega un peso de prueba $W = 4$ oz a 20° en el sentido de las manecillas del reloj a partir de la marca de fase, la amplitud se vuelve 8 mils y el ángulo de fase 145°. Si los ángulos de fase se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir de la horizontal del lado derecho, calcule la magnitud y ubicación del peso de balanceo necesario.

8.9 Un rotor de turbina funciona a la frecuencia natural del sistema. Un estroboscopio indica que el desplazamiento máximo del rotor ocurre a un ángulo de 229° en la dirección de rotación. ¿En qué posición angular se debe quitar la masa del rotor para mejorar su balanceo?

8.10 En la figura 8.42 se muestra un rotor que tiene tres masas excéntricas en planos diferentes. Las ubicaciones axial, radial y angular de la masa m_1 son l_i, r_i y θ_i, respectivamente, para $i = 1, 2, 3$. Si el rotor tiene que ser balanceado dinámicamente colocando dos masas m_{b1} y m_{b2} en los radios r_{b1} y r_{b2}, en las ubicaciones angulares θ_{b1} y θ_{b2}, como se muestra en la figura 8.42, derive expresiones para $m_{b1}r_{b1}$, $m_{b2}r_{b2}$, θ_{b1} y θ_{b2}.

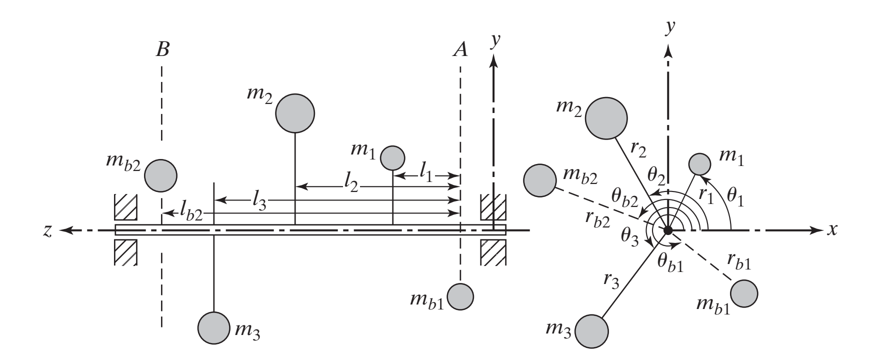
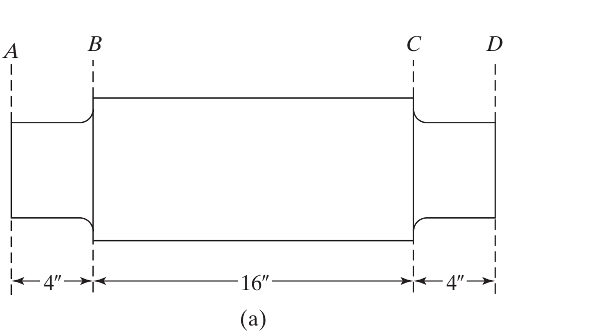
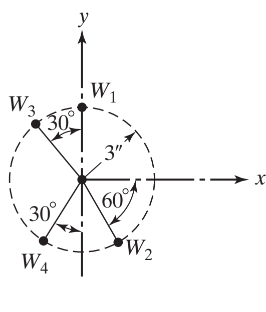


Figura 8.42

8.11 El rotor que se muestra en la figura 8.43(a) se balancea temporalmente en una máquina de balanceo con la adición de los pesos $W_1 = W_2 = 0.2$ lb en el plano A y $W_3 = W_4 = 0.2$ lb en el plano D en un radio de 3 pulg, como se muestra en la figura 8.43(b). Si el rotor queda permanentemente balanceado perforando agujeros en un radio de 4 pulg en los planos B y C, determine la posición y cantidad de material que se tiene que eliminar del rotor. Suponga que los pesos ajustables W_1 a W_4 se quitarán de los planos A y D.



(a)



(b)

Figura 8.43

8.12 Los pesos de 2 lb, 4 lb y 3 lb se ubican en radios de 2 pulg, 3 pulg y 1 pulg en los planos *C*, *D* y *E*, respectivamente, en una flecha soportada por los rodamientos *B* y *F*, como se muestra en la figura 8.44. Encuentre los pesos y ubicaciones angulares de los dos pesos de balanceo que se tienen que colocar en los planos extremos *A* y *G* de modo que la carga dinámica en los rodamientos sea cero.

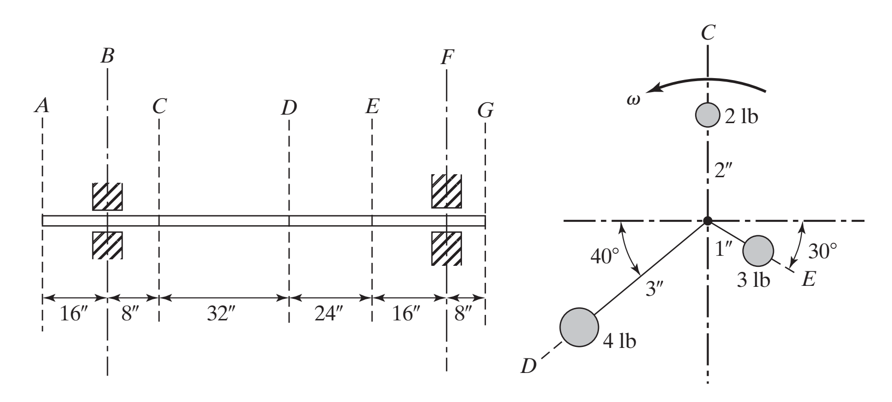


Figura 8.44

8.13 Los datos obtenidos en un procedimiento de balanceo en dos planos se proporcionan en la tabla siguiente. Determine la magnitud y posición angular de los pesos de balanceo, suponiendo que todos los ángulos se miden con respecto a una marca de fase arbitraria y que todos los pesos se agregan en el mismo radio.

	Amplitud (mils)		**Ángulo de fase**	
Condición	**Rodamiento *A***	**Rodamiento *B***	**Rodamiento *A***	**Rodamiento *B***
Desbalance original	5	4	100°	180°
$W_L = 2$ oz agregado a 30° en el plano izquierdo	6.5	4.5	120°	140°
$W_R = 2$ oz agregado a 0° en el plano derecho	6	7	90°	60°

8.14 La figura 8.45 muestra un sistema rotatorio en el cual la flecha está soportada por los rodamientos *A* y *B*. Las tres masas m_1, m_2 y m_3 están conectadas a la flecha como se indica en la figura. (a) Encuentre las reacciones de rodamiento en *A* y *B* si la velocidad de la flecha es de 1000 rpm. (b) Determine las ubicaciones y magnitudes de las masas de balanceo que deben colocarse en un radio de 0.25 m en los planos *L* y *R*, los cuales se supone que pasan por los rodamientos *A* y *B*.

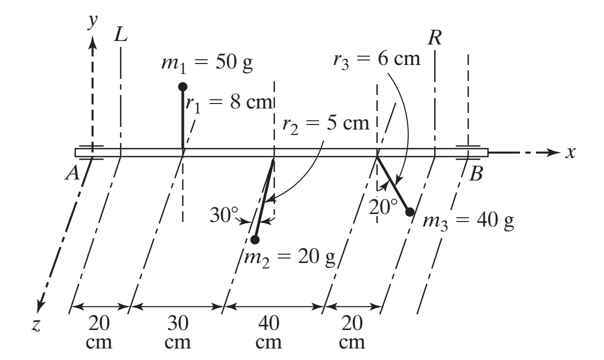


Figura 8.45

Sección 8.5 Remolineo de flechas rotatorias

8.15 Un volante, de 100 lb de peso y excentricidad 0.5 pulg, está montado en el centro de una flecha de acero de 1 pulg de diámetro. Si la longitud de la flecha entre los rodamientos es de 30 pulg y la velocidad de rotación del volante es de 1200 rpm, encuentre (a) la velocidad crítica, (b) la amplitud de vibración del rotor, y (c) la fuerza transmitida a los soportes de rodamiento.

8.16 Derive la expresión para el esfuerzo inducido en una flecha con una masa concentrada desbalanceada que está a la mitad entre los dos rodamientos.

8.17 Una flecha de acero de 2.5 cm de diámetro y 1 m de longitud está soportada por sus dos extremos en rodamientos. Lleva un disco de turbina, de 20 kg de masa y 0.005 m de excentricidad, a la mitad y funciona a 6000 rpm. El amortiguamiento en el sistema equivale a amortiguamiento viscoso con $\zeta = 0.01$. Determine la amplitud de remolineo del disco a (a) la velocidad de operación, (b) la velocidad crítica y (c) 1.5 veces la velocidad crítica.

8.18 Encuentre las reacciones en los rodamientos y el esfuerzo de flexión máximo inducido en la flecha (a) a la velocidad de operación, (b) a la velocidad crítica, y (c) a 1.5 veces la velocidad crítica del sistema flecha-rotor descrito en el problema 8.17.

8.19 Resuelva el problema 8.17 suponiendo que el material de la flecha es aluminio en lugar de acero.

8.20 Resuelva el problema 8.18 suponiendo que el material de la flecha es aluminio en lugar de acero.

8.21 Una flecha, con rigidez de 3.75 MN/m, gira a 3600 rpm. Un rotor, de 60 kg de masa y excentricidad de 2000 micrones, está montado en la flecha. Determine (a) la amplitud de remolineo de estado estable del rotor y (b) la amplitud de remolineo máxima del rotor durante el arranque y detención. Suponga que la relación de amortiguamiento del sistema es de 0.05.

Sección 8.6 Balanceo de motores reciprocantes

8.22 Los cilindros de un motor en línea de cuatro cilindros están colocados a intervalos de 12 pulg en la dirección axial. Los cigüeñales tienen la misma longitud de 4 pulg, y sus posiciones angulares son 0°, 180° y 0°. Si la longitud de la biela es de 10 pulg y el contrapeso reciprocante es de 2 lb para cada cilindro, encuentre las fuerzas desbalanceadas y momentos a una velocidad de 3000 rpm, utilizando la línea de centros a través del cilindro 1 como plano de referencia.

8.23 La masa reciprocante, el radio del cigüeñal y la longitud de cada uno de los cilindros en un motor en línea de dos cilindros son m, r y l, respectivamente. Los ángulos de los cigüeñales de los dos cilindros están separados por 180°. Determine las fuerzas desbalanceadas y momentos en el motor.

8.24 Un motor en línea de cuatro cilindros tiene un peso reciprocante de 3 lb, una carrera de 6 pulg y una longitud de biela de 10 pulg en cada cilindro. Los cigüeñales están separados por 4 pulg axialmente y 90° radialmente, como se muestra en la figura 8.46. Encuentre las fuerzas primaria y secundaria desbalanceadas y momentos con respecto al plano de referencia que se muestra en la figura 8.46 a una velocidad del motor de 1500 rpm.

8.25 En la figura 8.47 se muestra la disposición de los cigüeñales en un motor de seis cilindros en línea. Los cilindros están separados por una distancia a en la dirección axial, y las posiciones angulares de los cigüeñales son $\alpha_1 = \alpha_6 = 0^\circ$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ$ y $\alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$. Si la longitud del cigüeñal, la longitud de las bielas y la masa reciprocante de cada cilindro son r, l y m, respectivamente, encuentre las fuerzas desbalanceadas primaria y secundaria y los momentos con respecto al plano de referencia indicado en la figura 8.47.

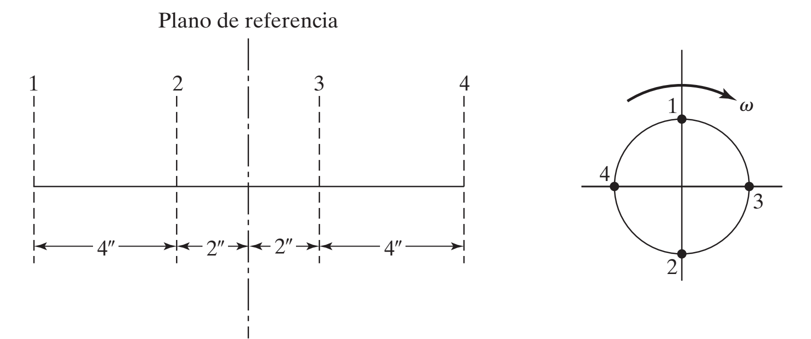


Figura 8.46

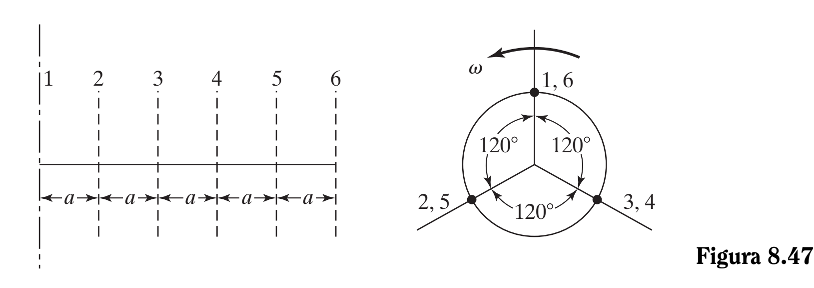


Figura 8.47

8.26 Un motor de un cilindro tiene una masa total de 150 kg. Su masa reciprocante es de 5 kg, y la masa rotatoria es de 2.5 kg. La carrera ($2r$) es de 15 cm, y la velocidad es de 600 rpm. (a) Si el motor está montado sobre resortes muy débiles, ¿cuál es la amplitud de vibración vertical del motor? (b) Si el motor está montado sólidamente sobre un cimiento rígido, ¿cuál es la amplitud de fuerza alterna transmitida? Suponga que la biela es de longitud infinita.

Sección 8.10 Aislamiento de la vibración

8.27 Se tiene que aislar un instrumento electrónico de un tablero que vibra a frecuencias que oscilan de 25 Hz a 35 Hz. Se estima que al menos se debe lograr 80 por ciento del aislamiento de vibración para que no se dañe el instrumento. Si el instrumento pesa 85 N, determine la deflexión estática necesaria del aislador.

8.28* Un ventilador extractor, que tiene un pequeño desbalance, pesa 800 N y opera a una velocidad de 600 rpm. Se desea limitar la respuesta a una transmisibilidad de 2.5 cuando el ventilador pasa por la resonancia durante el arranque. Además, se tiene que lograr un aislamiento de 90 por ciento a la velocidad de operación del ventilador. Diseñe un aislador adecuado para el ventilador.

8.29* Un compresor de aire de 500 kg de masa tiene una excentricidad de 50 kg-cm y funciona a una velocidad de 300 rpm. El compresor se tiene que montar sobre uno de los siguientes soportes de montaje: (a) un aislador compuesto de un resorte con amortiguamiento insignificante, y (b) un amortiguador con relación de amortiguamiento de 0.1 y rigidez insignificante. Seleccione un soporte de montaje adecuado y especifique los detalles de diseño considerando la deflexión estática del compresor, la relación de transmisión y la amplitud de vibración del compresor.

8.30 La armadura de un motor eléctrico de velocidad variable, de 200 kg de masa, tiene un desbalance debido a errores de fabricación. El motor está montado sobre un aislador que tiene una rigidez de 10 kN/m

---

* El asterisco indica un problema sin respuesta única.

y un amortiguamiento hidráulico con una relación de amortiguamiento de 0.15. (a) Encuentre el rango de velocidad dentro del cual la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida al cimiento será mayor que la fuerza de excitación. (b) Encuentre el rango de velocidad dentro del cual la amplitud de la fuerza transmitida será menor que 10 por ciento. de la amplitud de la fuerza de excitación.

8.31 Una lavadora que pesa 150 lb opera a 300 rpm. Encuentre la deflexión estática mínima de un aislador que proporciona 60 por ciento de aislamiento. Suponga que el amortiguamiento en el aislador es insignificante.

8.32 Una lavadora de 50 kg de masa opera a 1200 rpm. Encuentre la rigidez máxima de un aislador que proporciona un aislamiento de 75 por ciento. Suponga que la relación de amortiguamiento del aislador es de 7 por ciento.

8.33 Un ventilador extractor de 80 kg de masa que opera a 1 000 rpm produce una fuerza repetitiva de 10 000 N sobre su base rígida. Si la fuerza máxima transmitida a la base se tiene que limitar a 2 000 N utilizando un aislador no amortiguado, determine (a) la rigidez máxima permisible del aislador que sirve para este propósito; (b) la amplitud de estado estable de un ventilador de descarga con el aislador que tiene la rigidez máxima permisible, y (c) la amplitud máxima del ventilador extractor con aislamiento durante el arranque.

8.34 Una prensa impresora de 300 kg de masa que opera a 3 000 rpm produce una fuerza repetitiva de 30 000 N cuando se instala en un cimiento rígido. Encuentre un aislador viscosamente amortiguado adecuado para satisfacer los siguientes requerimientos: (a) la deflexión estática debe ser lo más pequeña posible; (b) la amplitud de estado estable debe ser menor que 2.5 mm; (c) la amplitud en condiciones de arranque no debe exceder de 20 mm, y (d) la fuerza transmitida al cimiento debe ser menor que 10 000 N.

8.35 Un compresor de 120 kg de masa tiene un desbalance rotatorio de 0.2 kg-m. Si se utiliza un aislador con rigidez de 0.5 MN/m y relación de amortiguamiento de 0.06, encuentre el rango de las velocidades de operación del compresor dentro del cual la fuerza transmitida al cimiento será menor que 2 500 N.

8.36 Un motor de combustión interna tiene un desbalance rotatorio de 1.0 kg-m y opera entre 800 y 2 000 rpm. Cuando se conecta directamente al piso, transmite una fuerza de 7018 N a 800 rpm y de 43 865 N a 2 000 rpm. Encuentre la rigidez del aislador necesaria para reducir la fuerza transmitida al piso a 6 000 N en el rango de velocidad de operación del motor. Suponga que la relación de amortiguamiento del aislador es de 0.08 y que la masa del motor es de 200 kg.

8.37 Una pequeña máquina herramienta de 100 kg de masa opera a 600 rpm. Encuentre la deflexión estática de un aislador no amortiguado que proporcione 90% de aislamiento.

8.38 Un motor diesel de 300 kg de masa que opera a 1800 rpm tiene un desbalance rotatorio de 1 kg-m. Se tiene que instalar en el piso de una planta industrial para que genere energía de emergencia. La fuerza máxima permisible que se puede transmitir al piso es de 8 000 N, pero el único tipo de aislador disponible tiene una rigidez de 1 MN/m y la relación de amortiguamiento es de 5 por ciento. Investigue posibles soluciones al problema.

8.39 La fuerza transmitida por un motor de combustión interna de 500 kg de masa, cuando se coloca directamente sobre un piso rígido es

$$F_t(t) = (18000 \cos 300t + 3600 \cos 600\,t)\text{N}$$

Diseñe un aislador no amortiguado de modo que la magnitud máxima de la fuerza transmitida al piso no exceda de 12 000 N.

8.40 Diseñe la suspensión de un automóvil de modo que la aceleración vertical máxima percibida por el conductor sea menor que $2g$ a todas las velocidades entre 40 y 80 mph mientras transita por una carretera

cuya superficie varía senoidalmente como $y(u) = 0.5$ sen $2u$ pies, donde u es la distancia horizontal en pies. El peso del automóvil junto con el conductor es de 1500 lb y la relación de amortiguamiento de la suspensión tiene que ser de 0.05. Use un modelo de un solo grado de libertad para el automóvil.

8.41 Considere un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento de Coulomb (el cual ofrece una fuerza de fricción constante, F_c). Derive una expresión para la transmisibilidad de fuerza, cuando la masa se somete a una fuerza armónica, $F(t) = F_0$ sen ωt.

8.42 Considere un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento de Coulomb (el cual ofrece una fuerza de fricción constante, F_c). Derive expresiones para las transmisibilidades de desplazamiento absoluta y relativa cuando la base se somete a un desplazamiento armónico, $y(t) = Y$ sen ωt.

8.43 Cuando una lavadora, de 200 kg de masa y 0.02 kg-m de desbalance, se monta sobre un aislador, éste se deforma 5 mm bajo la carga estática. Determine (a) la amplitud de la lavadora, y (b) la fuerza transmitida al cimiento a la velocidad de operación de 1200 rpm.

8.44 Un motor eléctrico de 60 kg de masa, 3000 rpm de velocidad nominal y 0.002 kg-m de desbalance, se tiene que montar sobre un aislador para obtener una transmisibilidad de fuerza de menos de 0.25. Determine (a) la rigidez del aislador, (b) la amplitud dinámica del motor, y (c) la fuerza transmitida al cimiento.

8.45 Se monta un motor sobre un cimiento rígido por medio de cuatro resortes. Al funcionar, el motor produce una fuerza de excitación a una frecuencia de 3000 rpm. Si el peso del motor hace que los resortes se deformen 10 mm, determine la reducción de la fuerza transmitida al cimiento.

8.46 Un sistema electrónico sensible, de 30 kg de masa, está soportado por un sistema de resorte-amortiguador en el piso de un edificio sometido a un movimiento armónico en el rango de frecuencia de 10-75 Hz. Si la relación de amortiguamiento de la suspensión es de 0.25, determine la rigidez de la suspensión si la amplitud de vibración transmitida al sistema tiene que ser menor que 15 por ciento de la vibración del piso dentro del rango de frecuencia dado.

8.47 Una máquina que pesa 2600 lb está montada sobre resortes. Un pistón de peso $w = 60$ lb baja y sube en la máquina a una velocidad de 600 rpm con una carrera de 15 pulg. Considerando que el movimiento es armónico, determine la fuerza máxima transmitida al cimiento si (a) $k = 10000$ lb/pulg y (b) $k = 25000$ lb/pulg.

8.48 Una tarjeta de circuito impreso de 1 kg de masa está conectada a la base por medio de un aislador no amortiguado. Durante el envío, la base se somete a una perturbación armónica (movimiento) con amplitud de 2 mm y frecuencia de 2 Hz. Diseñe el aislador de modo que el desplazamiento transmitido a la tarjeta de circuito impreso sea de no más de 5 por ciento del movimiento de la base.

8.49 Un instrumento electrónico de 10 kg de masa se monta sobre una base de aislamiento. Si la base de aislamiento se somete a un choque en la forma de una velocidad gradual de 10 mm/s, encuentre la rigidez de la base de aislamiento si los valores máximos permisibles de deflexión y aceleración del instrumento se especifican como 10 mm y $20g$, respectivamente.

8.50 Un tanque de agua de 10^5 kg de masa está montado sobre una columna de concreto reforzado, como se muestra en la figura 8.48(a). Cuando un proyectil impacta el tanque, provoca un choque en la forma de una fuerza gradual, como se muestra en la figura 8.48(b). Determine la rigidez de la columna si la deflexión máxima del tanque se tiene que limitar a 0.5 m. El espectro de respuesta de la carga de choque se muestra en la figura 8.48(c).

8.51 Un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado que pesa 60 lb tiene una constante de resorte de 400 lb/pulg. Su base se somete a vibración armónica. (a) Cuando la base vibra con una amplitud de 2.0 pulg en resonancia, la amplitud de estado estable del cuerpo es de 5.0 pulg. Encuentre la relación de

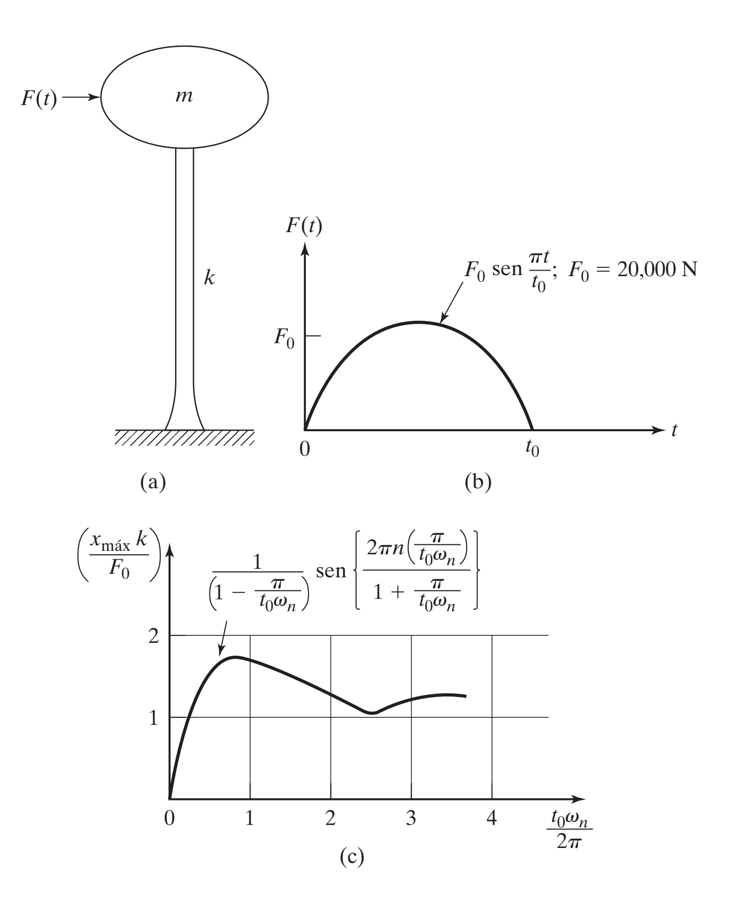


Figura 8.48

amortiguamiento del sistema. (b) Cuando la base vibra a una frecuencia de 10 Hz, la amplitud de estado estable del cuerpo es de 1.5 pulg. Encuentre la magnitud de la fuerza transmitida a la base.

8.52 Se utiliza un sistema de un solo grado de libertad para representar un automóvil, de masa m, constante de amortiguamiento c y rigidez k, el cual transita por una carretera cuya superficie es senoidal con amplitud Y y longitud de onda l. Si el automóvil viaja a una velocidad v, derive una expresión para la transmisibilidad del movimiento vertical de la masa del automóvil (m).

8.53 Un instrumento sensible de 100 kg de masa se instala en un lugar sometido a movimiento armónico con frecuencia de 20 Hz y aceleración de 0.5 m/s^2. Si el instrumento está soportado por un aislador de rigidez $k = 25 \times 10^4$ N/m y una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.05$, determine la aceleración máxima experimentada por el instrumento.

8.54 Un instrumento electrónico de 20 kg de masa se tiene que aislar de las vibraciones de un motor con frecuencias que van de 1 000 rpm a 3 000 rpm. Determine la rigidez del aislador no amortiguado para obtener un 90% de aislamiento.

8.55 Un delicado instrumento que pesa 200 N pende de cuatro resortes idénticos, cada uno con rigidez de 50 000 N/m, en una caja rígida como se muestra en la figura 8.49. La caja es transportada por un camión. Si el camión se somete a un movimiento armónico vertical dado por $y(t) = 0.02$ sen $10tm$, encuentre el desplazamiento máximo, y la velocidad y aceleración experimentados por el instrumento.

8.56 Un sistema torsional amortiguado se compone de una flecha y un rotor (disco). La rigidez torsional y la constante de amortiguamiento torsional de la flecha son $k_t = 6000$ N-m/rad y $c_t = 100$ N-m-s/rad.

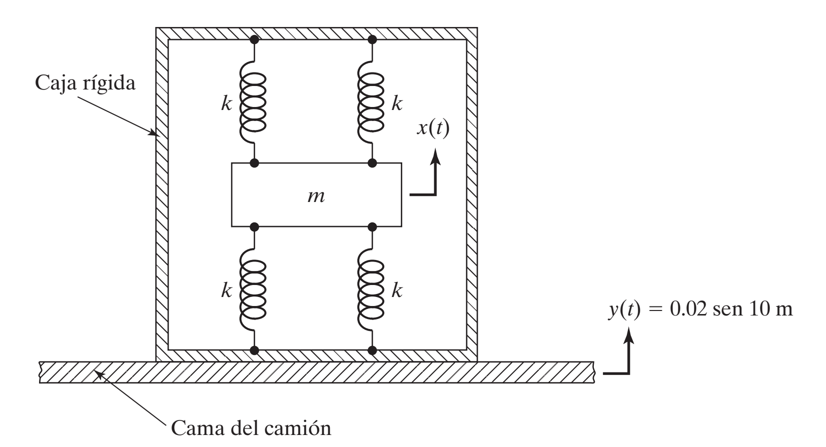


Figura 8.49

El momento de inercia de masa del rotor es $J_0 = 5$ kg-m^2. El rotor se somete a un par de torsión armónicamente variable de magnitud $M_t = 500$ N-m, el cual produce un desplazamiento angular de 5°. Encuentre la frecuencia del par de torsión armónicamente variable aplicado al rotor y el par de torsión máximo transmitido a la base o soporte del sistema.

8.57 La ecuación (8.106) proporciona la transmisibilidad de fuerza de un sistema de un solo grado de libertad amortiguado con movimiento de la base:

$$T_f = \frac{F_t}{kY} = r^2 \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde F_t es la magnitud de la fuerza transmitida a la masa. Determine las relaciones de frecuencia (r) con las cuales la transmisibilidad de fuerza alcanza valores máximos y mínimos. Analice sus resultados.

8.58 Derive una expresión para la transmisibilidad de desplazamiento relativa, $\frac{Z}{Y}$, donde $Z = X - Y$ para un sistema de un solo grado de libertad sometido a movimiento de la base, $y(t) = Y$ sen ωt.

8.59 Durante su funcionamiento, el compresor de un refrigerador, con masa de 75 kg y velocidad de rotación de 900 rpm, experimenta una fuerza dinámica de 200 N. El compresor está soportado por cuatro resortes idénticos, cada uno con una rigidez de k y amortiguamiento insignificante. Determine el valor de k si sólo se tiene que transmitir 15% de la fuerza dinámica al soporte o base. Encuentre inclusive el espacio libre para la unidad compresora.

8.60 Se tiene que aislar un instrumento electrónico, de 20 kg de masa, para lograr una frecuencia natural de 15 rad/s y una relación de amortiguamiento de 0.95. Los amortiguadores hidráulicos disponibles pueden producir una constante de amortiguamiento (c) en el rango de 10 N-s/m a 80 N-s/m. Determine si la relación de amortiguamiento deseada se puede lograr con un sistema pasivo. Si no se puede utilizar un sistema pasivo, diseñe un sistema de control activo adecuado para obtener la relación de amortiguamiento deseada.

8.61 Un sistema de un solo grado de libertad tiene una masa (m) de 5 kg, una rigidez (k) de 20 N/m y una constante de amortiguamiento (c) de 5 N-s/m. Diseñe un controlador activo para lograr un tiempo de asentamiento menor que 15 s para el sistema de lazo o circuito cerrado.

Sugerencia: Las ecuaciones (4.68) y (4.69) definen el tiempo de asentamiento.

8.62 Un sistema de un solo grado de libertad tiene una frecuencia natural no amortiguada de 20 rad/s y una relación de amortiguamiento de 0.20. Diseñe un sistema de control activo que logre una frecuencia

natural no amortiguada de 100 rad/s y una relación de amortiguamiento de 0.8. Suponga que la masa, rigidez y constante de amortiguamiento del sistema original permanecen en su lugar.

Sección 8.11 Absorbedores de vibración

8.63 Un compresor de aire con masa de 200 kg y desbalance de 0.01 kg-m experimenta una gran amplitud de vibración mientras funciona a 1200 rpm. Determine la masa y la constante de resorte del absorbedor que se tiene que agregar si las frecuencias naturales del sistema son de al menos 20 por ciento de la frecuencia impartida.

8.64 Un motor eléctrico, con desbalance de 2 kg-cm, está montado en el extremo de una viga de acero en voladizo, como se observa en la figura 8.50. Se observa que la viga vibra con grandes amplitudes a la velocidad de operación de 1500 rpm del motor. Se propone agregar un absorbedor de vibración para reducir la vibración de la viga. Determine la relación de la masa del absorbedor a la masa del motor necesaria para hacer que la frecuencia baja del sistema resultante sea igual a 75 por ciento de la velocidad de operación del motor. Si la masa del motor es de 300 kg, determine la rigidez y masa del absorbedor. Encuentre asimismo la amplitud de vibración de la masa del absorbedor.

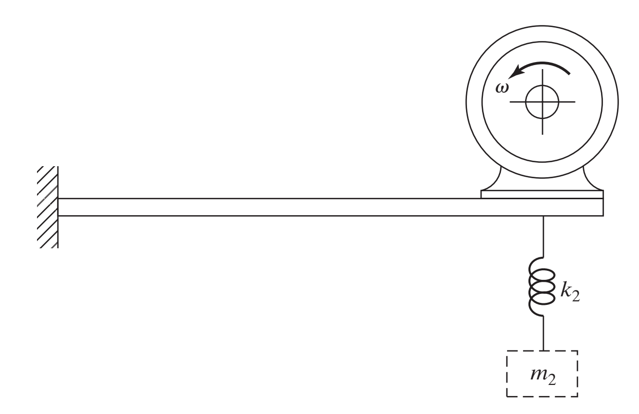


Figura 8.50

8.65* El tubo de alimentación de agua a una caldera en una planta termoeléctrica vibra violentamente cuando la velocidad de la bomba es de 800 rpm. Para reducir las vibraciones se instala en el tubo un absorbedor compuesto de un resorte de rigidez k_2 y masa de prueba m_2' de 1 kg. Esta configuración produce las frecuencias naturales del sistema de 750 rpm y 1000 rpm. Se desea mantener las frecuencias naturales del sistema fuera del rango de operación de la bomba, el cual es de 700 rpm a 1040 rpm. Determine los valores de k_2 y m_2 que satisfagan este requerimiento.

8.66 Se instala un motor reciprocante sobre el piso de un edificio, el cual se puede modelar como una placa rectangular rígida apoyada sobre cuatro columnas elásticas. El peso equivalente del motor y el piso es de 2000 lb. A la velocidad nominal del motor, la cual es de 600 rpm, los operadores experimentan una gran vibración del piso. Se decidió reducir estas vibraciones suspendiendo un sistema de masa-resorte de la superficie inferior del piso. Suponga que la rigidez de resorte e de $k_2 = 5000$ lb/pulg. (a) Encuentre el peso de la masa que se debe anexar para absorber las vibraciones. (b) ¿Cuáles serán las frecuencias naturales del sistema después de agregado el absorbedor?

8.67* Encuentre los valores de k_2 y m_2 en el problema 8.54 para alejar las frecuencias naturales del sistema al menos a 30 por ciento de la frecuencia forzada.

8.68* Una flecha hueca de acero de 2 pulg de diámetro externo, 1.5 pulg de diámetro interno y 30 pulg de longitud lleva un disco de 15 pulg de diámetro y 100 lb de peso. Otra flecha de acero hueca de 20 pulg

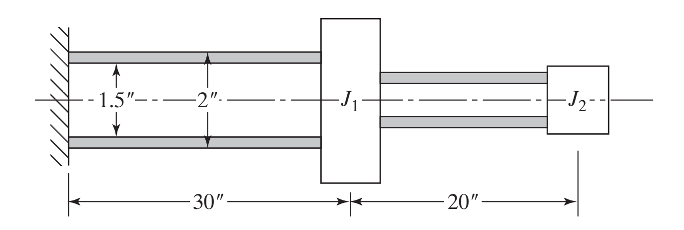


Figura 8.51

de longitud que lleva un disco sólido de 6 pulg de diámetro y 20 lb de peso se conecta al primer disco, como se muestra en la figura 8.51. Encuentre los diámetros interno y externo de la flecha, de modo que el sistema de flecha-disco conectado actúe como un absorbedor.

8.69* Un rotor, que tiene un momento de inercia de masa $J_1 = 15$ kg-m^2, está montado en el extremo de una flecha de acero que tiene una rigidez torsional de 0.6 MN-m/rad. El rotor vibra violentamente cuando se somete a un par de torsión armónico de 300 cos 200t N-m. Se tiene que conectar un absorbedor sintonizado, compuesto de un resorte torsional y un momento de inercia de masa (k_{t2} y J_2) al primer rotor para que absorba las vibraciones. Encuentre los valores de k_{t2} y J_2 de modo que las frecuencias naturales del sistema se alejen de la frecuencia forzada en al menos 20 por ciento.

8.70 Trace las gráficas de (Ω_1/ω_2) contra (m_2/m_1) y (Ω_2/ω_2) contra (m_2/m_1) a medida que (m_2/m_1) varía de 0 a 1.0 cuando $\omega_2/\omega_1 = 0.1$ y 10.0.

8.71 Determine el rango de operación de la relación de frecuencia ω_1/ω_2 de un absorbedor de vibración no amortiguado para limitar el valor de $|X_1/\delta_{est}|$ a 0.5. Suponga que $\omega_1 = \omega_2$ y $m_2 = 0.1m_1$.

8.72 Cuando se agrega un absorbedor de vibración no amortiguado, que tiene una masa de 30 kg y una rigidez k a un sistema de resorte-masa, con una masa de 40 kg y rigidez de 0.1 MN/m, la masa principal (masa de 40 kg) tiene una amplitud cero durante su operación de estado estable sujeta a una fuerza armónica de 300 N. Determine la amplitud de estado estable de la masa del absorbedor.

8.73 Un motor eléctrico, de 20 kg de masa y 1350 rpm de velocidad de operación, se coloca sobre una viga de acero doblemente empotrada de 15 cm de ancho y 12 cm de peralte, como se muestra en la figura 8.52. El motor tiene un desbalance rotatorio de 0.1 kg-m. La amplitud de vibración de la viga en operación de estado estable del motor se elimina al conectar debajo del motor un absorbedor de vibración no amortiguado, como se muestra en la figura 8.52. Determine la masa y rigidez del absorbedor de modo que la amplitud de la masa del absorbedor sea menor que 2 cm.

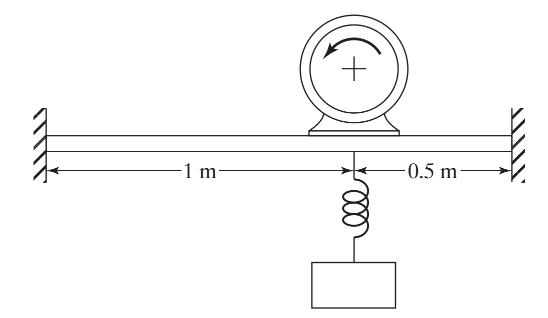


Figura 8.52

8.74 Un puente vibra violentamente cuando lo cruza un vehículo que produce una carga armónica de 600 N. Modelando el puente como un sistema de resorte-masa con masa de 15 000 kg y rigidez de 2 MN/m, diseñe un absorbedor de vibración amortiguado sintonizado adecuado. Determine la mejora obtenida en la amplitud del puente con el absorbedor.

8.75 Un pequeño motor, que pesa 100 lb, tiene una frecuencia natural de 100 rad/s. Se propone que se utilice un absorbedor de vibración no amortiguado que pesa 10 lb para suprimir las vibraciones cuando el motor opera a 80 rad/s. Determine la rigidez necesaria del absorbedor.

8.76 Considere el sistema que se muestra en la figura 8.53 en el cual una fuerza armónica actúa en la masa m. Derive la condición en la cual el desplazamiento de estado estable de la masa m será cero.

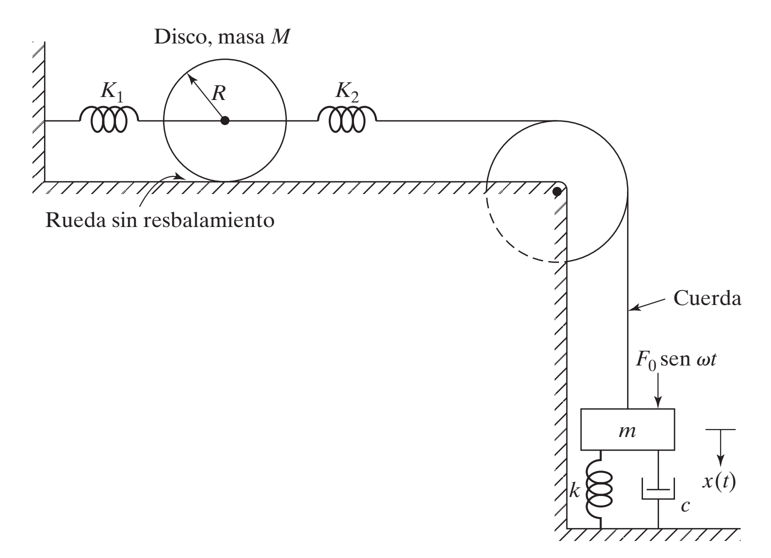


Figura 8.53

Sección 8.12 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

8.77 Utilizando MATLAB, trace la ecuación (8.94) para $\zeta = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ y 1 en el rango $0 \leq r \leq 3$.

8.78 Utilizando MATLAB, trace las ecuaciones (8.140) y (8.141) para $f = 1$, $\zeta = 0.2, 0.3$ y 0.4, y $\mu = 0.2$ y 0.5 en el rango $0.6 \leq \omega/\omega_1$.

8.79 Utilizando MATLAB, trace las relaciones $\mathbf{\Omega}_1/\omega_2$ y $\mathbf{\Omega}_2/\omega_2$ dadas por la ecuación (8.146) para $\omega_2/\omega_1 = 1.5, 3.0$ y 4.5 y $m_2/m_1 = 0$ a 1.

8.80 Resuelva el problema 8.13 utilizando `Program13.m`.

8.81 Escriba un programa de computadora para encontrar el desplazamiento de la masa principal y la masa auxiliar de un absorbedor de vibración dinámico amortiguado. Use este programa para generar los resultados de la figura 8.38.

Proyecto de diseño

8.82 Las vibraciones del suelo producidas por la operación de una grúa, una prensa de forja y un compresor de aire se transmiten a una máquina fresadora cercana y se percibe que no permiten alcanzar las precisiones especificadas durante las operaciones de fresado. Las vibraciones del suelo en las ubicaciones de la grúa, la prensa de forja y el compresor de aire son $x_c(t) = A_c e^{-\omega_c \zeta_c t}$ sen $\omega_c t$, $x_f(t) = A_f$, sen $\omega_f t$, y $x_a(t) = A_a$ sen $\omega_a t$, respectivamente, donde $A_c = 20$ μm, $A_f = 30$ μm, $A_a = 25$ μm, $\omega_c = 10$ Hz, $\omega_f = 15$ Hz, $\omega_a = 20$ Hz y $\zeta_c = 0.1$. Las vibraciones del suelo viajan a la velocidad de onda cortante del suelo, la cual es igual a 980 pies/seg, y las amplitudes se atenúan de acuerdo con la relación $A_r = A_0 e^{-0.005r}$, donde A_0 es la amplitud en la fuente y A_r es la amplitud a una distancia de 60 pies, 80 pies y 40 pies, respectivamente, de la máquina fresadora. La masa, rigidez y relación de amortiguamiento equivalentes del cabezal de la máquina herramienta en vibración vertical (en el lugar de la fresa) se determinan experimentalmente como 500 kg, 480 kN/m y 0.15, respectivamente. La masa equivalente de la base de la máquina herramienta es de 1000 kg. Se propone que se utilice un aislador para la máquina herramienta, como se muestra en la figura 8.54, para mejorar las precisiones de corte [8.2]. Diseñe un aislador de vibración adecuado, compuesto de una masa, resorte y amortiguador, como se muestra en la figura 8.54(b), para la fresadora de modo que el desplazamiento vertical máximo de la fresa, con respecto a la superficie horizontal que se está maquinado, debido a la vibración del suelo producida por las tres fuentes no exceda de 5 μm de pico a pico.

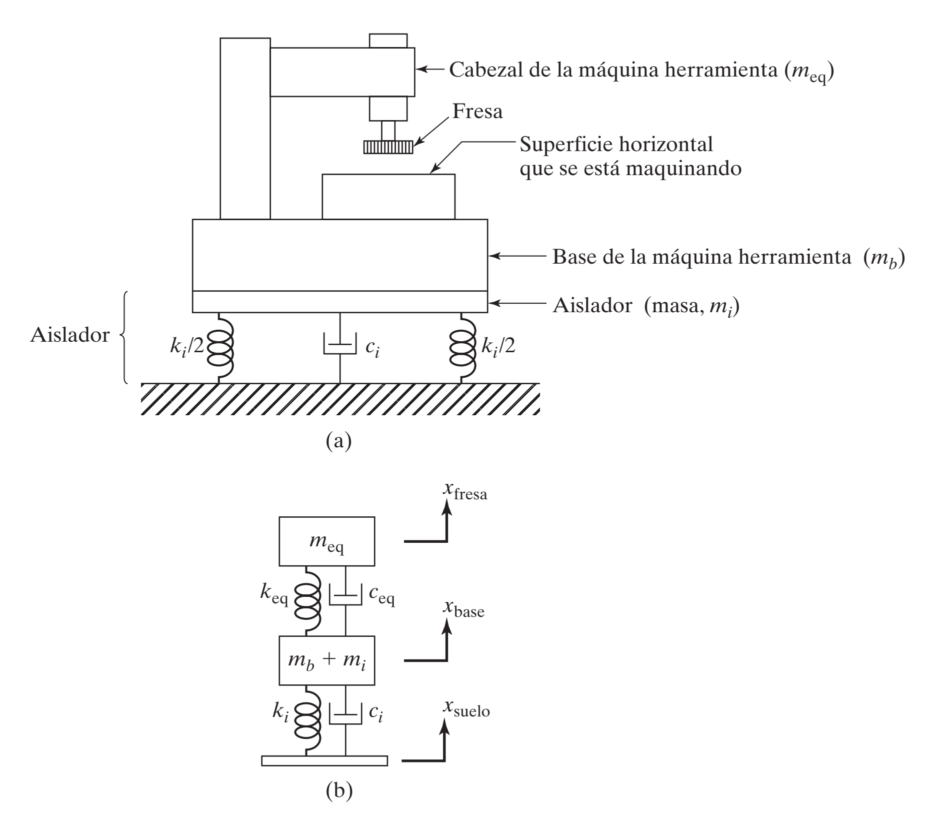


Figura 8.54

CAPÍTULO 9

Sistemas continuos

Stephen Prokf'yevich Timoshenko
(1878-1972)

Ingeniero ruso. Emigró a Estados Unidos, y ha sido uno de los autores más ampliamente conocido de libros en el campo de elasticidad, resistencia de materiales y vibraciones. Impartió la cátedra de mecánica en la Universidad de Michigan, posteriormente en la Universidad de Stanford, y se le considera el padre de la ingeniería mecánica en Estados Unidos. A la teoría mejorada que presentó en 1921 sobre la vibración de vigas se le conoce como teoría de vigas de Timoshenko. (Cortesía de *Applied Mechanics Reviews*).

Esquema del capítulo

En este capítulo veremos el análisis de vibración de sistemas continuos, también conocidos como *sistemas distribuidos*. Las ecuaciones de movimiento de sistemas continuos serán ecuaciones diferenciales parciales. Las ecuaciones de movimiento de varios sistemas, entre ellos la vibración transversal o de una cuerda o un cable estirado, la vibración longitudinal de una barra, la vibración torsional de una flecha o varilla, la vibración lateral de vigas, y la vibración transversal de una membrana, se derivan si se tiene en cuenta el diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimalmente pequeño del sistema particular, y se aplica la segunda ley del movimiento de Newton. La solución de vibración libre del sistema se halla suponiendo el movimiento armónico y aplicando las condiciones límite pertinentes. La solución ofrece una infinidad de frecuencias naturales y los modos correspondientes. El desplazamiento por vibración libre del sistema se ve como una superposición lineal de los modos, y las constantes implicadas se deben determinar a partir de las condiciones iniciales conocidas del sistema. En el caso de vibración transversal de una cuerda de longitud infinita se presenta la solución de onda viajera; también, en el de la vibración longitudinal de una barra, se encuentra la respuesta de vibración ocasionada por una fuerza inicial. Si se trata de vibración transversal de vigas, se resumen todas las condiciones límite comunes y se comprueba la ortogonalidad de los modos normales. La vibración forzada de vigas se estudia aplicando el método de superposición de modos. Veremos asimismo el efecto de una fuerza axial en las frecuencias naturales y modos de vigas. La *teoría de vigas gruesas*, también conocida como *teoría de vigas de Timoshenko*, se analiza tomando en cuenta los efectos de deformación por cortante o inercia rotatoria. La vibración libre de membranas rectangulares tiene aquí su estudio, y se describe el *método de Rayleigh*, que se basa en el cociente de Rayleigh, para hallar frecuencias fundamentales aproximadas de sistemas continuos. Se delinea la extensión del método, conocido como método de *Rayleigh-Ritz*, para determinar valores aproximados de varias frecuencias. Concluimos presentando las soluciones a la vibración libre y forzada de sistemas continuos típicos, que se pueden obtener utilizando MATLAB.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Derivar la ecuación de movimiento de un sistema continuo a partir del diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimalmente pequeño del sistema y aplicando la segunda ley de Newton.
- Encontrar las frecuencias naturales y modos del sistema por medio de una solución armónica.
- Determinar la solución de vibración libre utilizando una superposición lineal de los modos y condiciones iniciales.
- Hallar las soluciones de vibración libre a problemas de cuerdas, barras, flechas y membranas.
- Expresar la vibración de una cuerda infinita en la forma de ondas viajeras.
- Determinar la solución de vibración forzada de sistemas continuos por medio del método de superposición de modos.
- Examinar los efectos de fuerza axial, inercia rotatoria y deformación por cortante en la vibración de vigas.
- Aplicar los métodos de Rayleigh y Rayleigh-Ritz para hallar las frecuencias naturales aproximadas de sistemas continuos.
- Utilizar MATLAB para determinar las frecuencias naturales, los modos, y la respuesta forzada de sistemas continuos.

9.1 Introducción

Hasta ahora nos hemos ocupado de sistemas discretos en los que se suponía que la masa, el amortiguamiento y la elasticidad se presentaban sólo en determinados puntos discretos (o separados) del sistema. En muchos casos, conocidos como *sistemas continuos* o *distribuidos*, no es posible identificar masas, amortiguadores o resortes discretos. Debemos considerar entonces la distribución continua de la masa, el amortiguamiento y la elasticidad, y suponer que toda la infinidad de puntos del sistema puede vibrar. Esa es la razón de que a un sistema continuo también se le conozca como *sistema de grados de libertad infinitos*.

Si un sistema se modela como discreto, las ecuaciones regentes son ecuaciones diferenciales ordinarias, relativamente fáciles de resolver. Aunque si el sistema se modela como continuo, las ecuaciones regentes son ecuaciones diferenciales parciales, más difíciles. Sin embargo, la información obtenida por un modelo discreto de un sistema quizá no sea tan precisa como la obtenida con un modelo continuo. La alternativa entre los dos modelos debe hacerse con cuidado, con la debida consideración de factores como el propósito del análisis, la influencia del análisis en el diseño y el tiempo de computadora disponible.

En este capítulo consideraremos la vibración de sistemas continuos simples: cuerdas, barras, flechas, vigas y membranas. Un tratamiento más especializado de la vibración de elementos estructurales continuos se da en las referencias [9.1-9.3]. Por lo general, la ecuación de frecuencia de un sistema continuo es una ecuación trascendental que produce una infinidad de frecuencias naturales y modos normales. Esto contrasta con el comportamiento de los sistemas discretos, los cuales producen una cantidad finita de tales frecuencias y modos. Tenemos que aplicar condiciones límite para analizar las frecuencias naturales de un sistema continuo. El asunto de las condiciones límite no se presenta en el caso de sistemas discretos excepto de una manera indirecta, porque los coeficientes de influencia dependen de la manera en que se dé soporte al sistema.

9.2 Vibración transversal de una cuerda o cable

9.2.1 Ecuación de movimiento

Considere una cuerda elástica o un cable estirado, de longitud l sometido a una fuerza transversal $f(x, t)$ por unidad de longitud, como se muestra en la figura 9.1(a). Se supone que el desplazamiento transversal de la cuerda, $w(x, t)$ es pequeño. El equilibrio de las fuerzas en la dirección z resulta en (vea la figura 9.1(b)).

La fuerza neta que actúa en un elemento es igual a la fuerza de inercia que actúa en el elemento, o

$$(P + dP) \operatorname{sen}(\theta + d\theta) + f\, dx - P \operatorname{sen} \theta = \rho\, dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.1}$$

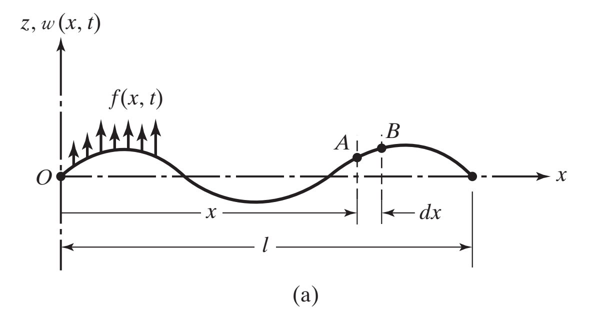
donde P es la tensión, ρ es la masa por longitud unitaria, y θ es el ángulo que la cuerda deformada hace con el eje x. Para una longitud elemental dx,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx \tag{9.2}$$

$$\operatorname{sen} \theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{9.3}$$

y

$$\operatorname{sen}(\theta + d\theta) \simeq \tan(\theta + d\theta) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \tag{9.4}$$



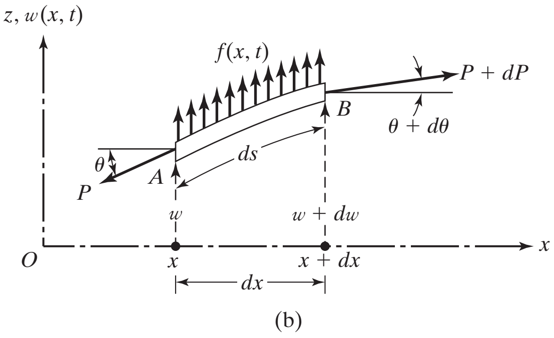


Figura 9.1 Cuerda vibratoria.

De ahí que la ecuación de vibración forzada de la cuerda no uniforme, ecuación (9.1), se simplifique como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \tag{9.5}$$

Si la cuerda es uniforme y la tensión es constante, la ecuación (9.5) se reduce a

$$P\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \tag{9.6}$$

Si $f(x, t) = 0$, obtenemos la ecuación de vibración libre

$$P\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \tag{9.7}$$

o

$$c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.8}$$

donde

$$c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2} \tag{9.9}$$

La ecuación (9.8) también se conoce como *ecuación de onda*.

9.2.2 Condiciones iniciales y límite

La ecuación de movimiento, (9.5) o sus formas especiales (9.6) y (9.7), es una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Como el orden de la derivada más alta de w con respecto a x y t en esta ecuación es dos, se tienen que especificar dos condiciones límite y dos condiciones iniciales para determinar la solución $w(x, t)$. Si la cuerda tiene una deflexión conocida $w_0(x)$ y velocidad $\dot{w}_0(x)$ en el instante $t = 0$, las condiciones iniciales se especifican como

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) \tag{9.10}$$

Si la cuerda está fija por un extremo, a saber $x = 0$, el desplazamiento w siempre debe ser cero, y así la condición límite es

$$w(x = 0, t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{9.11}$$

Si la cuerda o cable está conectado a un pasador que puede moverse en una dirección perpendicular como se muestra en la figura 9.2, el extremo no puede soportar una fuerza transversal. De ahí que la condición límite llegue a ser

$$P(x)\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \tag{9.12}$$

Si el extremo $x = 0$ está libre y P es una constante, entonces la ecuación (9.12) se escribe como

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \qquad t \geq 0 \tag{9.13}$$

Si el extremo $x = l$ está elásticamente restringido como se muestra en la figura 9.3, la condición límite es

$$P(x)\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -\underset{\sim}{k}\,w(x, t)\big|_{x=l}, \qquad t \geq 0 \tag{9.14}$$

donde $\underset{\sim}{k}$ es la constante de resorte.

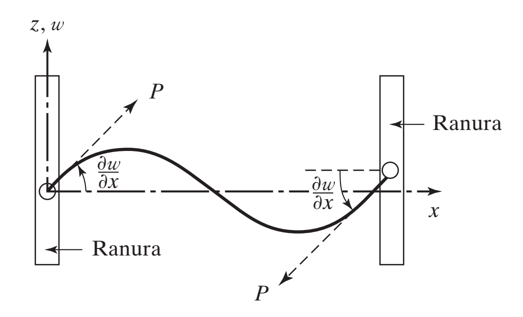


Figura 9.2 Cuerda con sus extremos conectados a pasadores.

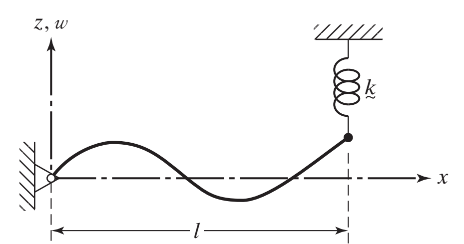


Figura 9.3 Cuerda con restricción elástica.

9.2.3 Vibración libre de una cuerda uniforme

La ecuación de vibración libre, (9.8), se puede resolver por el método de separación de variables, según el cual la solución se escribe como el producto de una función $W(x)$ (que depende sólo de x) y una función $T(t)$ (que depende sólo de t) [9.4]:

$$w(x,t) = W(x)T(t) \tag{9.15}$$

La sustitución de la ecuación (9.15) en la ecuación (9.8) conduce a

$$\frac{c^2}{W}\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \tag{9.16}$$

Como el lado izquierdo de esta ecuación depende sólo de x y el lado derecho depende sólo de t, su valor común debe ser constante, por ejemplo a, de modo que

$$\frac{c^2}{W}\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = a \tag{9.17}$$

Las ecuaciones implicadas en la ecuación (9.17) se escriben como

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{a}{c^2}W = 0 \tag{9.18}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} - aT = 0 \tag{9.19}$$

Como la constante a suele ser negativa (vea el problema 9.9), podemos hacer que $a = -\omega^2$ y escribir las ecuaciones (9.18) y (9.19) como

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}W = 0 \tag{9.20}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{9.21}$$

Las soluciones de estas ecuaciones resultan de

$$W(x) = A\cos\frac{\omega x}{c} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega x}{c} \tag{9.22}$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{9.23}$$

donde ω es la frecuencia de vibración y las constantes A, B, C y D se pueden evaluar a partir de las condiciones límite e iniciales.

9.2.4 Vibración libre de una cuerda con dos extremos fijos

Si la cuerda está fija por ambos extremos, las condiciones límite son $w(0, t) = w(l, t) = 0$ en todos los instantes $t \geq 0$. De ahí que, con la ecuación (9.15), obtengamos

$$W(0) = 0 \tag{9.24}$$

$$W(l) = 0 \tag{9.25}$$

Para satisfacer la ecuación (9.24), A debe ser cero en la ecuación (9.22). La ecuación (9.25) requiere que

$$B \operatorname{sen} \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{9.26}$$

Como B no puede ser cero para una solución no trivial, tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\omega l}{c} = 0 \tag{9.27}$$

La ecuación (9.27) se conoce como *ecuación de frecuencia* o *característica* y la satisfacen varios valores de ω. Los valores de ω se llaman *valores eigen* (o bien *frecuencias naturales* o *valores característicos*) del problema. La frecuencia natural *enésima* está dada por

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \qquad n = 1, 2, \,. \,.$$

o

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9.28}$$

La solución $w_n(x, t)$ correspondiente a ω_n se puede expresar como

$$w_n(x, t) = W_n(x) T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{nc\pi t}{l} + D_n \operatorname{sen} \frac{nc\pi t}{l} \right] \tag{9.29}$$

donde C_n y D_n son constantes arbitrarias. La solución $w_n(x, t)$ se conoce como el *modo enésimo de vibración; modo enésimo armónico*, o *modo enésimo normal* de la cuerda. En este modo, cada punto de la cuerda vibra con una amplitud proporcional al valor de W_n en ese punto, con la frecuencia circular $\omega_n = (nc\pi)/l$. La función $W_n(x)$ se llama modo normal *enésimo*, o función característica. En la figura 9.4 se muestran los tres primeros modos de vibración. El modo correspondiente a $n = 1$ se llama *modo fundamental*, y ω_1 se denomina *frecuencia fundamental*. El periodo fundamental es

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l}{c}$$

Los puntos donde $w_n = 0$ en todo momento se llaman *nodos*. Por consiguiente, el modo fundamental tiene dos nodos, en $x = 0$ y en $x = l$; el segundo modo tiene tres nodos, en $x = 0$, $x = l/2$ y $x = l$, etcétera.

La solución general de la ecuación (9.8), que satisface las condiciones límite de las ecuaciones (9.24) y (9.25), se obtiene mediante la superposición de todas las $w_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{nc\pi t}{l} + D_n \operatorname{sen} \frac{nc\pi t}{l} \right] \end{aligned} \tag{9.30}$$

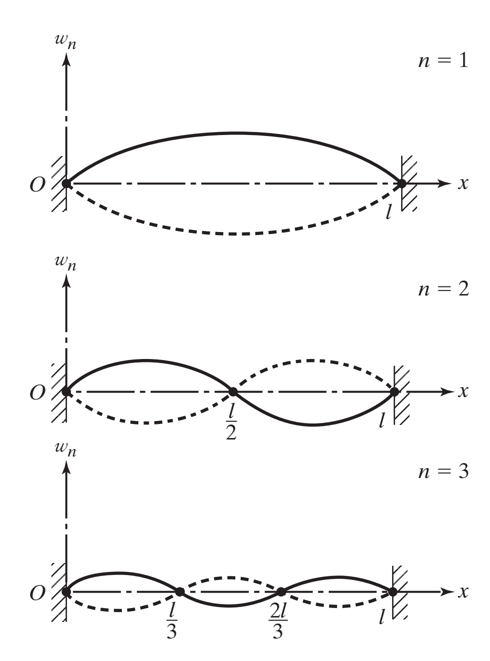


Figura 9.4 Modos de una cuerda.

Esta ecuación proporciona todas las vibraciones posibles de la cuerda; las condiciones iniciales especificadas determinan de forma única la vibración particular que ocurre. Las condiciones iniciales dan valores únicos de las constantes C_n y D_n. Si las condiciones iniciales se especifican como en la ecuación (9.10), obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = w_0(x) \tag{9.31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \dot{w}_0(x) \tag{9.32}$$

las cuales se ve que son expansiones de serie seno de Fourier de $w_0(x)$ y $\dot{w}_0(x)$ en el intervalo $0 \le x \le l$. Los valores de C_n y D_n se pueden determinar multiplicando las ecuaciones (9.31) y (9.32) por $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$ e integrándolas con respecto a x, de 0 a l:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, dx \tag{9.33}$$

$$D_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l \dot{w}_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, dx \tag{9.34}$$

Nota: La solución de la ecuación (9.30) se puede identificar como el *método de superposición de modos* puesto que la respuesta está expresada como una superposición de los modos normales. El procedimiento es aplicable no sólo a la solución de vibración libre sino también a la de vibración forzada de sistemas continuos.

Ejemplo 9.1 Respuesta dinámica de una cuerda punteada o pulsada

Si una cuerda de longitud l, con ambos extremos fijos, se puntea o pulsa en su punto medio como se muestra en la figura 9.5 y luego se suelta, determine su movimiento subsiguiente.

Solución: La ecuación (9.30) da la solución y las ecuaciones (9.33) y (9.34) dan C_n y D_n, respectivamente. Como no hay velocidad inicial alguna, $\dot{w}_0(x) = 0$ y así $D_n = 0$. Por consiguiente, la solución de la ecuación (9.30) se reduce a

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{nc\pi t}{l} \tag{E.1}$$

donde

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{E.2}$$

La deflexión inicial $w_0(x)$ está dada por

$$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l} & \text{para } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h(l-x)}{l} & \text{para } \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \tag{E.3}$$

Sustituyendo la ecuación (E.3) en la ecuación (E.2) se puede evaluar C_n:

$$C_n = \frac{2}{l}\left\{ \int_0^{l/2} \frac{2hx}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx + \int_{l/2}^{l} \frac{2h}{l}(l-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8h}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} & \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{E.4}$$

Utilizando la relación

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{E.5}$$

la solución deseada se puede expresar como

$$w(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c t}{l} - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi c t}{l} + \cdots \right\} \tag{E.6}$$

En este caso no se excitan los armónicos pares.

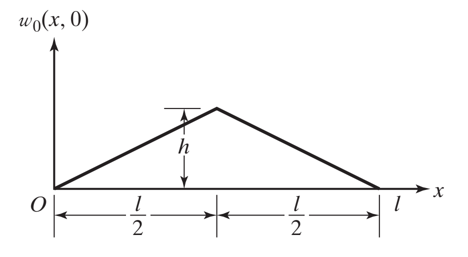


Figura 9.5 Deflexión inicial de la cuerda.

■

9.2.5 Solución de la onda viajera

La solución de la ecuación de onda, (9.8), para una cuerda de longitud infinita se expresa como [9.5]

$$w(x,t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct) \tag{9.35}$$

donde w_1 y w_2 son funciones arbitrarias de $(x - ct)$ y $(x + ct)$, respectivamente. Para demostrar que la ecuación (9.35) es la solución correcta de la ecuación (9.8), primero diferenciamos la ecuación (9.35):

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = w_1''(x - ct) + w_2''(x + ct) \tag{9.36}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c^2 w_1''(x - ct) + c^2 w_2''(x + ct) \tag{9.37}$$

La sustitución de estas ecuaciones en la ecuación (9.8) revela que se satisface la ecuación de onda. En la ecuación (9.35), $w_1(x - ct)$ y $w_2(x + ct)$ representan ondas que se propagan en las direcciones positiva y negativa del eje x, respectivamente, con una velocidad c.

Para un problema dado, las funciones arbitrarias w_1 y w_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales, ecuación (9.10). La sustitución de la ecuación (9.35) en la ecuación (9.10) proporciona, en $t = 0$,

$$w_1(x) + w_2(x) = w_0(x) \tag{9.38}$$

$$-cw_1'(x) + cw_2'(x) = \dot{w}_0(x) \tag{9.39}$$

donde la prima indica diferenciación con respecto al argumento respectivo en $t = 0$ (es decir, con respecto a x). La integración de la ecuación (9.39) produce

$$-w_1(x) + w_2(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\,dx' \tag{9.40}$$

donde x_0 es una constante. La solución de las ecuaciones (9.38) y (9.40) ofrece w_1 y w_2:

$$w_1(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\,dx'\right] \tag{9.41}$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\,dx'\right] \tag{9.42}$$

Reemplazando x por $(x - ct)$ y $(x + ct)$, respectivamente, en las ecuaciones (9.41) y (9.42), obtenemos la solución total:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w_1(x - ct) + w_2(x + ct) \\ &= \frac{1}{2}[w_0(x - ct) + w_0(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \dot{w}_0(x')\,dx' \end{aligned} \tag{9.43}$$

Es preciso tener presente los puntos siguientes:

1. A partir de la ecuación (9.43) se ve que no es necesario aplicar condiciones límite al problema.
2. La solución resultante de la ecuación (9.43) se puede expresar como

$$w(x, t) = w_D(x, t) + w_V(x, t) \tag{9.44}$$

donde $w_D(x, t)$ indica las ondas que se propagan debido al desplazamiento inicial conocido $w_0(x)$ con velocidad inicial cero, y $w_v(x, t)$ representa ondas que viajan debido sólo a la velocidad inicial conocida $\dot{w}_0(x)$ con desplazamiento inicial cero.

La vibración transversal de una cuerda con ambos extremos fijos excitada por el impacto transversal de una carga elástica en un punto intermedio se consideró en la sección [9.6]. Triantafyllou [9.7] presentó una revisión de la literatura sobre la dinámica de cables y cadenas.

9.3 Vibración longitudinal de una barra o varilla

9.3.1 Ecuación de movimiento y solución

Considere una barra elástica de longitud l con área de sección transversal variable $A(x)$, como se muestra en la figura 9.6. Las fuerzas que actúan en las secciones transversales de un pequeño elemento de la barra están dadas por P y $P + dP$ con

$$P = \sigma A = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.45}$$

donde σ es el esfuerzo axial, E es el módulo de Young, u es el desplazamiento axial, y $\partial u/\partial x$ es la deformación axial. Si $f(x, t)$ indica la fuerza externa por unidad de longitud, la suma de las fuerzas en la dirección x da la ecuación de movimiento

$$(P + dP) + f\,dx - P = \rho A\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.46}$$

donde ρ es la densidad de masa de la barra. Utilizando la relación $dP = (\partial P/\partial x)dx$ y la ecuación (9.45), la ecuación de movimiento para la vibración longitudinal forzada de una barra no uniforme, ecuación (9.46), se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] + f(x, t) = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \tag{9.47}$$

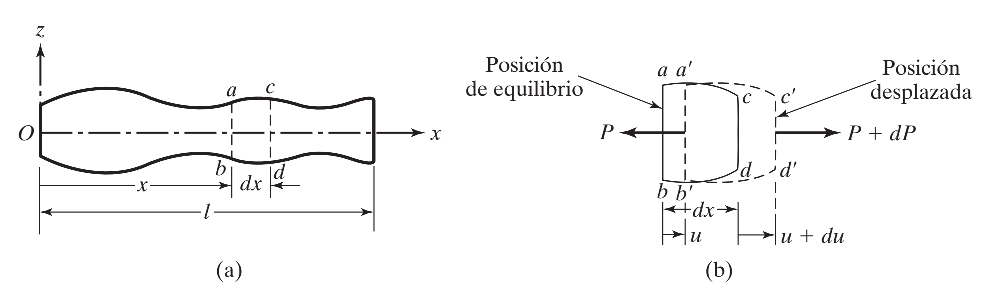


Figura 9.6 Vibración longitudinal de una barra.

Para una barra uniforme, la ecuación (9.47) se reduce a

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \tag{9.48}$$

La ecuación de vibración libre se obtiene de la ecuación (9.48), ajustando $f = 0$, como

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \tag{9.49}$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{9.50}$$

Observe que las ecuaciones (9.47) y (9.50) son parecidas a las ecuaciones (9.5), (9.6), (9.8) y (9.9), respectivamente. La solución de la ecuación, obtenida como en el caso de la ecuación (9.8), se escribe por lo tanto como

$$u(x, t) = U(x)T(t) \equiv \left(\underset{\sim}{A}\cos\frac{\omega x}{c} + \underset{\sim}{B}\operatorname{sen}\frac{\omega x}{c}\right)(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t) \tag{9.51}$$ [1]

Condiciones en los extremos de la barra	Condiciones límite	Ecuación de frecuencia	Modo (Función normal)	Frecuencias naturales
Un extremo empotrado y el otro libre	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos\frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Los dos extremos libres	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\operatorname{sen}\frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Ambos extremos empotrados	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\operatorname{sen}\frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Figura 9.7 Condiciones límite comunes para una barra sometida a vibración longitudinal.

donde la función $U(x)$ representa el modo normal y depende sólo de x y la función $T(t)$ depende sólo de t. Si la barra tiene un desplazamiento axial conocido $u_0(t)$ y una velocidad inicial $\dot{u}_0(x)$, las condiciones iniciales se pueden formular como

$$u(x, t = 0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{u}_0(x) \tag{9.52}$$

Las condiciones límite comunes y las ecuaciones de frecuencia correspondientes para la vibración longitudinal de barras uniformes se muestran en la figura 9.7.

[1] Utilizamos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ en esta sección; A se utiliza para indicar el área de sección transversal de la barra.

Ejemplo 9.2 Condiciones límite para una barra

Una barra uniforme de área de sección transversal A, longitud l y módulo de Young E, tiene sus dos extremos conectados por resortes, amortiguadores y masas, como se muestra en la figura 9.8(a). Establezca las condiciones límite.

Solución: Los diagramas de cuerpo libre de las masas m_1 y m_2 se muestran en la figura 9.8(b). A partir de esto, vemos que el extremo izquierdo ($x = 0$), la fuerza desarrollada en la barra debido a u y $\partial u/\partial x$ positivos debe ser igual a la suma de las fuerzas del resorte, del amortiguador y de la inercia:

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k_1 u(0, t) + c_1 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) \tag{E.1}$$

Asimismo, en el extremo derecho ($x = l$), la fuerza en la barra desarrollada por u y $\partial u/\partial x$ positivos debe ser igual a la suma de las fuerzas del resorte, del amortiguador y de la inercia:

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -k_2 u(l, t) - c_2 \frac{\partial u}{\partial t}(l, t) - m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \tag{E.2}$$

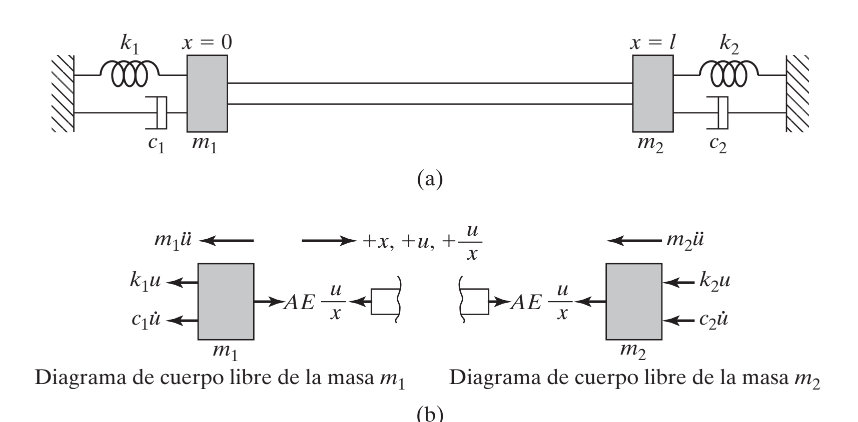


Figura 9.8 Barra con sus extremos conectados a resortes, masas y amortiguadores.

■

9.3.2 Ortogonalidad de funciones normales

Las funciones normales para la vibración longitudinal de barras satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^l U_i(x) U_j(x)\, dx = 0 \tag{9.53}$$

donde $U_i(x)$ y $U_j(x)$ denotan las funciones normales correspondientes a las frecuencias naturales i-ésima y j-ésima ω_i y ω_j, respectivamente. Cuando $u(x, t) = U_i(x)T(t)$ y $u(x, t) = U_j(x)T(t)$ se asumen como soluciones, la ecuación (9.49) ofrece

$$c^2 \frac{d^2 U_i(x)}{dx^2} + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \qquad \text{o} \qquad c^2 U_i''(x) + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \tag{9.54}$$

y

$$c^2\frac{d^2U_j(x)}{dx^2}+\omega_j^2U_j(x)=0 \qquad \text{o} \qquad c^2U_j''(x)+\omega_j^2U_j(x)=0 \tag{9.55}$$

donde $U_i''=\dfrac{d^2U_i}{dx^2}$ y $U_j''=\dfrac{d^2U_j}{dx^2}$. La multiplicación de la ecuación (9.54) por U_j y de la ecuación (9.55) por U_i presenta

$$c^2U_i''U_j+\omega_i^2U_iU_j=0 \tag{9.56}$$

$$c^2U_j''U_i+\omega_j^2U_jU_i=0 \tag{9.57}$$

La resta de la ecuación (9.57) de la ecuación (9.56) y la integración de 0 a l resulta en

$$\int_0^l U_iU_j\,dx=-\frac{c^2}{\omega_i^2-\omega_j^2}\int_0^l(U_i''U_j-U_j''U_i)\,dx$$

$$=-\frac{c^2}{\omega_i^2-\omega_j^2}\left[U_i'U_j-U_j'U_i\right]\Big|_0^l \tag{9.58}$$

Se puede demostrar que el lado derecho de la ecuación (9.58) es cero con cualquier combinación de condiciones límite. Por ejemplo, si la barra está fija en $x=0$ y libre en $x=l$,

$$u(0,t)=0, \qquad t\geq 0 \qquad \text{o} \qquad U(0)=0 \tag{9.59}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \qquad t\geq 0 \qquad \text{o} \qquad U'(l)=0 \tag{9.60}$$

Por lo tanto, $(U_i'U_j-U_j'U_i)|_{x=l}=0$ porque U' es cero (ecuación (9.60)) y $(U_i'U_j-U_j'U_i)|_{x=0}=0$ porque U es cero (ecuación 9.59)). La ecuación (9.58) se reduce por tanto a la ecuación (9.53), la cual también se conoce como *principio de ortogonalidad para las funciones normales*.

Ejemplo 9.3 Vibraciones libres de una barra con un extremo empotrado y el otro libre

Encuentre las frecuencias naturales y la solución de vibración libre de una barra empotrada en un extremo y libre en el otro.

Solución: Que la barra esté empotrada en $x=0$ y libre en $x=l$, de modo que las condiciones límite puedan ser

$$u(0,t)=0, \qquad t\geq 0 \tag{E.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \qquad t\geq 0 \tag{E.2}$$

El uso de la ecuación (E.1) en la ecuación (9.51) proporciona $\underset{\sim}{A}=0$, en tanto que el uso de la ecuación (E.2) ofrece la ecuación de frecuencia

$$\underset{\sim}{B}\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c}=0 \qquad \text{o} \qquad \cos\frac{\omega l}{c}=0 \tag{E.3}$$

Los valores eigen o frecuencias naturales son

$$\frac{\omega_n l}{c} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o

$$\omega_n = \frac{(2n + 1)\pi c}{2l}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{E.4}$$

Por lo tanto, la solución total (vibración libre) de la ecuación (9.49) se escribe, utilizando el método de superposición de modos, como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n + 1)\pi ct}{2l} + D_n \operatorname{sen} \frac{(2n + 1)\pi ct}{2l} \right] \end{aligned} \tag{E.5}$$

donde los valores de las constantes C_n y D_n se determinan a partir de las condiciones iniciales, como en las ecuaciones (9.33) y (9.34)

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \operatorname{sen} \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \, dx \tag{E.6}$$

$$D_n = \frac{4}{(2n + 1)\pi c} \int_0^l \dot{u}_0(x) \operatorname{sen} \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \, dx \tag{E.7}$$

■

Ejemplo 9.4 Frecuencias naturales de una barra que soporta una masa

Encuentre las frecuencias naturales de una barra con un extremo empotrado y una masa adjunta en el otro extremo, como se muestra en la figura 9.9.

Solución: La ecuación (9.49) proporciona la ecuación que rige la vibración axial de la barra y la solución la presenta la ecuación (9.51). La condición límite en el extremo empotrado ($x = 0$)

$$u(0, t) = 0 \tag{E.1}$$

conduce a $\underset{\sim}{A} = 0$ en la ecuación (9.51). En el extremo $x = l$, la fuerza de tensión en la barra debe ser igual a la fuerza de inercia de la masa vibratoria M, y por consiguiente

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \tag{E.2}$$

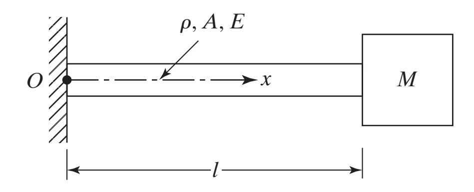


Figura 9.9 Barra que soporta una masa en un extremo.

Con la ayuda de la ecuación (9.51), esta ecuación se expresa como

$$AE\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c}(C\cos\omega t + D\,\text{sen}\,\omega t) = M\omega^2\,\text{sen}\,\frac{\omega l}{c}(C\cos\omega t + D\,\text{sen}\,\omega t)$$

Es decir,

$$\frac{AE\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = M\omega^2\,\text{sen}\,\frac{\omega l}{c}$$

o

$$\alpha\tan\alpha = \beta \tag{E.3}$$

donde

$$\alpha = \frac{\omega l}{c} \tag{E.4}$$

y

$$\beta = \frac{AEl}{c^2M} = \frac{A\rho l}{M} = \frac{m}{M} \tag{E.5}$$

donde m es la masa de la barra. La ecuación (E.3) es la ecuación de frecuencia (en la forma de una ecuación trascendental) cuya solución presenta las frecuencias naturales del sistema. Las dos primeras frecuencias naturales se muestran en la tabla 9.1 para diferentes valores del parámetro β.

TABLA 9.1

	Valores de la relación de masa β				
	0.01	**0.1**	**1.0**	**10.0**	**100.0**
Valor de $\alpha_1\left(\omega_1 = \frac{\alpha_1 c}{l}\right)$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
Valor de $\alpha_2\left(\omega_2 = \frac{\alpha_2 c}{l}\right)$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658

Nota: Si la masa de la barra es insignificante comparada con la masa adjunta, $m \simeq 0$,

$$c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{EAl}{m}\right)^{1/2} \to \infty \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{\omega l}{c} \to 0$$

En este caso

$$\tan\frac{\omega l}{c} \simeq \frac{\omega l}{c}$$

y la ecuación de frecuencia (E.3) se puede considerar como

$$\left(\frac{\omega l}{c}\right)^2 = \beta$$

Ésta proporciona el valor aproximado de la frecuencia fundamental

$$\omega_1 = \frac{c}{l}\beta^{1/2} = \frac{c}{l}\left(\frac{\rho A l}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{EA}{lM}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\delta_s}\right)^{1/2}$$

donde

$$\delta_s = \frac{Mgl}{EA}$$

representa el alargamiento estático de la barra por la acción de la carga Mg.

■

Ejemplo 9.5 Vibraciones de una barra sometida a fuerza axial

Una barra de área de sección transversal uniforme A, densidad ρ, módulo de elasticidad E y longitud l está empotrada en un extremo y libre en el otro. Se somete a una fuerza axial F_0 en su extremo libre, como se muestra en la figura 9.10(a). Estudie las vibraciones resultantes si la fuerza F_0 se retira de repente.

Solución: La deformación por tensión inducida por la fuerza axial F_0 en la barra es

$$\varepsilon = \frac{F_0}{EA}$$

Por lo tanto, el desplazamiento de la barra justo antes de que se elimine la fuerza F_0 (desplazamiento inicial) es (vea la figura (9.10b))

$$u_0 = u(x, 0) = \varepsilon x = \frac{F_0 x}{EA}, \qquad 0 \le x \le l \tag{E.1}$$

Como la velocidad inicial es cero, tenemos

$$\dot{u}_0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad 0 \le x \le l \tag{E.2}$$

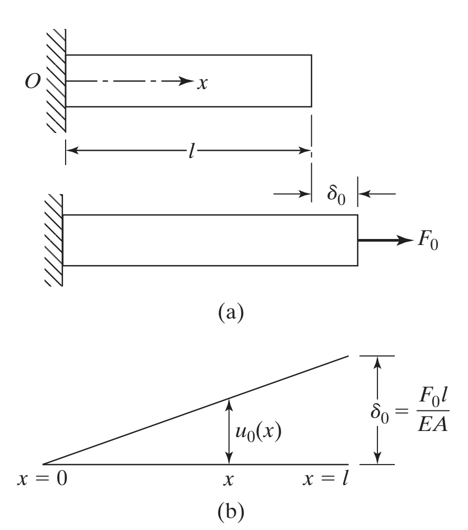


Figura 9.10 Barra sometida a una fuerza axial en su extremo.

La ecuación (E.5) del ejemplo 9.3 proporciona la solución general de una barra con un extremo empotrado y el otro libre:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} + D_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} \right] \tag{E.3}$$

donde de las ecuaciones (E.6) y (E.7) del ejemplo 9.3 resultan C_n y D_n. Dado que $\dot{u}_0 = 0$, obtenemos $D_n = 0$. Utilizando el desplazamiento inicial de la ecuación (E.1) en la ecuación (E.6) del ejemplo 9.3, obtenemos

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{F_0 x}{EA} \cdot \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{8F_0 l}{EA\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \tag{E.4}$$

Por lo tanto, la solución es

$$u(x,t) = \frac{8F_0 l}{EA\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{2l} \tag{E.5}$$

Las ecuaciones (E.3) y (E.5) indican que el movimiento de un punto típico en $x = x_0$ en la barra se compone de las amplitudes

$$C_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}$$

que corresponden a las frecuencias circulares

$$\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$$

■

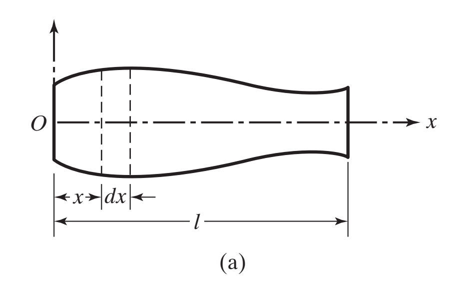
9.4 Vibración torsional de una flecha o varilla

La figura 9.11 representa una flecha no uniforme sometida a un par de torsión externo $f(x, t)$ por longitud unitaria. Si $\theta(x, t)$ indica el ángulo de torsión de la sección transversal, la relación entre la deflexión torsional y el momento de torsión $M_t(x, t)$ es según [9.8]

$$M_t(x,t) = GJ(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) \tag{9.61}$$

donde G es el módulo de cortante y $GJ(x)$ es la rigidez torsional, con $J(x)$ mostrando el momento polar de inercia de la sección transversal en el caso de una sección circular. Si el momento polar de inercia de masa de la flecha por longitud unitaria es I_0, el par de torsión de inercia que actúa en un elemento de longitud dx es

$$I_0\, dx \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$



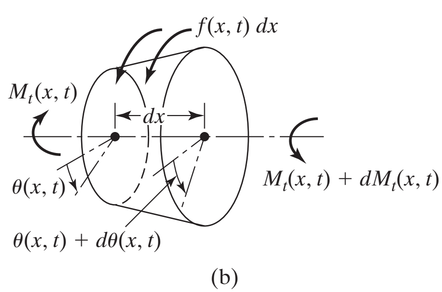


Figura 9.11 Vibración torsional de una flecha.

Si un par de torsión externo $f(x, t)$ actúa en la flecha por unidad de longitud, la aplicación de la segunda ley de Newton define la ecuación de movimiento:

$$(M_t + dM_t) + f\,dx - M_t = I_0\,dx\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{9.62}$$

Expresando dM_t como

$$\frac{\partial M_t}{\partial x}\,dx$$

y utilizando la ecuación (9.61), se puede obtener la ecuación de vibración torsional forzada para una flecha no uniforme:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)\right] + f(x,t) = I_0(x)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t) \tag{9.63}$$

Para una flecha no uniforme, la ecuación (9.63) adopta la forma

$$GJ\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = I_0\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t) \tag{9.64}$$

la cual, en el caso de vibración libre, se reduce a

$$c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t) \tag{9.65}$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I_0}} \tag{9.66}$$

Observe que las ecuaciones (9.63) a (9.66) son semejantes a las ecuaciones derivadas en los casos de vibración transversal de una cuerda y vibración longitudinal de una barra. Si la barra tiene una sección transversal uniforme, $I_0 = \rho J$. De ahí que la ecuación (9.66) se escriba como

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{9.67}$$

Condiciones en los extremos de la barra	Condiciones límite	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Frecuencias naturales
Un extremo empotrado y el otro libre	$\theta(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Los dos extremos libres	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\operatorname{sen} \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Ambos extremos empotrados	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\operatorname{sen} \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Figura 9.12 Condiciones límite para flechas uniformes (varillas) sometidas a vibración torsional.

Si a la flecha se le imprime un desplazamiento angular $\theta_0(x)$ y una velocidad angular $\dot{\theta}_0(x)$ en el instante $t = 0$, las condiciones iniciales se expresan como

$$\theta(x, t = 0) = \theta_0(x)$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{\theta}_0(x) \tag{9.68}$$

La solución general de la ecuación (9.65) se expresa como

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t) \tag{9.69}$$

Las condiciones límite comunes para la vibración torsional de flechas uniformes se indican en la figura 9.12 junto con las ecuaciones de frecuencia y funciones normales correspondientes.

Ejemplo 9.6 Frecuencias naturales de una fresa

Encuentre las frecuencias naturales de la fresa que se muestra en la figura 9.13 cuando el extremo libre del vástago está fijo. Asuma la rigidez torsional del vástago como GJ y el momento de inercia de masa de la fresa como I_0.

Solución: La ecuación (9.69) proporciona la solución general. Con esta ecuación y la condición límite de fijeza $\theta(0, t) = 0$, obtenemos $A = 0$. La condición limite en $x = l$ se puede expresar como

$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = -I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t) \tag{E.1}$$

l

Vástago

Fresa

Figura 9.13 Fresa.

Es decir,

$$BGJ\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = BI_0\omega^2 \operatorname{sen}\frac{\omega l}{c}$$

o

$$\frac{\omega l}{c}\tan\frac{\omega l}{c} = \frac{J\rho l}{I_0} = \frac{\underset{\sim}{J}_{\text{vástago}}}{I_0} \tag{E.2}$$

donde $\underset{\sim}{J}_{\text{vástago}} = J\rho l$. La ecuación (E.2) se puede expresar como

$$\alpha \tan \alpha = \beta \qquad \text{donde } \alpha = \frac{\omega l}{c} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{\underset{\sim}{J}_{\text{vástago}}}{I_0} \tag{E.3}$$

La solución de la ecuación (E.3), y por consiguiente las frecuencias naturales del sistema, se obtienen como en el caso del ejemplo 9.4.

■

9.5 Vibración lateral de vigas

9.5.1 Ecuación de movimiento

Considere el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la viga que se muestra en la figura 9.14, donde $M(x, t)$ es el momento de flexión, $V(x, t)$ es la fuerza cortante, y $f(x, t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud de la viga. Como la fuerza de inercia que actúa en el elemento de la viga es

$$\rho A(x)\, dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

la ecuación de movimiento producido por la fuerza en la dirección z da

$$-(V + dV) + f(x, t)\, dx + V = \rho A(x)\, dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \tag{9.70}$$

donde ρ es la densidad de masa y $A(x)$ es el área de sección transversal de la viga. La ecuación de movimiento producido por el momento con respecto al eje y que pasa por el punto O en la figura 9.14 conduce a

$$(M + dM) - (V + dV)\, dx + f(x, t)\, dx \frac{dx}{2} - M = 0 \tag{9.71}$$

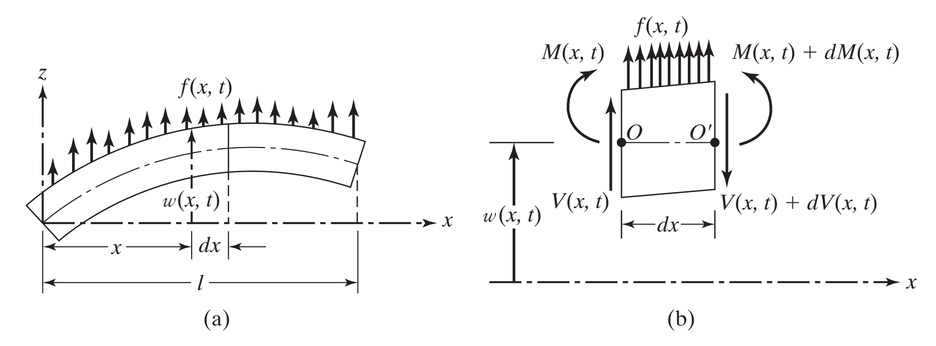


Figura 9.14 Viga sometida a flexión.

Si escribimos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx \qquad \text{y} \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx$$

y se omiten los términos que implican segundas potencias en dx, las ecuaciones (9.70) y (9.71) se escriben como

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\,(x, t) + f(x, t) = \rho A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,(x, t) \tag{9.72}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \tag{9.73}$$

Utilizando la relación $V = \partial M/\partial x$ de la ecuación (9.73), la ecuación (9.72) se escribe como

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,(x, t) \tag{9.74}$$

De acuerdo con la teoría elemental de flexión de vigas (también conocida como *teoría de vigas delgadas* o de *Euler-Bernoulli*), la relación entre el momento de flexión y la deflexión se expresa como [9.8]

$$M(x, t) = EI(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,(x, t) \tag{9.75}$$

donde E es el módulo de Young e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje y. Insertando la ecuación (9.75) en la (9.74) obtenemos la ecuación de movimiento para la vibración forzada lateral de una viga no uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,(x, t)\right] + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,(x, t) = f(x, t) \tag{9.76}$$

Para una viga uniforme, la ecuación (9.76) se reduce a

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \tag{9.77}$$

Para vibración libre, $f(x, t) = 0$ y por consiguiente la ecuación de movimiento se escribe como

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \tag{9.78}$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{9.79}$$

9.5.2 Condiciones iniciales

Como la ecuación de movimiento implica una derivada de segundo orden con respecto al tiempo y una derivada de cuarto orden con respecto a x, se requieren dos condiciones iniciales y cuatro condiciones límite para determinar una solución única para $w(x, t)$. Los valores de desplazamiento lateral y velocidad se suelen especificar como $w_0(x)$ y $\dot{w}_0(x)$ en el instante $t = 0$, de modo que las condiciones iniciales son

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) \tag{9.80}$$

9.5.3 Vibración libre

La solución de vibración libre se determina con el método de separación de variables como

$$w(x, t) = W(x)T(t) \tag{9.81}$$

Sustituyendo la ecuación (9.81) en la (9.78) y reordenando se llega a

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2 \tag{9.82}$$

donde $a = \omega^2$ es una constante positiva (vea el problema 9.45). La ecuación (9.82) se puede escribir como dos ecuaciones:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \tag{9.83}$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{9.84}$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{9.85}$$

La solución de la ecuación (9.84) se puede expresar como

$$T(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \tag{9.86}$$

donde A y B son constantes que se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales. Para la solución de la ecuación (9.83), supongamos

$$W(x) = Ce^{sx} \tag{9.87}$$

donde C y s son constantes, y derive la ecuación auxiliar como

$$s^4 - \beta^4 = 0 \tag{9.88}$$

Las raíces de esta ecuación son

$$s_{1,2} = \pm\beta, \qquad s_{3,4} = \pm i\beta \tag{9.89}$$

De ahí que la solución de la ecuación (9.83) sea

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \tag{9.90}$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes. La ecuación (9.90) también se expresa como

$$W(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \operatorname{senh} \beta x \tag{9.91}$$

o

$$\begin{aligned} W(x) = {} & C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) \\ & + C_3(\operatorname{sen} \beta x + \operatorname{senh} \beta x) + C_4(\operatorname{sen} \beta x - \operatorname{senh} \beta x) \end{aligned} \tag{9.92}$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 en cada caso, son constantes diferentes. Las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 se determinan a partir de las condiciones límite. Las frecuencias naturales de la viga se calculan según la ecuación (9.85) como

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \tag{9.93}$$

La función $W(x)$ se conoce como *modo normal* o *función característica* de la viga y ω se conoce como *frecuencia natural de vibración.* Para cualquier viga habrá una infinitud de modos normales con una frecuencia natural asociada a cada modo normal. Las constantes desconocidas C_1 a C_4 en la ecuación (9.91) o (9.92) y el valor de β en la ecuación (9.93) se pueden determinar a partir de las condiciones limite de la viga como se indica a continuación.

9.5.4 Condiciones límite

Las condiciones límite comunes son las siguientes:

1. *Extremo libre:*

$$\text{Momento de flexión} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Fuerza cortante} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{9.94}$$

2. *Extremo simplemente apoyado (de pasador):*

$$\text{Deflexión} = w = 0, \qquad \text{Momento de flexión} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{9.95}$$

3. *Extremo fijo (empotrado):*

$$\text{Deflexión} = 0, \qquad \text{Pendiente} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{9.96}$$

Las ecuaciones de frecuencia, los modos (funciones normales) y las frecuencias naturales para vigas con condiciones límite comunes se presentan en la figura 9.15 [9.13, 9.17]. Ahora consideraremos algunas otras posibles condiciones límite para una viga.

Condiciones en los extremos de la viga	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Valor de $\beta_n l$
Ambos extremos articulados	$\text{sen}\ \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen}\ \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Ambos extremos libres	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen}\ \beta_n x + \text{senh}\ \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\dfrac{\text{sen}\ \beta_n l - \text{senh}\ \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)
Ambos extremos empotrados	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{senh}\ \beta\, _n x\, _n x - \text{sen}\ \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\dfrac{\text{senh}\ \beta_n l - \text{sen}\ \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Un extremo empotrado y el otro libre	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen}\ \beta_n x - \text{senh}\ \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\dfrac{\text{sen}\ \beta_n l + \text{senh}\ \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Un extremo empotrado y el otro articulado	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen}\ \beta_n x - \text{senh}\ \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\dfrac{\text{sen}\ \beta_n l - \text{senh}\ \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Un extremo articulado y el otro libre	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen}\ \beta_n x + \alpha_n\, \text{senh}\ \beta_n x]$ donde $\alpha_n = \left(\dfrac{\text{sen}\ \beta_n l}{\text{senh}\ \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)

Figura 9.15 Condiciones límite comunes para la vibración transversal de una viga.

4. *Extremo conectado a un resorte lineal, amortiguador y masa* (figura 9.16(a)). Cuando el extremo de una viga experimenta un desplazamiento transversal w y pendiente $\partial w/\partial x$, con velocidad $\partial w/\partial t$ y aceleración $\partial^2 w/\partial t^2$, las fuerzas resistentes producidas por el resorte, amortiguador y masa son proporcionales a w, $\partial w/\partial t$ y $\partial^2 w/\partial t^2$, respectivamente. Esta fuerza resistente está equilibrada por la fuerza cortante en el extremo. Por consiguiente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = a\left[kw + c\frac{\partial w}{\partial t} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \tag{9.97}$$

donde $a = -1$ para el extremo izquierdo y $+1$ para el extremo derecho de la viga. Además, el momento de flexión debe ser cero; por consiguiente

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{9.98}$$

5. *Extremo conectado a un resorte torsional*, *un amortiguador torsional e inercia rotacional* (figura 9.16(b)): en este caso, las condiciones límite son

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a\left[k_t\frac{\partial w}{\partial x} + c_t\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_0\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\right] \tag{9.99}$$

donde $a = +1$ para el extremo izquierdo y -1 para el extremo derecho de la viga, y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{9.100}$$

9.5.5 Ortogonalidad de funciones normales

Las funciones normales $W(x)$ satisfacen la ecuación (9.83):

$$c^2\frac{d^4 W}{dx^4}(x) - \omega^2 W(x) = 0 \tag{9.101}$$

Sean $W_i(x)$ y $W_j(x)$ las funciones normales correspondientes a las frecuencias naturales ω_i y $\omega_j (i \neq j)$, de modo que

$$c^2\frac{d^4 W_i}{dx^4} - \omega_i^2 W_i = 0 \tag{9.102}$$

y

$$c^2\frac{d^4 W_j}{dx^4} - \omega_j^2 W_j = 0 \tag{9.103}$$

Multiplicando la ecuación (9.102) por W_j y la ecuación (9.103) por W_I, restando las ecuaciones resultantes de la otra e integrando de 0 a l da

$$\int_0^l \left[c^2\frac{d^4 W_i}{dx^4}W_j - \omega_i^2 W_i W_j\right]dx - \int_0^l \left[c^2\frac{d^4 W_j}{dx^4}W_i - \omega_j^2 W_j W_i\right]dx = 0$$

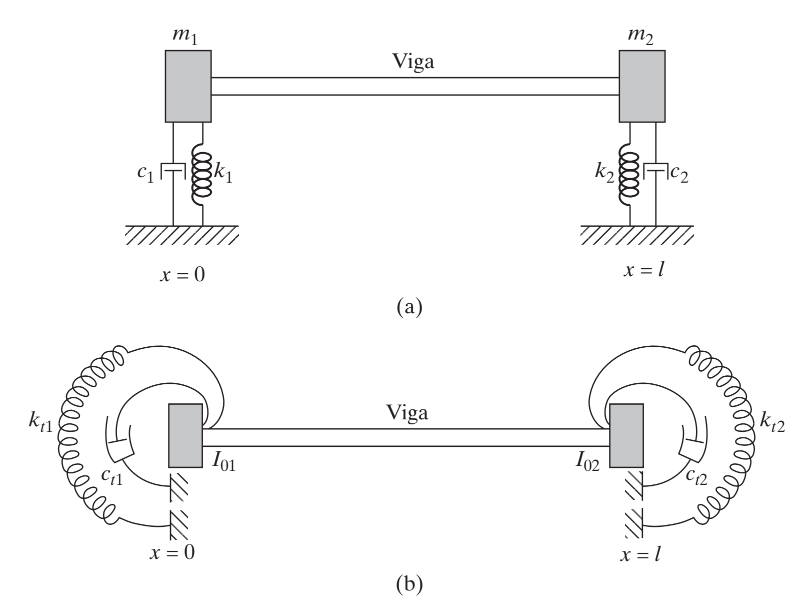


Figura 9.16 Vigas conectadas con resortes-amortiguadores-masas en los extremos.

o

$$\int_0^l W_i W_j \, dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l (W_i'''' W_j - W_i W_j'''') \, dx \tag{9.104}$$

donde una prima indica diferenciación con respecto a x. El lado derecho de la ecuación (9.104) se puede evaluar mediante integración por partes para obtener

$$\int_0^l W_i W_j \, dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[W_i W_j''' - W_j W_i''' + W_j' W_i'' - W_i' W_j'' \right] \Big|_0^l \tag{9.105}$$

Se puede demostrar que el lado derecho de la ecuación (9.105) es cero por cualquier combinación de condiciones de extremos empotrados o simplemente apoyados. En un extremo libremente apoyado, el momento de flexión y la fuerza cortante son iguales a cero de modo que

$$W'' = 0, \qquad W''' = 0 \tag{9.106}$$

Para un extremo empotrado, la deflexión y pendiente son cero:

$$W = 0, \qquad W' = 0 \tag{9.107}$$

En un extremo simplemente apoyado, el momento de flexión y deflexión son cero:

$$W'' = 0 \qquad W = 0 \tag{9.108}$$

Como cada término en el lado derecho de la ecuación (9.105) es cero con $x = 0$ o $x = l$ para cualquier combinación de las condiciones límite en las ecuaciones (9.106) a (9.108), la ecuación (9.105) se reduce a

$$\int_0^l W_i W_j \, dx = 0 \tag{9.109}$$

la cual comprueba la ortogonalidad de funciones normales para la vibración transversal de vigas.

Ejemplo 9.7 Frecuencias naturales de una viga con un extremo empotrado y el otro articulado (de pasador)

Determine las frecuencias naturales de vibración de una viga uniforme empotrada en $x = 0$ y simplemente apoyada en $x = l$.

Solución: Las condiciones límite se pueden formular como

$$W(0) = 0 \tag{E.1}$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 \tag{E.2}$$

$$W(l) = 0 \tag{E.3}$$

$$EI\frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \tag{E.4}$$

La condición (E.1) conduce a

$$C_1 + C_3 = 0 \tag{E.5}$$

en la ecuación (9.91), mientras que las ecuaciones (E.2) y (9.91) proporcionan

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=0} = \beta[-C_1 \operatorname{sen} \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \operatorname{senh} \beta x + C_4 \cosh \beta x]_{x=0} = 0$$

o

$$\beta[C_2 + C_4] = 0 \tag{E.6}$$

Así, la solución de la ecuación (9.91) se vuelve

$$W(x) = C_1(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_2(\operatorname{sen} \beta x - \operatorname{senh} \beta x) \tag{E.7}$$

Aplicando las condiciones (E.3) y (E.4) a la ecuación (E.7) se obtiene

$$C_1(\cos \beta l - \cosh \beta l) + C_2(\operatorname{sen} \beta l - \operatorname{senh} \beta l) = 0 \tag{E.8}$$

$$-C_1(\cos \beta l + \cosh \beta l) - C_2(\operatorname{sen} \beta l + \operatorname{senh} \beta l) = 0 \tag{E.9}$$

Para una solución no trivial de C_1 y C_2, el determinante de sus coeficientes debe ser cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} (\cos \beta l - \cosh \beta l) & (\operatorname{sen} \beta l - \operatorname{senh} \beta l) \\ -(\cos \beta l + \cosh \beta l) & -(\operatorname{sen} \beta l + \operatorname{senh} \beta l) \end{vmatrix} = 0 \tag{E.10}$$

Expandiendo el determinante se obtiene la ecuación de frecuencia

$$\cos \beta l \operatorname{senh} \beta l - \operatorname{sen} \beta l \cosh \beta l = 0$$

o

$$\tan \beta l = \tanh \beta l \tag{E.11}$$

Las raíces de esta ecuación $\beta_n l$, proporcionan las frecuencias naturales de vibración

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \left(\frac{EI}{\rho A l^4} \right)^{1/2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{E.12}$$

donde la figura 9.15 aporta los valores de $\beta_n l$, $n = 1, 2, \ldots$ que satisfacen la ecuación (E.11). Si el valor de C_2 correspondiente a β_n, se indica como C_{2n}, se puede expresar en función de los términos de C_{1n} de acuerdo con la ecuación (E.8) como

$$C_{2n} = -C_{1n} \left(\frac{\cos\ \beta_n l - \cosh\ \beta_n l}{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l} \right) \tag{E.13}$$

De ahí que la ecuación (E.7) se pueda escribir como

$$W_n(x) = C_{1n} \left[(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \left(\frac{\cos\ \beta_n l - \cosh\ \beta_n l}{\operatorname{sen} \beta_n l - \operatorname{senh} \beta_n l} \right) (\operatorname{sen} \beta_n x - \operatorname{senh} \beta_n x) \right] \tag{E.14}$$

Los modos normales de vibración se pueden obtener aplicando la ecuación (9.81)

$$w_n(x, t) = W_n(x) \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t \right) \tag{E.15}$$

con $W_n(x)$ dada por la ecuación (E.14). La solución general o total de la viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro se puede expresar por medio de la suma de modos normales:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \tag{E.16}$$

■

9.5.6 Vibración forzada

La solución de vibración forzada de una viga se puede determinar con el principio de superposición de modos. Para esto, la deflexión de la viga se supone como

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \tag{9.110}$$

donde $W_n(x)$ es el *enésimo* modo normal o función característica que satisface la ecuación diferencial (ecuación 9.101)

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A W_n(x) = 0; \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9.111}$$

y $q_n(t)$ es la coordenada generalizada en el modo *enésimo*. Sustituyendo la ecuación (9.110) en la ecuación de vibración forzada, ecuación (9.77), obtenemos

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = f(x, t) \tag{9.112}$$

En vista de la ecuación (9.111), la ecuación (9.112)) se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \tag{9.113}$$

Multiplicando la ecuación (9.113) por $W_m(x)$, integrando de 0 a l y utilizando la condición de ortogonalidad, ecuación (9.109), obtenemos

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho A b} Q_n(t) \tag{9.114}$$

donde $Q_n(t)$es la fuerza generalizada correspondiente a $q_n(t)$

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) W_n(x)\, dx \tag{9.115}$$

y la constante b se obtiene por

$$b = \int_0^l W_n^2(x)\, dx \tag{9.116}$$

La ecuación (9.114) es, en esencia, la misma que la ecuación de movimiento de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad. Utilizando la integral de Duhamel, la solución de la ecuación (9.114) se expresa como

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau)\, d\tau \tag{9.117}$$

donde los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (9.117) representan la vibración libre o transitoria (que resultan de las condiciones iniciales) y el tercer término indica la vibración de estado estable (que resulta de la función forzada). Una vez que se resuelve la ecuación (9.117) por $n = 1, 2, \ldots$, la solución total se determina a partir de la ecuación (9.110).

Ejemplo 9.8 Vibración forzada de una viga simplemente apoyada

Encuentre la respuesta de estado estable de una viga con ambos extremos articulados sujeta a una fuerza armónica $f(x, t) = f_0 \operatorname{sen} \omega t$ aplicada en $x = a$, como se muestra en la figura 9.17.

Solución: *Método a seguir*: Método de superposición de modos.

La siguiente ecuación expresa las funciones de modo normal de una viga con ambos extremos articulados (vea la figura 9.15; también el problema 9.33)

$$W_n(x) = \operatorname{sen} \beta_n x = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \tag{E.1}$$

donde

$$\beta_n l = n\pi \tag{E.2}$$

La fuerza generalizada $Q_n(t)$, resultado de la ecuación (9.115), se vuelve

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) \text{ sen } \beta_n x \, dx = f_0 \text{ sen} \frac{n\pi a}{l} \text{ sen } \omega t \tag{E.3}$$

La ecuación (9.117) proporciona la respuesta de estado estable de la viga

$$q_n(t) = \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \text{ sen } \omega_n (t - \tau) \, d\tau \tag{E.4}$$

donde

$$b = \int_0^l W_n^2(x) \, dx = \int_0^l \text{sen}^2 \beta_n x \, dx = \frac{l}{2} \tag{E.5}$$

La solución de la ecuación (E.4) se puede expresar como

$$q_n(t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \frac{\text{sen} \frac{n\pi a}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \text{ sen } \omega t \tag{E.6}$$

De este modo la ecuación (9.110) presenta la respuesta de la viga:

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \text{ sen} \frac{n\pi a}{l} \text{ sen} \frac{n\pi x}{l} \text{ sen } \omega t \tag{E.7}$$

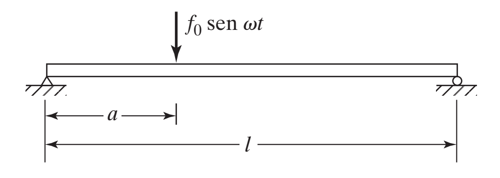


Figura 9.17 Viga doblemente articulada sujeta a una fuerza armónica.

■

9.5.7 Efecto de una fuerza axial

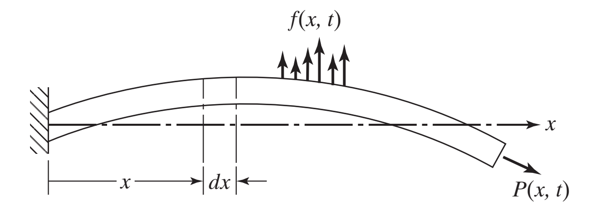
El problema de vibraciones de una viga bajo una fuerza axial se aplica en el estudio de vibraciones de cables y tensores de postes. Por ejemplo, aunque las vibraciones de un cable se pueden hallar tratándolo como una cuerda equivalente, muchos cables han fallado debido a fatiga provocada por la flexión alterna. Los torbellinos producidos por el cable en viento ligero provocan la flexión alterna. Por consiguiente debemos considerar los efectos de la fuerza axial y la rigidez a flexión en las vibraciones laterales en el estudio de falla por fatiga de cables.

Para determinar el efecto de una fuerza axial $P(x, t)$ en las vibraciones producidas por flexión de una viga, considere la ecuación de un elemento de la viga, como se muestra en la figura 9.18. Para el movimiento vertical, tenemos

$$-(V + dV) + f \, dx + V + (P + dP) \text{ sen}(\theta + d\theta) - P \text{ sen } \theta = \rho A \, dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.118}$$

y para el movimiento de rotación alrededor de 0,

$$(M + dM) - (V + dV) \, dx + f \, dx \frac{dx}{2} - M = 0 \tag{9.119}$$



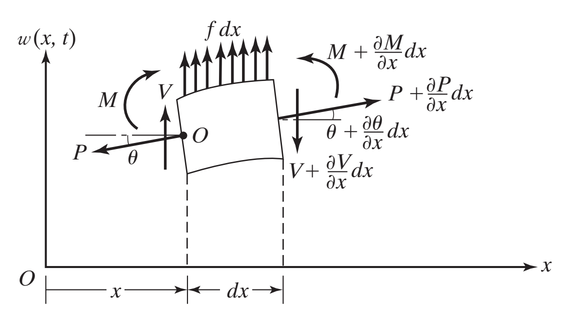


Figura 9.18 Un elemento de una viga sometida a carga exial.

Para deflexiones pequeñas

$$\operatorname{sen}(\theta + d\theta) \simeq \theta + d\theta = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Con ésta se pueden combinar las ecuaciones (9.118), (9.119) y (9.75) para obtener una sola ecuación diferencial de movimiento

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f \tag{9.120}$$

Para la vibración libre de una viga uniforme, la ecuación (9.120) se reduce a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{9.121}$$

La solución de la ecuación (9.121) se obtiene aplicando el método de separación de variables como

$$w(x, t) = W(x)(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) \tag{9.122}$$

La sustitución de la ecuación (9.122) en la ecuación (9.121) da

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - P \frac{d^2 W}{dx^2} - \rho A \omega^2 W = 0 \tag{9.123}$$

Suponiendo que la solución $W(x)$ sea

$$W(x) = Ce^{sx} \tag{9.124}$$

en la ecuación (9.123), se puede obtener la ecuación auxiliar:

$$s^4 - \frac{P}{EI} s^2 - \frac{\rho A \omega^2}{EI} = 0 \tag{9.125}$$

Las raíces de la ecuación (9.125) son

$$s_1^2, s_2^2 = \frac{P}{2EI} \pm \left(\frac{P^2}{4E^2I^2} + \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{1/2} \tag{9.126}$$

y por tanto la solución se puede expresar como (con valor absoluto de s_2)

$$W(x) = C_1 \cosh s_1 x + C_2 \operatorname{senh} s_1 x + C_3 \cos s_2 x + C_4 \operatorname{sen} s_2 x \tag{9.127}$$

donde se tienen que determinar las constantes C_1 a C_4 a partir de las condiciones límite.

Ejemplo 9.9 Viga sometida a una fuerza de compresión axial

Encuentre las frecuencias naturales de una viga simplemente apoyada sujeta a una fuerza de compresión axial.

Solución: Las condiciones límite son

$$W(0) = 0 \tag{E.1}$$

$$\frac{d^2W}{dx^2}(0) = 0 \tag{E.2}$$

$$W(l) = 0 \tag{E.3}$$

$$\frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \tag{E.4}$$

Las ecuaciones (E.1) y (E.2) requieren que $C_1 = C_3 = 0$ en la ecuación (9.127), y por consiguiente

$$W(x) = C_2 \operatorname{senh} s_1 x + C_4 \operatorname{sen} s_2 x \tag{E.5}$$

La aplicación de las ecuaciones (E.3) y (E.4) a la ecuación (E.5) lleva a

$$\operatorname{senh} s_1 l \cdot \operatorname{sen} s_2 l = 0 \tag{E.6}$$

Como senh $s_1 l > 0$ para todos los valores de $s_1 l \neq 0$, las únicas raíces de esta ecuación son

$$s_2 l = n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{E.7}$$

Así, las ecuaciones (E.7) y (9.126) proporcionan las frecuencias naturales de vibración

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(n^4 + \frac{n^2 P l^2}{\pi^2 EI} \right)^{1/2} \tag{E.8}$$

Como la fuerza axial P es de compresión, P es negativa. Además, de acuerdo con la resistencia de materiales, la siguiente ecuación presenta la carga de pandeo de Euler mínima para una viga simplemente apoyada [9.9]

$$P_{\text{cri}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{E.9}$$

Por lo que la ecuación (E.8) se puede escribir como

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \left(n^4 - n^2 \frac{P}{P_{\text{cri}}} \right)^{1/2} \tag{E.10}$$

A raíz de este ejemplo se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Si $P = 0$, la frecuencia natural será la misma que la de una viga simplemente apoyada como aparece en la figura 9.15.
2. Si $EI = 0$, la frecuencia natural (vea la ecuación (E.8)) se reduce a la de una cuerda tensa.
3. Si $P > 0$, la frecuencia natural se incrementa a medida que la fuerza de tensión hace más rígida la viga.
4. A medida que $P \rightarrow P_{\text{cri}}$, la frecuencia natural tiende a cero para $n = 1$.

■

9.5.8 Efectos de inercia rotatoria y deformación por cortante

Si las dimensiones de sección transversal no son tan pequeñas comparadas con la longitud de la viga, tenemos que considerar los efectos de inercia rotatoria y deformación por cortante. El procedimiento, presentado por Timoshenko [9.10] se conoce como *teoría de vigas gruesas de Timoshenko*. Analice el elemento de la viga que se muestra en la figura 9.19. Si se omite el efecto de la deformación por cortante, la tangente a la línea de centros deformada $O'T$ coincide con la normal a la cara $Q'R'$ (puesto que las secciones transversales normales a la línea de centros permanecen normales incluso después de la deformación). Debido a la deformación por cortante, la tangente a la línea de centros deformada $O'T$ no será perpendicular a la cara $Q'R'$. El ángulo γ entre la tangente a la línea de centros deformada $(O'T)$ y la normal a la cara $(O'N)$ indica la deformación por cortante del elemento. Como el cortante positivo sobre la cara derecha $Q'R'$ actúa hacia abajo, tenemos, por la figura 9.19,

$$\gamma = \phi - \frac{\partial w}{\partial x} \tag{9.128}$$

donde ϕ indica la pendiente la curva de deflexión producida sólo por la deformación de flexión. Observe que a causa del cortante solo, el elemento experimenta distorsión pero no rotación.

El momento de flexión M y la fuerza cortante están relacionados con ϕ y w por las fórmulas[2]

$$M = EI\,\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{9.129}$$

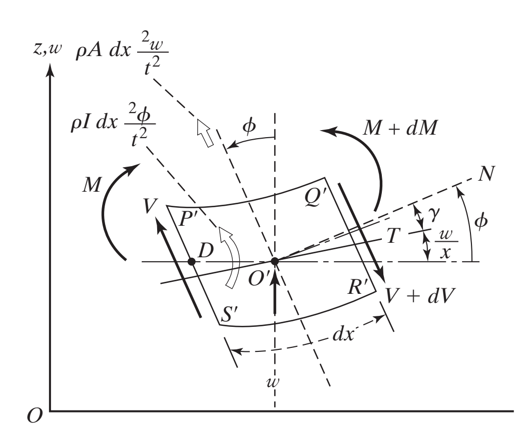


Figura 9.19 Un elemento de viga de Timoshenko.

[2] La ecuación (9.129) es parecida a la (9.75). La ecuación (9.130) se obtiene de la manera siguiente:

Fuerza cortante = Esfuerzo cortante × Área = Deformación por cortante × Módulo de cortante × Área

o bien

$$V = \gamma GA$$

Esta ecuación se modifica como $V = kAG\gamma$ al introducir un factor k en el lado derecho para que se haga cargo de la forma de la sección transversal.

y

$$V = kAG\gamma = kAG\left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{9.130}$$

donde G indica el módulo de rigidez del material de la viga y k es una constante, también conocida como *coeficiente de cortante de Timoshenko*, la cual depende de la forma de la sección transversal. Para una sección rectangular el valor de k es $5/6$; para una sección circular es $9/10$ [9.11].

Las ecuaciones de movimiento para el elemento que se muestra en la figura 9.19 se derivan como sigue:

1. Para traslación en la dirección z:

$$\begin{aligned} &-[V(x,t) + dV(x,t)] + f(x,t)\,dx + V(x,t) \\ &= \rho A(x)\,dx\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \\ &\equiv \text{Inercia traslacional del elemento} \end{aligned} \tag{9.131}$$

2. Para rotación con respecto a una línea que pasa por el punto D paralela al eje y:

$$\begin{aligned} &[M(x,t) + dM(x,t)] + [V(x,t) + dV(x,t)]\,dx \\ &+ f(x,t)\,dx\,\frac{dx}{2} - M(x,t) \\ &= \rho I(x)\,dx\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \equiv \text{Inercia rotatoria del elemento} \end{aligned} \tag{9.132}$$

Utilizando las relaciones

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx \qquad \text{y} \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx$$

junto con las ecuaciones (9.129) y (9.130), y omitiendo los términos que implican segundas potencias en dx, las ecuaciones (9.131) y (9.132) se expresan como

$$-kAG\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + f(x,t) = \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.133}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - kAG\left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \rho I\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{9.134}$$

Resolviendo la ecuación (9.133) para $\partial\phi/\partial x$ y restando el resultado en la ecuación (9.134), obtenemos la ecuación de movimiento deseada para la vibración forzada de una viga uniforme:

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\,\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$$

$$+ \frac{EI}{kAG}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{kAG}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f = 0 \tag{9.135}$$

Para vibración libre, $f = 0$, y la ecuación (9.135) se reduce a

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \tag{9.136}$$

Se tienen que aplicar las siguientes condiciones límite en la solución de la ecuación (9.135) o (9.136):

1. Extremo empotrado:

$$\phi = w = 0$$

2. Extremo simplemente apoyado:

$$EI\frac{\partial \phi}{\partial x} = w = 0$$

3. Extremo libre:

$$kAG\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi\right) = EI\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Ejemplo 9.10 Frecuencias naturales de una viga simplemente apoyada

Determine los efectos de inercia rotatoria y deformación por cortante sobre las frecuencias naturales de una viga uniforme simplemente apoyada.

Solución: Definiendo

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \qquad \text{y} \qquad r^2 = \frac{I}{A} \tag{E.1}$$

La ecuación (9.136) se escribe como

$$\alpha^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho r^2}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \tag{E.2}$$

Podemos expresar la solución de la ecuación (E.2) como

$$w(x, t) = C \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\omega_n t \tag{E.3}$$

la cual satisface las condiciones límite necesarias en $x = 0$ y $x = l$. En este caso, C es una constante y ω_n es la frecuencia natural *enésima*. Sustituyendo la ecuación (E.3) en la ecuación (E.2), obtenemos la ecuación de frecuencia:

$$\omega_n^4\left(\frac{\rho r^2}{kG}\right) - \omega_n^2\left(1 + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2} + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2}\frac{E}{kG}\right) + \left(\frac{\alpha^2 n^4\pi^4}{l^4}\right) = 0 \tag{E.4}$$

Se puede ver que la ecuación (E.4) es una ecuación cuadrática en ω_n^2, y para cualquier n hay dos valores de ω_n que satisfacen la ecuación (E.4). El valor menor corresponde al modo de deformación por flexión, mientras que el valor mayor corresponde al modo de deformación por cortante.

Los valores de la relación de ω_n dada por la ecuación (E.4) a la frecuencia natural dada por la teoría clásica (en la figura 9.15) aparecen trazados para tres valores de E/kG en la figura 9.20 [9.22].[3]

Observe los siguientes aspectos de inercia rotatoria y deformación por cortante:

1. Si se considera el efecto de sólo la inercia rotatoria, la ecuación de movimiento resultante no contiene ningún término que implique el coeficiente de cortante k. Por consiguiente, obtenemos (por la ecuación (9.136)):

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2} = 0 \tag{E.5}$$

En este caso la ecuación de frecuencia (E.4) se reduce a

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4\left(1 + \dfrac{n^2\pi^2 r^2}{l^2}\right)} \tag{E.6}$$

2. Si se considera el efecto de sólo la deformación por cortante, la ecuación de movimiento resultante no contiene los términos que se originan de $\rho I(\partial^2\phi/\partial t)$ en la ecuación (9.134). Así obtenemos la ecuación de movimiento

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EI\rho}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2} = 0 \tag{E.7}$$

y la ecuación de frecuencia correspondiente

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4\left(1 + \dfrac{n^2\pi^2 r^2}{l^2}\dfrac{E}{kG}\right)} \tag{E.8}$$

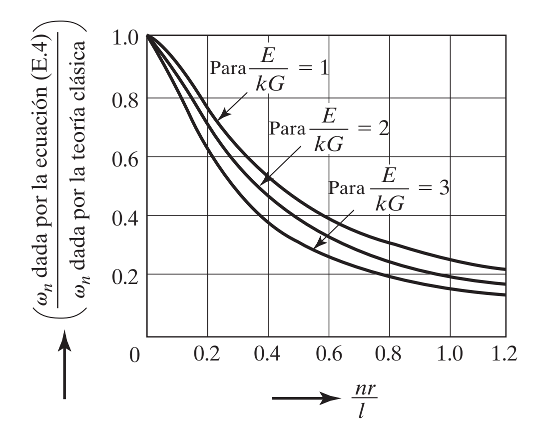


Figura 9.20 Variación de la frecuencia.

[3] La teoría para derivar la ecuación de movimiento (9.76), que omite los efectos de inercia rotatoria y deformación por cortante, se conoce como *teoría clásica de Euler-Bernoulli* o *teoría de vigas delgadas*.

3. Si se hace caso omiso de los efectos de la inercia rotatoria y la deformación por cortante, la ecuación (9.136) se reduce a la ecuación de movimiento clásica, ecuación (9.78),

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{E.9}$$

y la ecuación (E.4) a

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} \tag{E.10}$$

■

9.5.9 Otros efectos

La vibración transversal de vigas ahusadas se presenta en las referencias [9.12, 9.14]. Wang [9.15] analizó las frecuencias naturales de vigas continuas. La respuesta dinámica de vigas de descanso sobre bases elásticas se consideran en [8.16]. El efecto de la flexibilidad del apoyo en las frecuencias naturales de vigas se presenta en [9.18, 9.19]. En la referencia [9.20] se aborda el problema de frecuencias naturales de un sistema de vigas Timoshenko elásticamente conectadas. Hutchinson [9.30] compara las soluciones exactas y aproximadas de vigas vibratorias. La vibración de estado estable de vigas amortiguadas se considera en la referencia [9.21].

9.6 Vibración de membranas

Una membrana es una placa sometida a tensión cuya resistencia a la flexión es insignificante. Por lo tanto, una membrana guarda la misma relación con una placa que la que una cuerda guarda con una viga. Un ejemplo de membrana es la piel de un tambor.

9.6.1 Ecuación de movimiento

Para derivar la ecuación de movimiento de una membrana, considere que la membrana está limitada por una curva plana S en el plano xy, como se muestra en la figura 9.21. Sea $f(x, y, t)$ la carga de presión que actúa en la dirección z y P la intensidad de la tensión en un punto que es igual al producto del esfuerzo de tensión por el espesor de la membrana. La magnitud de P suele ser constante por toda la membrana, como en la piel de un tambor. Si consideramos un área elemental $dx\,dy$, las fuerzas de magnitud $P\,dx$ y $P\,dy$ actúan en las caras paralelas a los ejes y y x, respectivamente, como se muestra en la figura 9.21. Las fuerzas netas que actúan a lo largo de la dirección z debido a estas fuerzas son

$$\left(P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx\, dy \right) \quad \text{y} \quad \left(P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\, dy \right)$$

La presión a lo largo de la dirección z es $f(x,y, t)\, dx\, dy$, y la fuerza de inercia es

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx\, dy$$

donde $\rho(x, y)$ es la masa por área unitaria. La ecuación de movimiento para la vibración transversal forzada de la membrana se obtiene como

$$P\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.137}$$

Figura 9.21 Membrana sometida a tensión.

Si la fuerza externa $f(x, y, t) = 0$, la ecuación (9.137) proporciona la ecuación de vibración libre

$$c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.138}$$

donde

$$c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2} \tag{9.139}$$

Las ecuaciones (9.137) y (9.138) se expresan como

$$P\,\nabla^2 w + f = \rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.140}$$

y

$$c^2\,\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9.141}$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{9.142}$$

es el operador laplaciano.

9.6.2 Condiciones iniciales y límite

Como la ecuación de movimiento, sean la ecuación (9.137) o la ecuación (9.138), implica derivadas parciales de segundo orden con respecto a cada una de las variables t, x y y, necesitamos especificar dos condiciones iniciales y cuatro condiciones límite para determinar una solución única del problema. Por lo común, el desplazamiento y la velocidad de la membrana en $t = 0$ se especifican como $w_0(x, y)$ y $\dot{w}_0(x, y)$ De ahí que las condiciones iniciales estén dadas por

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \tag{9.143}$$

Las condiciones límite presentan los siguientes tipos:

1. Si la membrana está fija en un punto cualquiera (x_1, y_1) de un segmento del límite, tenemos

$$w(x_1, y_1, t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{9.144}$$

2. Si la membrana está libre para su deflexión de manera transversal (en la dirección z) en un punto diferente (x_2, y_2) del límite, entonces el componente de fuerza en la dirección z debe ser cero. Por lo tanto

$$P \frac{\partial w}{\partial n}(x_2, y_2, t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{9.145}$$

donde $\partial w/\partial n$ representa la derivada de w con respecto a una dirección normal n al límite en el punto (x_2, y_2).

La solución de la ecuación de movimiento de la membrana vibratoria se presentó en las referencias [9.23-9.25].

Ejemplo 9.11 Vibraciones libres de una membrana rectangular

Encuentre la solución de vibración libre de una membrana rectangular de lados a y b a lo largo de los ejes x y y, respectivamente.

Solución: Utilizando el método de separación de variables, se supone que $w(x, y, t)$ es

$$w(x, y, t) = W(x, y)\ T(t) = X(x)\ Y(y)\ T(t) \tag{E.1}$$

Con las ecuaciones (E.1) y (9.138) obtenemos

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \tag{E.2}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 \tag{E.3}$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{E.4}$$

donde α^2 y β^2 son constantes relacionadas con ω^2 como sigue:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \tag{E.5}$$

Las soluciones de las ecuaciones (E.2) y (E.4) son

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \operatorname{sen} \alpha x \tag{E.6}$$

$$Y(y) = C_3 \cos \beta y + C_4 \operatorname{sen} \beta y \tag{E.7}$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \tag{E.8}$$

donde las constantes C_1 a C_4, A, y B se determinan a partir de las condiciones límite e iniciales.

■

9.7 Método de Rayleigh

Se puede aplicar el método de Rayleigh para hallar la frecuencia natural fundamental de sistemas continuos; es inclusive mucho más sencillo que el análisis exacto para sistemas con distribuciones variables de masa y rigidez. Aunque el método es aplicable a todos los sistemas continuos, en esta sección se aplicará sólo a vigas.[4] Analice la viga que se muestra en la figura 9.14. Para aplicar el método de Rayleigh tenemos que derivar expresiones para las energías cinética y potencial máximas, y el cociente de Rayleigh. La energía cinética de la viga se expresa como

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \dot{w}^2\, dm = \frac{1}{2}\int_0^l \dot{w}^2 \rho A(x)\, dx \tag{9.146}$$

La energía cinética máxima se determina suponiendo una variación armónica $w(x, t) = W(x) \cos \omega t$:

$$T_{\text{máx}} = \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \rho A(x) W^2(x)\, dx \tag{9.147}$$

La energía potencial de la viga V es igual al trabajo realizado al deformar la viga. Omitiendo el trabajo realizado por las fuerzas cortantes, tenemos

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l M\, d\theta \tag{9.148}$$

donde M es el momento de flexión proporcionado por la ecuación (9.75) y θ es la pendiente de la viga deformada resultado de $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$. Por consiguiente, la ecuación (9.148) se puede reescribir como

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{9.149}$$

Como el valor máximo de $w(x, t)$ es $W(x)$, el valor máximo de V está dado por

$$V_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2}\right)^2 dx \tag{9.150}$$

---

[4] Penny y Reed [9.26] presentan un método de ecuación integral para determinar la frecuencia fundamental de vigas vibratorias.

Igualando $T_{\text{máx}}$ a $V_{\text{máx}}$, obtenemos el cociente de Rayleigh:

$$R(\omega) = \omega^2 = \frac{\displaystyle\int_0^l EI\left(\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^l \rho A(W(x))^2\, dx} \tag{9.151}$$

Por lo tanto, la frecuencia natural de la viga se puede determinar una vez que se conoce la deflexión $W(x)$. Suele suceder que $W(x)$ no sea conocida y por tanto debe suponerse. Por lo general se supone la forma de equilibrio estático para $W(x)$ para obtener la frecuencia fundamental. Es importante notar que, sin querer, la forma supuesta $W(x)$ introduce una restricción en el sistema (la cual equivale a agregar más rigidez al sistema), y por lo tanto la frecuencia dada por la ecuación (9.151) es más alta que el valor exacto [9.27].

Para una viga escalonada, la ecuación (9.151) se puede escribir de una manera más útil como

$$R(\omega) = \omega^2 = \frac{E_1I_1\displaystyle\int_0^{l_1}\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)^2 dx + E_2I_2\displaystyle\int_{l_1}^{l_2}\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)^2 dx + \cdots}{\rho A_1\displaystyle\int_0^{l_1} W^2\, dx + \rho A_2\displaystyle\int_{l_1}^{l_2} W^2\, dx + \cdots} \tag{9.152}$$

donde E_i, I_i, A_i y l_i corresponden al paso i-ésimo ($i = 1, 2, ...$).

Ejemplo 9.12 Frecuencia fundamental de una viga ahusada

Encuentre la frecuencia fundamental de vibración transversal de la viga en voladizo no uniforme que se muestra en la figura 9.22, utilizando la forma deformada $W(x) = (1 - x/l)^2$.

Solución: Se puede comprobar que la forma deformada que se proporciona satisface las condiciones límite de la viga. El área de sección transversal A y el momento de inercia I de la viga se expresan como

$$A(x) = \frac{hx}{l}, \qquad I(x) = \frac{1}{12}\left(\frac{hx}{l}\right)^3 \tag{E.1}$$

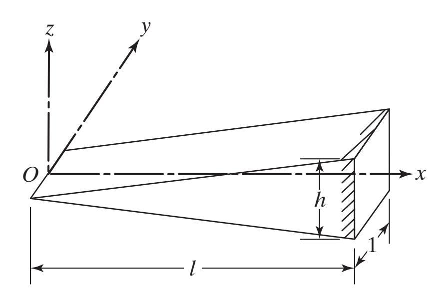


Figura 9.22 Viga ahusada en voladizo.

El cociente de Rayleigh proporciona

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l E\left(\frac{h^3x^3}{12l^3}\right)\left(\frac{2}{l^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \rho\left(\frac{hx}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx} = 2.5\,\frac{Eh^2}{\rho l^4}$$

o

$$\omega = 1.5811\left(\frac{Eh^2}{\rho l^4}\right)^{1/2} \tag{E.2}$$

En este caso se sabe que el valor exacto de la frecuencia [9.2] es

$$\omega_1 = 1.5343\left(\frac{Eh^2}{\rho l^4}\right)^{1/2} \tag{E.3}$$

Así se ve que el valor de ω_1 dado por el método de Rayleigh es 3.0503 por ciento más alto que el valor exacto.

■

9.8 Método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz se considera como una extensión del método de Rayleigh. Se basa en la premisa de que se puede obtener una aproximación más cercana al modo natural exacto superponiendo varias funciones supuestas que con una sola función supuesta, como en el método de Rayleigh. Si las funciones supuestas se eligen adecuadamente, este método proporciona no sólo el valor aproximado de la frecuencia fundamental sino también los valores aproximados de las frecuencias naturales altas y los modos. Se puede utilizar una cantidad arbitraria de funciones, y las frecuencias que se pueden obtener equiparan la cantidad de funciones utilizadas. Una gran cantidad de funciones, aunque implica más trabajo de cálculo, conduce a resultados más precisos.

En el caso de vibración transversal de vigas, si se escogen n funciones para aproximar la deflexión $W(x)$, podemos escribir

$$W(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) + \cdots + c_n w_n(x) \tag{9.153}$$

donde $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$ son funciones linealmente independientes conocidas de la coordenada espacial x, las cuales satisfacen las condiciones límite del problema, y c_1, c_2, ..., c_n son coeficientes que se tienen que determinar. Hay que determinar los coeficientes c_i de modo que funciones supuestas $w_i(x)$ den la mejor aproximación posible a los modos naturales. Para obtener tales aproximaciones, los coeficientes c_i se ajustan y la frecuencia natural se hace estacionaria en los modos naturales. Para esto sustituimos la ecuación (9.153) en el cociente de Rayleigh, ecuación (9.151), y la expresión resultante se diferencia parcialmente con respecto a cada uno de los coeficientes c_i. Para que la frecuencia natural sea estacionaria, igualamos a cero cada una de las derivadas parciales y obtenemos

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.154}$$

La ecuación (9.154) indica un conjunto de n ecuaciones algebraicas lineales en los coeficientes c_1, c_2, ..., c_n y también contiene la cantidad indeterminada ω^2. Esto define un problema de valor eigen algebraico semejante a los que se presentaron en sistemas de varios grados de libertad. La solución de este problema de valor eigen suele proporcionar n frecuencias naturales $\omega_i^2, i = 1, 2, \ldots, n$, y n vectores eigen, y cada uno contiene un conjunto de números para c_1, c_2, ..., c_n. Por ejemplo, el vector eigen i-ésimo correspondiente a ω_i se puede expresar como

$$\vec{C}^{(i)} = \begin{Bmatrix} c_1^{(i)} \\ c_2^{(i)} \\ \vdots \\ c_n^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{9.155}$$

Cuando este vector (los valores de $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)}$) se sustituye en la ecuación (9.153), obtenemos la mejor aproximación posible al modo i-ésimo de la viga. Un método de reducir el tamaño del problema eigen en el método de Rayleigh-Ritz se presenta en la referencia [9.28]. En la referencia [9.29] se da un nuevo método, que combina las ventajas del análisis de Rayleigh-Ritz y el método de elemento finito. El procedimiento básico de Rayleigh-Ritz se ilustra con la ayuda del siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.13 Primeras dos frecuencias de una viga ahusada

Encuentre las frecuencias naturales de la viga ahusada en voladizo del ejemplo 9.12 siguiendo el método de Rayleigh-Ritz.

Solución: Suponemos que las funciones de deflexión $w_i(x)$ deben ser

$$w_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{E.1}$$

$$w_2(x) = \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{E.2}$$

$$w_3(x) = \frac{x^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \vdots \tag{E.3}$$

Si utilizamos la aproximación de un término

$$W(x) = c_1\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{E.4}$$

la frecuencia fundamental será la determinada en el ejemplo 9.12. Ahora utilizamos la aproximación de dos términos

$$W(x) = c_1\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + c_2\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{E.5}$$

El cociente de Rayleigh está dado por

$$R[W(x)] = \omega^2 = \frac{X}{Y} \tag{E.6}$$

donde

$$X = \int_0^l EI(x)\left(\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right)^2 dx \tag{E.7}$$

y

$$Y = \int_0^l \rho A(x)[W(x)]^2\, dx \tag{E.8}$$

Si se sustituye la ecuación (E.5), la ecuación (E.6) se transforma en una función de c_1 y c_2. Las condiciones que hacen a ω^2 o $R[W(x)]$ estacionarios son

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_1} = \frac{Y\dfrac{\partial X}{\partial c_1} - X\dfrac{\partial Y}{\partial c_1}}{Y^2} = 0 \tag{E.9}$$

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial c_2} = \frac{Y\dfrac{\partial X}{\partial c_2} - X\dfrac{\partial Y}{\partial c_2}}{Y^2} = 0 \tag{E.10}$$

Estas ecuaciones se pueden reescribir como

$$\frac{\partial X}{\partial c_1} - \frac{X}{Y}\frac{\partial Y}{\partial c_1} = \frac{\partial X}{\partial c_1} - \omega^2\frac{\partial Y}{\partial c_1} = 0 \tag{E.11}$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_2} - \frac{X}{Y}\frac{\partial Y}{\partial c_2} = \frac{\partial X}{\partial c_2} - \omega^2\frac{\partial Y}{\partial c_2} = 0 \tag{E.12}$$

Sustituyendo la ecuación (E.5) en la ecuación (E.7) y (E.8), obtenemos

$$X = \frac{Eh^3}{3l^3}\left(\frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{10} + \frac{c_1c_2}{5}\right) \tag{E.13}$$

$$Y = \rho hl\left(\frac{c_1^2}{30} + \frac{c_2^2}{280} + \frac{2c_1c_2}{105}\right) \tag{E.14}$$

Con la ayuda de las ecuaciones (E.13) y (E.14), las ecuaciones (E.11) y (E.12) se expresan como

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \underset{\sim}{\omega}^2\cdot\frac{1}{15}\right) & \left(\frac{1}{5} - \underset{\sim}{\omega}^2\cdot\frac{2}{105}\right) \\ \left(\frac{1}{5} - \underset{\sim}{\omega}^2\cdot\frac{2}{105}\right) & \left(\frac{1}{5} - \underset{\sim}{\omega}^2\cdot\frac{1}{140}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.15}$$

donde

$$\underset{\sim}{\omega}^2 = \frac{3\omega^2\rho l^4}{Eh^2} \tag{E.16}$$

Si igualamos a cero el determinante de la matriz en la ecuación (E.15), obtenemos la ecuación de frecuencia

$$\frac{1}{8820}\underset{\sim}{\omega}^4 - \frac{13}{1400}\underset{\sim}{\omega}^2 + \frac{3}{50} = 0 \tag{E.17}$$

Las raíces de la ecuación (E.17) son $\underset{\sim}{\omega}_1 = 2.6599$ y $\underset{\sim}{\omega}_2 = 8.6492$. Por consiguiente, las frecuencias naturales de la viga ahusada son

$$\omega_1 \simeq 1.5367\left(\frac{Eh^2}{\rho l^4}\right)^{1/2} \tag{E.18}$$

y

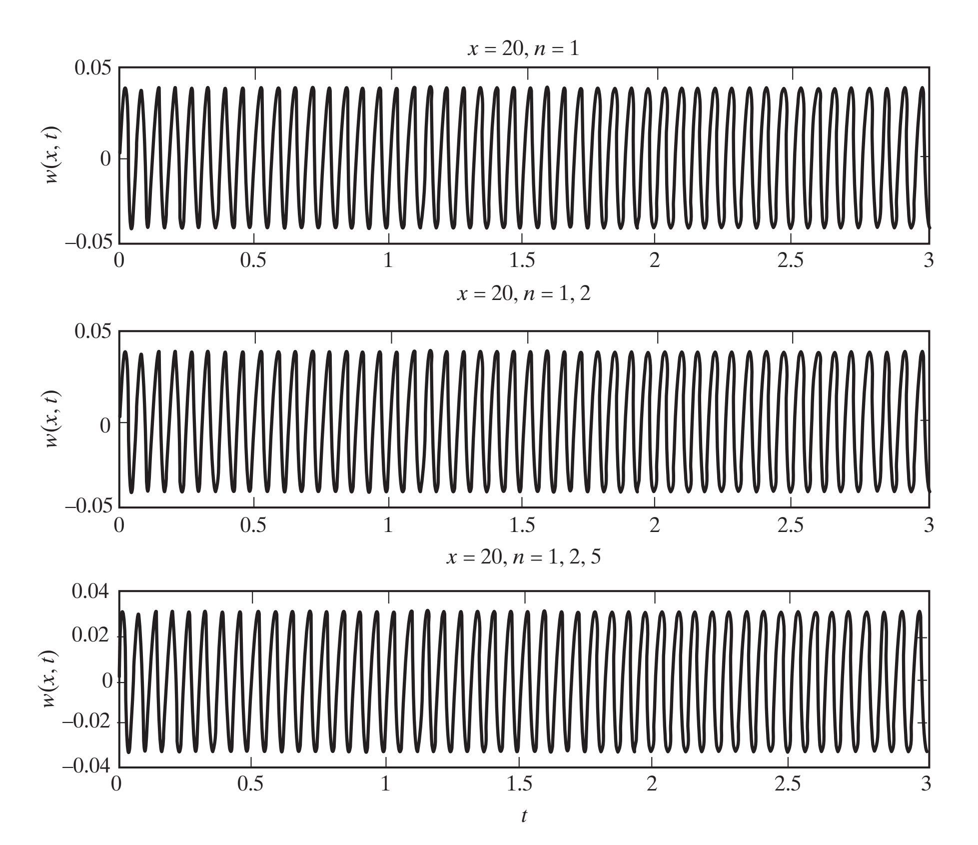
$$\omega_2 \simeq 4.9936\left(\frac{Eh^2}{\rho l^4}\right)^{1/2} \tag{E.19}$$

■

9.9 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 9.14 Trazo de la respuesta de vibración forzada de una viga simplemente apoyada

Utilizando MATLAB, trace la respuesta de estado estable de la viga doblemente articulada considerada en el ejemplo 9.8, ecuación (E.7), para $n = 1$, 2 y 5.



Solución: El programa MATLAB para trazar la ecuación (E.7) del ejemplo 9.8 en $x = 20$ con $n = 1$, 2, y 5 se da a continuación.

```
%Ex8_14.m
x = 20;
f0 = 100;
a = 10;
A = 1;
l = 40;
ro = 0.283/386.4;
w = 100;
n = 1;
wn = (n2) * 360.393674;
for i = 1: 1001
    t(i) = 3 * (i-1)/1000;
    w1(i) = ( 2*f0/(ro*A*l) )*sin (n*pi*a/l)*sin (n*pi*x/l)*sin
        (w*t(i))/(wn2-w2);
end
n = 2;
for i = 1: 1001
    t(i) = 3 * (i-1)/1000;
    w2(i) = ( 2*f0/(ro*A*l) )*( sin (pi*a/l)*sin (pi*x/l)*sin
    (w*t(i))/(360.3936742-w2)+sin (2*pi*a/l)*sin
    (2*pi*x/l)*sin (w*t(i))/((2*360.393674)2-w2) );
end
for i = 1: 1001
    t(i) = 3 * (i-1)/1000;
    w3(i) = ( 2*f0/(ro*A*l) )*( sin (pi*a/l)*sin (pi*x/l)*sin
    (w*t(i))/(360.393674^2-w^2)+sin (2*pi*a/l)+sin
    (2*pi*x/l)*sin (w*t(i))/((2*360.393674)2-w2)+sin
    (5*pi*a/l)*sin (5*pi*x/l)*sin (w*t(i))/
    ((5*360.393674)2-w2) );
end
subplot ('311');
plot(t,w1);
ylabel('w(x,t)');
title('x = 20, n = 1');
subplot ('312');
plot(t,w2);
ylabel('w(x,t)');
title('x = 20, n = 1, 2');
subplot('313');
plot(t,w3);
xlabel('t');
ylabel('w(x,t)');
title('x = 20, n = 1, 2, 5');
```

■

Ejemplo 9.15 Solución de una ecuación de frecuencia

Utilizando MATLAB, encuentre la raíz o raíces de la ecuación de frecuencia correspondiente a la viga empotrada en un extremo y libre apoyada en el otro

$$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$$

con el valor de inicio de $\beta_n l = 3.0$.

Solución:

```
>> x = fzero(inline('tan(y)-tanh(y)'), 3.0)
x =
   3.92660231204792
>> tan (x) - tanh (x)
ans =
   -4.440892098500626e-016
```

■

Ejemplo 9.16 Programa para encontrar raíces de ecuaciones trascendentales y no lineales

Desarrolle un programa general MATLAB, llamado **`Program12.m`** para determinar las raíces de ecuaciones no lineales y trascendentales. Úselo para determinar la raíz de la ecuación

$$\tan \beta l - \tanh \beta l = 0 \tag{E.1}$$

Solución: Se desarrolla **`Program12.m`** para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = cantidad de raíces a determinar

xs = suposición inicial de la primera raíz

xinc = incremento inicial que se utilizará para buscar la raíz

nint = máximo de subintervalos que es utilizará (valor usual: 50)

iter = máximo de iteraciones permitido para encontrar una raíz (valor usual: 100)

eps = requerimiento de convergencia (valor usual: 10^{-6})

La ecuación no lineal dada se debe definir en un subprograma llamado **function.m**. El programa proporciona las raíces calculadas como datos de salida.

```
>> programs12
Raíces de una ecuación no lineal

Datos:
n    = 5
xs   = 2.000000e+000
xinc = 1.000000e-001
nint = 50
iter = 100
eps  = 1.000000e-006

Raíces
  3.926602e+000
  7.068583e+000
  1.021018e+001
  1.335177e+001
  1.649336e+001
```

■

Resumen del capítulo

Hemos estudiado el método de derivar la ecuación de movimiento de sistemas continuos como cuerdas, barras, flechas, vigas y membranas. Presentamos los métodos de determinar las frecuencias naturales, modos y solución de vibración libre por medio de las condiciones iniciales y límite pertinentes. Describimos un método de analizar la vibración forzada de vigas por medio del método de superposición de modos. Además, vimos los efectos de la fuerza axial, inercia rotatoria y deformación por cortante en la vibración de vigas. Estudiamos los métodos de Rayleigh y Rayleigh-Ritz para hallar las frecuencias naturales aproximadas de sistemas continuos. Por último, presentamos el uso de MATLAB para encontrar las soluciones de vibración forzada libre de sistemas continuos.

Ahora que ya ha concluido este capítulo, deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación.

Referencias

9.1 S. K. Clark, *Dynamics of Continuous Elements*, Prentice Hall, Englewood Clifís, N.J. 1972.

9.2 S. Timoshenko, D. H. Young y W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 1974.

9.3 A. Leissa. *Vibration of Plates*, NASA SP-160. Washington, DC, 1969.

9.4 I. S. Habib, *Engineering Analysis Methods*, Lexington Books, Lexington, MA., 1975.

9.5 J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1973.

9.6 K. K. Deb, "Dynamics of a string and an elastic hammer", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, 1975, págs. 243-248.

9.7 M. S. Triantafyllou, "Linear dynamics of cables and chains", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 16, marzo de 1984, págs. 9-17.

9.8 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA. 1982.

9.9 S. P. Timoshenko y J. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1961.

9.10 S. P. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Serie 6, Vol. 41, 1921, págs. 744-746.

9.11 G. R. Cowper, "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, 1966, págs. 335-340.

9.12 G. W. Housner y W. O. Keightley, "Vibrations of linearly tapered beams", Parte I, *Transactions of ASCE*, Vol. 128, 1963, págs. 1020-1048.

9.13 C. M. Harris (ed.), *Shock and Vibration Handbook* (3a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1988

9.14 J. H. Gaines y E. Volterra, "Transverse vibrations of cantilever bars of variable cross section", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 39, 1966, págs. 674-679.

9.15 T. M. Wang, "Natural frequencies of continuous Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, 1970, págs. 409-414.

9.16 S. L. Grassie, R. W. Gregory, D. Harrison y K. L. Johnson, "The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation", *Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 24, junio de 1982, págs. 77-90.

9.17 A. Dimarogonas, *Vibration Engineering*, West Publishing, Saint Paul, MN, 1976.

9.18 T. Justine y A. Krishnan, "Effect of support flexibility on fundamental frequency of beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, 1980, págs. 310-312.

9.19 K. A. R. Perkins, "The effect of support flexibility on the natural frequencies of a uniform cantilever", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 4, 1966, págs. 1-8.

9.20 S. S. Rao, "Natural frequencies of systems of elastically connected Timoshenko beams", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 55, 1974, págs. 1232-1237.

9.21 A. M. Ebner y D. P. Billington, "Steady-state vibration of damped Timoshenko beams", *Journal of Structural Division* (ASCE), Vol. 3, 1968, pág. 737.

9.22 M. Levinson y D. W. Cooke, "On the frequency spectra of Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, 1982, págs. 319-326.

9.23 N. Y. Olcer, "General solution to the equation of the vibrating membrane", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, 1967, págs. 365-374.

9.24 G. R. Sharp, "Finite transform solution of the vibrating annular membrane", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, 1967, págs. 117-128.

9.25 J. Mazumdar, "A review of approximate methods for determining the vibrational modes of membranes", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, febrero de 1982, págs. 11-17.

9.26 J. E. Penny y J. R. Reed, "An integral equation approach to the fundamental frequency of vibrating beams", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 19, 1971, págs. 393-400.

9.27 G. Temple y W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and Its Application to Engineering*, Dover, Nueva York, 1956.

9.28 W. L. Craver, Jr. y D. M. Egle, "A method for selection of significant terms in the assumed solution in a Rayleigh-Ritz analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 22, 1972, págs. 133-142.

9.29 L. Klein, "Transverse vibrations of non-uniform beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, 1974, págs. 491-505.

9.30 J. R. Hutchinson, "Transverse vibrations of beams: Exact versus approximate solutions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, págs. 923-928.

Preguntas de repaso

9.1 Responda brevemente lo que se pide:

1. ¿Cómo difiere un sistema continuo de un sistema discreto en la naturaleza de su ecuación de movimiento?
2. ¿Cuántas frecuencias naturales tiene un sistema continuo?
3. ¿Son importantes las condiciones límite en un sistema discreto? ¿Por qué?
4. ¿Qué es una ecuación de onda? ¿Qué es una solución de onda viajera?
5. ¿Cuál es la importancia de la velocidad de onda?
6. Mencione las condiciones límite que se tienen que especificar en el extremo simplemente apoyado de una viga si (a) se utiliza la teoría de vigas delgadas y (b) si se utiliza la teoría de vigas de Timoshenko.
7. Mencione las condiciones límite posibles en los extremos de una cuerda.
8. ¿Cuál es la diferencia principal en la naturaleza de las ecuaciones de frecuencia de un sistema discreto y un sistema continuo?
9. ¿Cuál es el efecto de una fuerza de tensión en las frecuencias naturales de una viga?
10. ¿En qué circunstancias la frecuencia de vibración de una viga sometida a una carga axial se vuelve cero?
11. ¿Por qué la frecuencia natural de una viga se reduce si se consideran los efectos de deformación por cortante e inercia rotatoria?
12. Presente dos ejemplos prácticos de la vibración de membranas.
13. ¿Cuál es el principio básico que se utiliza en el método de Rayleigh?
14. ¿Por qué siempre la frecuencia natural dada por el método de Rayleigh es mayor que el valor verdadero de ω_1?
15. ¿Cuál es la diferencia entre el método de Rayleigh y el método de Rayleigh-Ritz?
16. ¿Qué es el cociente de Rayleigh?

9.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Los sistemas continuos son los mismos que los sistemas distribuidos.
2. Se puede considerar que los sistemas continuos tienen una infinitud de grados de libertad.
3. La ecuación rectora de un sistema continuo es una ecuación diferencial común.
4. Las ecuaciones de vibración libre correspondientes al movimiento transversal de una cuerda, el movimiento longitudinal de una barra y el movimiento torsional de una flecha, tienen la misma forma.

5. Los modos normales de un sistema continuo son ortogonales.
6. Una membrana tiene una resistencia a la flexión cero.
7. El método de Rayleigh se puede considerar como un método de conservación de energía.
8. El método de Rayleigh-Ritz asume que la solución es una serie de funciones que satisfacen las condiciones límite del problema.
9. Para un sistema discreto, las condiciones límite se tienen que aplicar explícitamente.
10. La teoría de vigas de Euler-Bernoulli es más precisa que la teoría de Timoshenko.

9.3 Escriba en los siguientes espacios en blanco las palabras correctas:

1. La ecuación de vibración libre de una cuerda también se llama ecuación ________.
2. La ecuación de frecuencia también se conoce como ecuación _______.
3. El método de separación de variables se utiliza para expresar la solución de vibración libre de una cuerda como una ________ de funciones de x funciones de t.
4. Tanto las condiciones límite como las condiciones ________ se tienen que especificar para determinar la solución de un sistema continuo vibratorio.
5. En la solución de onda $w(x, t) = w_1(x - ct) + w_2\,(x + ct)$, el primer término representa la onda que se propaga en las direcciones _________ de x.
6. Las cantidades EI y GJ se llaman rigideces de _________ y ________, respectivamente.
7. La teoría de vigas delgadas también se conoce como teoría de _________.
8. La vibración lateral de una viga delgada está regida por una ecuación diferencial parcial de ________ orden en la variable espacial.
9. Cuando una viga se somete a una fuerza axial (tensión), _______ la frecuencia natural.
10. La teoría de vigas de Timoshenko se puede considerar como una teoría de vigas ________.
11. La piel de un tambor se puede considerar como una _________.
12. Una cuerda tiene la misma relación con una viga que una membrana con una ________.
13. El método de Rayleigh se puede utilizar para estimar la frecuencia natural _________ de un sistema continuo.
14. $EI\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ indica la ______ en una viga.
15. Para un sistema discreto, las ecuaciones rectoras son ecuaciones diferenciales ___________.
16. Una carga de tensión axial incrementa la __________ flexión de una viga.
17. La energía ________ de una viga la indica $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx$.
18. La energía ________ de una viga la indica $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$.

9.4 Seleccione la respuesta más adecuada de entre las opciones dadas:

1. La ecuación de frecuencia de un sistema continuo es
   a. una ecuación polinomial
   b. una ecuación trascendental
   c. una ecuación diferencial
2. La cantidad de frecuencias naturales de un sistema continuo es
   a. infinita **b.** una **c.** finita
3. Cuando la fuerza axial tiende a la carga de pandeo de Euler, la frecuencia fundamental de la viga alcanza
   a. el infinito **b.** la frecuencia de una cuerda tensa **c.** cero

4. El valor del coeficiente de cortante de Timoshenko depende de lo siguiente:
   a. la forma de la sección transversal
   b. el tamaño de la sección transversal
   c. la longitud de la viga

5. Un operador laplaciano está dado por

   a. $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$

   b. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$

   c. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

6. La condición límite correspondiente al extremo libre de una barra en vibración longitudinal es

   a. $u(0, t) = 0$

   b. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$

   c. $AE\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) - u(0, t) = 0$

7. La ortogonalidad de funciones normales de vibración longitudinal de una barra está dada por

   a. $\displaystyle\int_0^l U_i(x)U_j(x)\,dx = 0$

   b. $\displaystyle\int_0^l \left(U_i'U_j - U_j'U_i\right)dx = 0$

   c. $\displaystyle\int_0^l (U_i(x) + U_j(x))\,dx = 0$

9.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes respecto a las condiciones límite para una viga delgada:

1. Extremo libre	**a.** Momento de flexión = 0; fuerza cortante igual a la fuerza de resorte.
2. Extremo articulado	**b.** Deflexión = 0; pendiente = 0
3. Extremo empotrado	**c.** Deflexión = 0; momento de flexión = 0
4. Extremo elásticamente restringido	**d.** Momento de flexión = 0; fuerza cortante = 0.

9.6 Correlacione los elementos en las dos columnas con respecto a una viga uniforme:

1. $W = 0$	**a.** Momento de flexión cero
2. $W' = 0$	**b.** Desplazamiento transversal cero
3. $W'' = 0$	**c.** Fuerza cortante cero
4. $W''' = 0$	**d.** Pendiente cero

9.7 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes en relación con la ecuación de onda $c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$:

1. $c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$ **a.** Vibración longitudinal de una barra

2. $c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$ **b.** Vibración torsional de una flecha

3. $c = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$ **c.** Vibración transversal de una cuerda

Problemas

Sección 9.2 Vibración transversal de una cuerda o cable

9.1 Determine la velocidad de propagación de ondas en un cable de masa $\rho = 5$ kg/m cuando se estira por una tensión $P = 4\,000$ N.

9.2 Un cable de acero de 2 mm de diámetro se fija entre dos puntos localizados a 2 m uno de otro. La fuerza de tensión en el cable es de 250 N. Determine (a) la frecuencia fundamental de vibración y (b) la velocidad de propagación de ondas en el cable.

9.3 Un cable estirado de 2 m de longitud tiene una frecuencia fundamental de 3 000 Hz. Encuentre la frecuencia del tercer modo. ¿Cómo cambian las frecuencias fundamentales y el tercer modo si la tensión se incrementa 20 por ciento?

9.4 Encuentre el tiempo que requiere una onda transversal para viajar a lo largo de una línea de transmisión de una torre a otra que está a 300 m. Suponga el componente horizontal de la tensión en el cable como 30 000 N y la masa del cable como 2 kg/m de longitud.

9.5 Un cable de longitud l y masa ρ por unidad de longitud se estira bajo una tensión P. Un extremo del cable está conectado a una masa m, la cual puede moverse en una ranura libre de fricción, y el otro extremo está sujeto a un resorte de rigidez k, como se muestra en la figura 9.23. Derive la ecuación de frecuencia para la vibración transversal del cable.

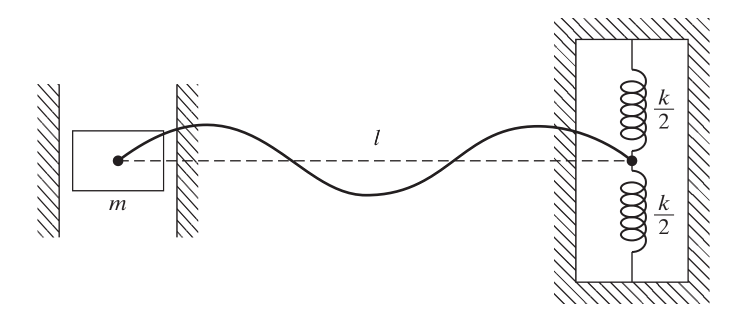


Figura 9.23

9.6 La cuerda de un instrumento musical está fija por ambos extremos y tiene 2 m de longitud, 0.5 mm de diámetro y 7800 kg/m^3 de densidad. Encuentre la tensión requerida para tener una frecuencia fundamental de (a) 1 Hz y (b) 5 Hz.

9.7 Un cable de longitud l y masa ρ por unidad de longitud se estira bajo una tensión P. Un extremo del cable está fijo y el otro está conectado a un pasador, el cual puede moverse en una ranura sin fricción. Encuentre las frecuencias naturales de vibración del cable.

9.8 Encuentre la solución de vibración libre de una cuerda fija por ambos extremos cuando sus condiciones iniciales son

$$w(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{2ax}{l} \qquad \text{con} \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 2a\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad \text{con} \qquad \frac{l}{2} \le x \le l$$

9.9 Demuestre que la constante a en las ecuaciones (9.18) y (9.19) es negativa con condiciones límite comunes. *Sugerencia:* Multiplique la ecuación (9.18) por $W(x)$ e integre con respecto a x de 0 a l.

9.10* El cable entre dos torres de transmisión de electricidad tiene una longitud de 2000 m. Está sujeto por los extremos bajo una tensión P (figura 9.24). La densidad del material del cable es de 8890 kg/m^3. Si se requiere que las primeras frecuencias naturales queden entre 0 y 20 Hz, determine el área de sección transversal necesaria y la tensión inicial.

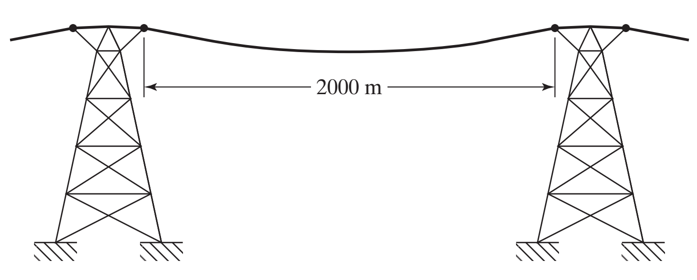


Figura 9.24

9.11 Si una cuerda de longitud l, fija por ambos extremos, experimenta un desplazamiento transversal inicial de h en $x = l/3$ y luego se suelta, determine su movimiento subsiguiente. Compare las deflexiones de la cuerda en los instantes $t = 0$, $l\,(4c)$, $l/(3c)$, $l/(2c)$ y l/c considerando los primeros cuatro términos de la solución de la serie.

9.12 Una cuerda de longitud l se pone a vibrar en un medio viscoso. Derive la ecuación de movimiento considerando la fuerza de amortiguamiento viscoso.

---

* El asterisco indica un problema sin respuesta única.

9.13 Determine la solución de vibración libre de una cuerda fija por ambos extremos en las condiciones iniciales $w(x, 0) = w_0$ sen $(\pi x/l)$ y $(\partial w/\partial t)$ $(x, 0) = 0$.

9.14 Las cuerdas de una guitarra (figura 9.25) son de alambre musical de 0.05 mm de diámetro, densidad de peso de 76.5 kN/m^3 y 207 GPa de módulo de Young. Si las longitudes de dos de las cuerdas son de 0.60 m y 0.65 m, determine las frecuencias naturales fundamentales de las cuerdas si la tensión en cada una es de 5×10^4 N.

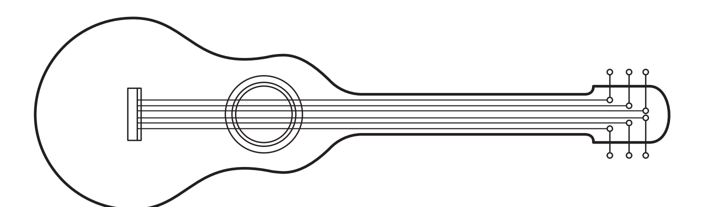


Figura 9.25

9.15 Las fuerzas verticales y horizontales (reacciones) en las juntas A y B de un cable normal del puente colgante que se muestra en la figura 9.26 son $F_x = 2.8 \times 10^6$ N y $F_y = 1.1 \times 10^6$ N. Los cables son de acero con densidad de peso de 76.5 kN/m^3. Si el diámetro efectivo del cable es de 25 cm, encuentre las primeras dos frecuencias naturales de vibración del cable en la dirección vertical. Mencione las suposiciones implicadas en la solución.

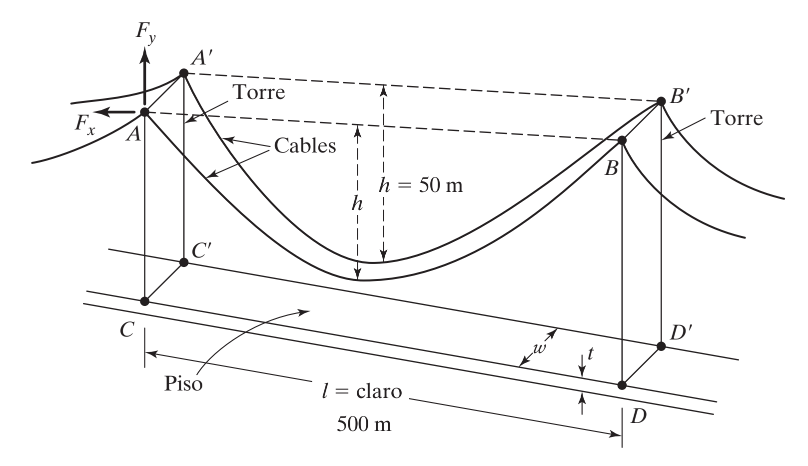


Figura 9.26 Puente colgante.

Sección 9.3 Vibración longitudinal de una barra o varilla

9.16 Derive una ecuación para los modos principales de vibración longitudinal de una barra uniforme con ambos extremos libres.

9.17 Derive la ecuación de frecuencia para la vibración longitudinal de los sistemas que se muestran en la figura 9.27.

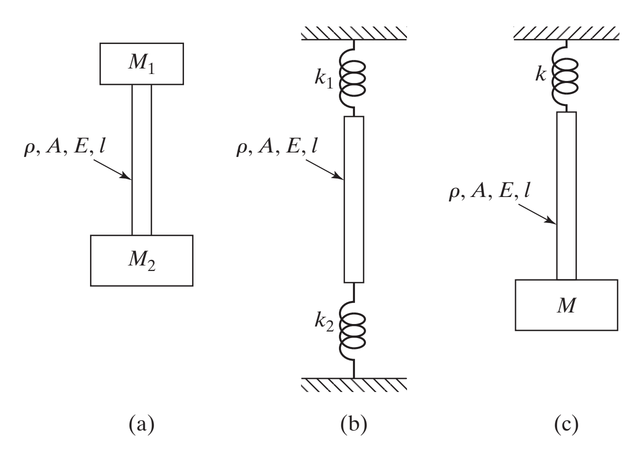


Figura 9.27

9.18* Una barra delgada de longitud l y masa m tiene un extremo sujeto y el otro libre. ¿Qué masa M debe fijarse en el extremo libre para reducir 50 por ciento la frecuencia fundamental de vibración longitudinal con respecto a su valor en condiciones de extremo fijo y extremo libre?

9.19 Demuestre que las funciones normales correspondientes a la vibración longitudinal de la barra que se muestra en la figura 9.28 son ortogonales.

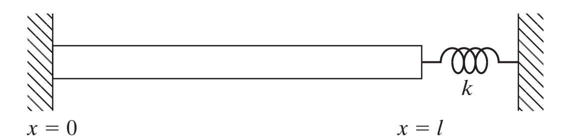


Figura 9.28

9.20 Derive la ecuación de frecuencia para la vibración longitudinal de una barra escalonada que tiene dos áreas de sección transversal diferentes A_1 y A_2 a lo largo de las longitudes l_1 y l_2, respectivamente. Suponga condiciones de extremo fijo y extremo libre.

9.21 Una flecha de acero de diámetro d y longitud l tiene un extremo fijo y lleva una hélice de masa m y momento de inercia de masa J_0 en el otro (figura 9.29). Determine la frecuencia natural fundamental de vibración de la flecha en (a) vibración axial y (b) vibración torsional. Datos: $d = 5$ cm, $l = 1$ m, $m = 100$ kg, $J_0 = 10$ kg-m^2.

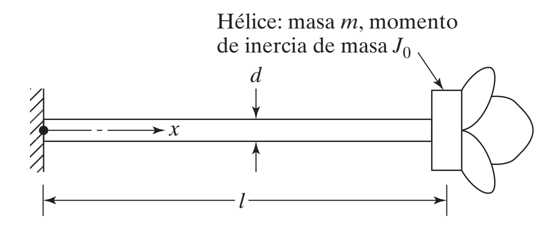


Figura 9.29

Sección 9.4 Vibración torsional de una flecha o varilla

9.22 Un sistema torsional se compone de una flecha con un disco de momento de inercia de masa I_0 montada en su centro. Si ambos extremos de la flecha están fijos, encuentre la respuesta del sistema en vibración torsional libre de la flecha. Suponga que el disco experimenta un desplazamiento angular inicial cero y una velocidad inicial de $\dot{\theta}_0$.

9.23 Halle las frecuencias naturales de vibración torsional de una flecha con sus dos extremos fijos.

9.24 Una flecha uniforme de longitud l y rigidez torsional GJ está conectada por ambos extremos por medio de resortes torsionales, amortiguadores torsionales y discos con inercias, como se muestra en la figura 9.30. Formule las condiciones límite.

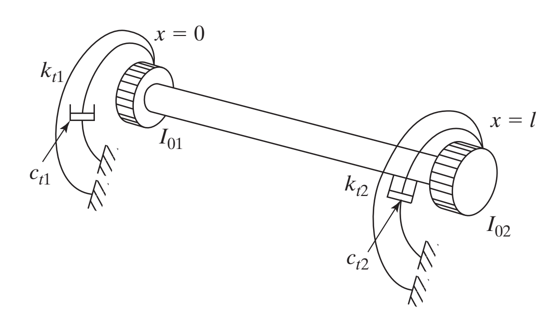


Figura 9.30

9.25 Resuelva el problema 9.23 si un extremo de la flecha está fijo y el otro libre.

9.26 Derive la ecuación de frecuencia para la vibración torsional de una flecha uniforme con un rotor en cada extremo de momento de inercia de masa I_{01} e I_{02}.

9.27 Se aplica un par de torsión externo $M_t(t) = M_{t0} \cos \omega t$ en el extremo libre de una flecha uniforme con un extremo fijo y el otro libre. Encuentre la vibración de estado estable de la flecha.

9.28 Encuentre la frecuencia fundamental de vibración torsional de una flecha de 2 m de longitud y 50 mm de diámetro cuando ambos extremos están fijos. La densidad del material es de 7800 kg/m^3 y el módulo de rigidez es de 0.8×10^{11} N/m^2.

9.29 Una flecha uniforme, soportada en $x = 0$ que gira a una velocidad angular ω, se detiene de repente en el extremo $x = 0$. Si el extremo $x = l$ está libre, determine la respuesta de desplazamiento angular subsiguiente de la flecha.

Sección 9.5 Vibración lateral de vigas

9.30 Calcule las tres primeras frecuencias naturales y los modos correspondientes de las vibraciones transversales de una viga uniforme de sección transversal rectangular (100 mm $\times$ 300 mm) con $l = 2$ m, $E = 20.5 \times 10^{10}$ N/m^2 y $\rho = 7.83 \times 10^3$ kg/m^3 en los siguientes casos: (a) cuando ambos extremos están simplemente apoyados; (b) cuando ambos extremos están empotrados; (c) cuando un extremo está empotrado y el otro libre, y (d) cuando ambos extremos están libres. Trace los modos.

9.31 Derive una expresión para las frecuencias naturales de vibración lateral de una viga uniforme con un extremo fijo y el otro libre.

9.32 Demuestre que las funciones normales de una viga uniforme, cuyos extremos están conectados por resortes como se muestra en la figura 9.31, son ortogonales.

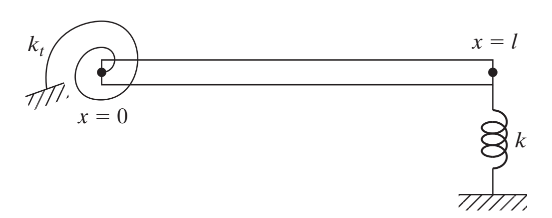


Figura 9.31

9.33 Derive una expresión para las frecuencias naturales de vibración transversal de una viga uniforme con ambos extremos simplemente apoyados.

9.34 Derive la expresión para las frecuencias naturales de vibración lateral de una viga uniforme suspendida como un péndulo, sin tomar en cuenta el efecto del peso muerto.

9.35 Encuentre el área de sección transversal (A) y el momento de inercia de área (I) de una viga de acero simplemente apoyada de longitud l para la cual las tres primeras frecuencias naturales quedan en el rango de 1500-5000 Hz.

9.36 Una viga uniforme, con ambos extremos simplemente apoyados, vibra en su primer modo con una amplitud de 10 mm en su centro. Si $A = 120$ mm^2, $l = 1000$ mm^4, $E = 20.5 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho = 7.83 \times 10^3$ kg/m^3 y $l = 1$ m, determine el momento de flexión máximo en la viga.

9.37 Derive la ecuación de frecuencia para la vibración transversal de una viga uniforme con ambos extremos apoyados en resortes, como se muestra en la figura 9.32. Los resortes sólo se pueden desviar verticalmente, y la viga es horizontal en la posición de equilibrio.

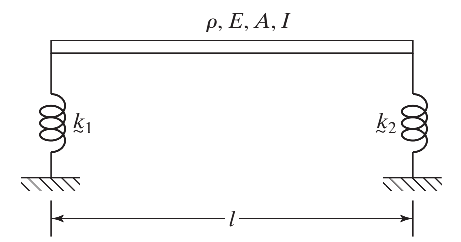


Figura 9.32

9.38 Una viga uniforme simplemente apoyada de longitud l lleva una masa M en su centro. Suponiendo que M es una masa puntual, obtenga la ecuación de frecuencia del sistema.

9.39 Una viga uniforme con ambos extremos empotrados de longitud $2l$ está simplemente apoyada en su punto medio. Derive la ecuación de frecuencia para la vibración transversal de la viga.

9.40 Una viga simplemente apoyada soporta en principio una carga uniformemente distribuida de intensidad f_0. Encuentre la respuesta de vibración de la viga si la carga se retira de repente.

9.41 Estime la frecuencia fundamental de una viga en voladizo cuya área de sección transversal y momento de inercia varían como

$$A(x) = A_0 \frac{x}{l} \quad \text{e} \quad I(x) = \bar{I} \frac{x}{l}$$

donde x se mide con respecto al extremo libre.

9.42 (a) Derive una expresión general para la respuesta de una viga uniforme sometida a una fuerza arbitraria. (b) Use el resultado del inciso (a) para determinar la respuesta de una viga uniforme simplemente apoyada bajo la fuerza armónica F_0 sen ωt aplicada en $x = a$. Suponga las condiciones iniciales como $w(x, 0) = (\partial w/\partial t)(x, 0) = 0$.

9.43 Derive las ecuaciones (E.5) y (E.6) del ejemplo 9.10.

9.44 Derive las ecuaciones (E.7) y (E.8) del ejemplo 9.10.

9.45 Demuestre que la constante a en la ecuación (9.82) es positiva en condiciones límite comunes. *Sugerencia:* Multiplique la ecuación (9.83) por $W(x)$ e integre con respecto a x de 0 a l.

9.46 Encuentre la respuesta de una viga simplemente apoyada sujeta a una carga armónicamente variable distribuida.

9.47 Una viga con ambos extremos empotrados sostiene un motor eléctrico de 100 kg de masa y velocidad operacional de 3 000 rpm en su punto medio, como se muestra en la figura 9.33. Si el motor tiene un desbalance rotacional de 0.5 kg-m, determine la respuesta de estado estable de la viga. Suponga la longitud de la viga como $l = 2$ m, la sección transversal como 10 cm × 10 cm y que el material es acero.

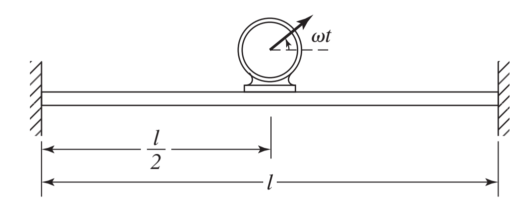


Figura 9.33

9.48 Una viga en voladizo de acero de 2 cm de diámetro y 1 m de longitud se somete a una fuerza exponencialmente menguante de $100e^{-0.1t}$ en el extremo libre, como se muestra en la figura 9.34. Determine la respuesta de estado estable de la viga. Suponga la densidad y módulo de Young como 7500 kg/m^3 y 210×10^9 N/m^2, respectivamente.

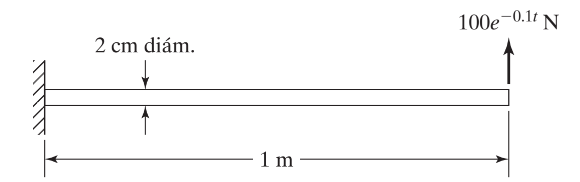


Figura 9.34

9.49 Encuentre la respuesta de estado estable de una viga en voladizo que se somete a un momento de flexión escalonado repentinamente aplicado de magnitud M_0 en su extremo libre.

9.50 Una viga en voladizo de longitud l, densidad ρ, módulo de Young E, área de sección transversal A y momento de inercia de área I soporta una masa concentrada M en su extremo libre. Derive la ecuación para la vibración transversal de la viga.

9.51 Considere un carro de ferrocarril que se mueve sobre una vía como se muestra en la figura 9.35(a). La vía se puede modelar con una viga infinita apoyada sobre un cimiento elástico y el carro se puede idealizar como una carga móvil $F_0(x, t)$ (vea la figura 9.35b). Si la rigidez del suelo por unidad de longitud es k, y la velocidad constante del carro es v_0, demuestre que la ecuación de movimiento de la viga se expresa como

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + kw(x,t) = F_0(x - v_0 t)$$

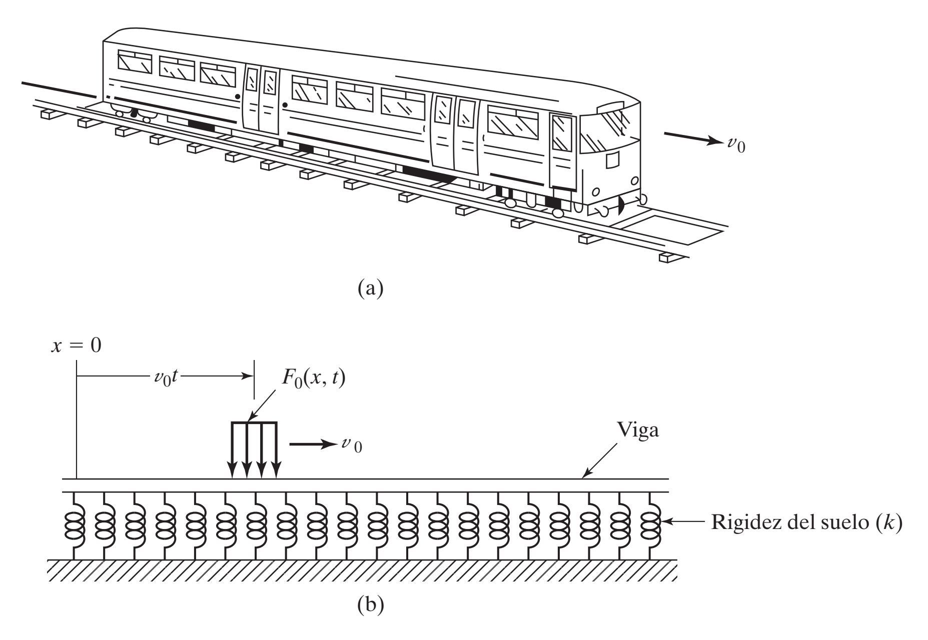


Figura 9.35

Indique un método para resolver la ecuación de movimiento si se supone que la carga móvil es de magnitud constante.

9.52 Encuentre las dos primeras frecuencias naturales de vibración en la dirección vertical del piso del puente colgante que se muestra en la figura 9.26 conforme a las siguientes suposiciones:

1. El piso se puede considerar como una viga uniforme con apoyos simples en ambos extremos *C* y *D*.
2. El piso tiene un ancho (w) de 12 m, espesor (t) de 0.75 m y peso, incluidas las vigas de soporte, de 3000 N/m.
3. El módulo de Young del piso es de 175 GPa.

9.53 Una viga uniforme de longitud $2l$ tiene su extremo izquierdo empotrado, sostenido por un soporte simple a la mitad, y el extremo derecho libre como se muestra en la figura 9.36. Derive la ecuación de frecuencia para determinar las frecuencias naturales de vibración de la viga continua.

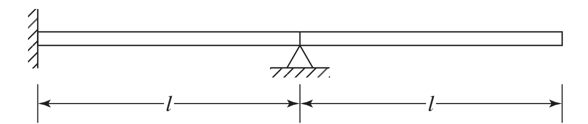


Figura 9.36

9.54 Una viga uniforme con ambos extremos empotrados de longitud $2l$ está apoyada en una junta de pasador en su punto medio como se muestra en la figura 9.37. Derive la ecuación de frecuencia para determinar las frecuencias naturales de vibración de la viga continua.

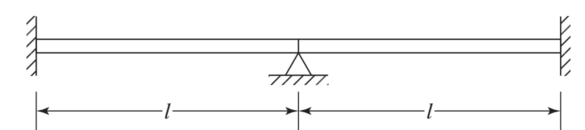


Figura 9.37

9.55 El marco en forma de *L* que se muestra en la figura 9.38 tiene su extremo *A* empotrado y su extremo *C* libre. Los dos segmentos del marco *AB* y *BC* son del mismo material con secciones transversales cuadradas idénticas. Indique un procedimiento para determinar las frecuencias naturales de vibración en plano del marco tratando los dos segmentos como vigas.

Sugerencia: Identifique las condiciones límite en *A* y *C* y las condiciones que se deben satisfacer en el punto *B*.

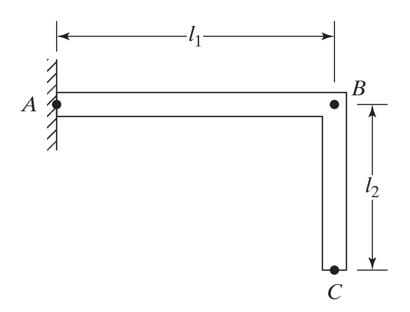


Figura 9.38

Sección 9.6 Vibración de membranas

9.56 Comenzando por lo básico, demuestre que la ecuación para la vibración lateral de una membrana circular está dada por

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\rho}{P}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

9.57 Considere una membrana rectangular de lados a y b soportada a lo largo de sus bordes. (a) Derive una expresión para la deflexión $w(x, y, t)$ bajo una presión arbitraria $f(x, y, t)$. (b) Encuentre la respuesta cuando se aplica una presión uniformemente distribuida f_0 a una membrana que inicialmente está en reposo.

9.58 Encuentre la solución de vibración libre y las frecuencias naturales de una membrana rectangular sujeta a lo largo de sus bordes. Las dimensiones de la membrana son a y b a lo largo de las direcciones x y y, respectivamente.

9.59 Encuentre la respuesta de vibración libre de una membrana rectangular de lados a y b sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$w(x, y, 0) = w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}, \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b$$

9.60 Encuentre la respuesta de vibración libre de una membrana rectangular de lados a y b sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} w(x, y, 0) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) &= \dot{w}_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b} \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{aligned}$$

Suponga que los bordes de la membrana están fijos.

9.61 Compare las frecuencias naturales fundamentales de vibración transversal de membranas de las formas siguientes: (a) cuadrada; (b) circular, y (c) rectangular con lados en la relación de 2:1. Suponga que todas las membranas están sujetas alrededor de sus bordes y que tienen la misma área, material y tensión.

9.62 Utilizando la ecuación de movimiento dada en el problema 9.56, encuentre las frecuencias naturales de una membrana circular de radio R sujeta alrededor del límite en $r = R$.

Sección 9.7 Método de Rayleigh

9.63 Encuentre la frecuencia natural fundamental de una viga doblemente empotrada por medio de la curva de deflexión estática

$$W(x) = \frac{c_0 x^2}{24EI}(l - x)^2$$

donde c_0 es una constante.

9.64 Resuelva el problema 9.63 con la siguiente deflexión $W(x) = c_0\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$, donde c_0 es una constante.

9.65 Encuentre la frecuencia natural fundamental de vibración de una viga uniforme de longitud l con un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado. Suponga que la deflexión de la viga es la misma que la curva de deflexión estática bajo su propio peso. *Sugerencia:* La deflexión estática de una viga uniforme bajo su propio peso está regida por

$$EI\,\frac{d^4W(x)}{dx^4} = \rho g A$$

donde ρ es la densidad, g es la aceleración debida a la gravedad, y A es el área de la sección transversal de la viga. Esta ecuación se puede integrar con cualesquiera condiciones límite conocidas de la viga.

9.66 Determine la frecuencia fundamental de una viga uniforme doblemente empotrada que soporta una masa M a la mitad de su longitud aplicando el método de Rayleigh. Use la curva de deflexión estática correspondiente a $W(x)$.

9.67 Aplicando el método de Rayleigh, determine la frecuencia fundamental de una viga en voladizo (empotrada en $x = l$) cuya área de sección transversal $A(x)$ y momento de inercia $I(x)$ varía como $A(x) = A_0x/l$ e $I(x) = I_0x/l$.

9.68 Utilizando el método de Rayleigh, halle la frecuencia fundamental para la vibración lateral de la viga que se muestra en la figura 9.39. La fuerza de restauración en el resorte k es proporcional a la deflexión, y el momento de restauración en el resorte k_t es proporcional a la deflexión angular.

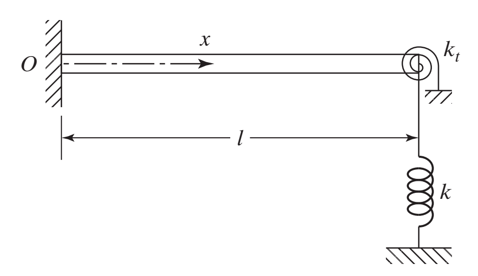


Figura 9.39

9.69 Con el método de Rayleigh, estime la frecuencia fundamental para la vibración lateral de una viga uniforme doblemente empotrada. Suponga que la curva de deflexión es

$$W(x) = c_1\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$

9.70 Encuentre la frecuencia fundamental de vibración longitudinal de la barra ahusada que se muestra en la figura 9.40, aplicando el método de Rayleigh y el modo

$$U(x) = c_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l}$$

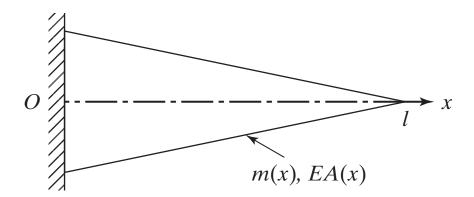


Figura 9.40

La masa por unidad de longitud está dada por

$$m(x) = 2m_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

y la rigidez es

$$EA(x) = 2EA_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

9.71 Aproxime la frecuencia fundamental de una membrana rectangular soportada a lo largo de todos los bordes utilizando el método de Rayleigh con

$$W(x, y) = c_1 xy(x - a)(y - b).$$

Sugerencia:

$$V = \frac{P}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \qquad \text{y} \qquad T = \frac{\rho}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx\, dy$$

9.72 Utilizando el método de Rayleigh determine la frecuencia natural fundamental del sistema que se muestra en la figura 9.41.

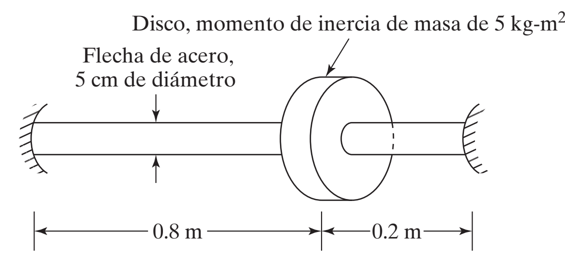


Figura 9.41

Sección 9.8 Método de Rayleigh-Ritz

9.73 Estime la frecuencia fundamental de una cuerda con ambos extremos fijos, suponiendo el modo (a) $W(x) = c_1x(l - x)$ y (b) $W(x) = c_1x(l - x) + c_2x^2(l - x)^2$.

9.74 Estime la frecuencia fundamental para la vibración longitudinal de una barra uniforme empotrada en $x = 0$ y libre en $x = l$ suponiendo los modos como (a) $U(x) = c_1(x/l)$ y (b) $U(x) = c_1(x/l) + c_2(x/l)^2$.

9.75 Una barra escalonada, empotrada en $x = 0$ y libre en $x = l$, tiene un área de sección transversal de 2A para $0 \leq x < l/3$ y A para $l/3 \leq x \leq l$. Suponiendo el modo

$$U(x) = c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} + c_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2l}$$

estime las dos primeras frecuencias naturales de vibración longitudinal.

9.76 Resuelva el problema 9.70 utilizando el método de Rayleigh-Ritz con el modo

$$U(x) = c_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} + c_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2l}$$

9.77 Encuentre las dos primeras frecuencias naturales de una cuerda uniforme con ambos extremos fijos de densidad de masa ρ por unidad de longitud estirada entre $x = 0$ y $x = l$ con una tensión inicial P. Suponga las funciones de deflexión

$$w_1(x) = x(l - x)$$
$$w_2(x) = x^2(l - x)^2$$

Sección 9.9 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

9.78 Resuelva el ejemplo 9.4 utilizando **`Program12.m`**.

9.79 Encuentre las primeras cinco frecuencias naturales de una viga delgada doblemente empotrada utilizando **`Program12.m`**.

9.80 Trace la respuesta dinámica de la cuerda percutida, ecuación (E.6) del ejemplo 9.1, utilizando MATLAB, en $x = l/2$. Datos: $h = 0.1$ m, $l = 1.0$ m, $c = 100$ m/s.

9.81 Escriba un programa de computadora para hallar numéricamente los modos de vigas delgadas con un extremo fijo y el otro simplemente apoyado, utilizando los valores conocidos de las frecuencias naturales.

Proyecto de diseño

9.82 Un vehículo de peso F_0 que se desplaza a una velocidad constante sobre un puente (figura 9.42(a)) se puede modelar con una carga concentrada que se desplaza sobre una viga simplemente apoyada como se muestra en la figura 9.42(b). La carga concentrada F_0 se puede considerar como una carga uniformemente distribuida a lo largo de una longitud infinitesimal de 2Δ y se puede expresar como una suma de términos seno utilizando la expansión de serie seno de Fourier (de la carga distribuida). Encuentre el desplazamiento transversal del puente como una suma de la respuesta de cada uno de los componentes de carga móviles. Suponga las condiciones iniciales del puente como $w(x, 0) = \partial w/\partial t(x,0) = 0$.

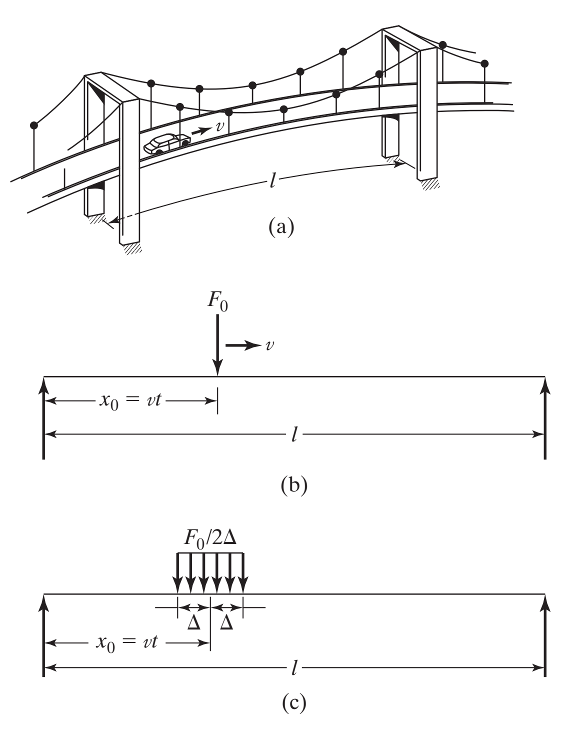


Figura 9.42

CAPÍTULO 10

Medición de vibración y aplicaciones

Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)

Físico alemán y amigo del famoso químico Robert Wilhelm Bunsen. Kirchhoff empezó dando clases en la Universidad de Berlín en 1848 y después se trasladó a Heidelberg para ocupar la cátedra de física. Ahí, en 1859, hizo su contribución más importante a la física, que consiste en el descubrimiento experimental y el análisis teórico de una ley fundamental de radiación electromagnética. Además, hizo contribuciones significativas a los circuitos eléctricos y a la teoría de la elasticidad. En 1850 publicó su importante artículo sobre la teoría de placas, con el cual presentó por primera vez una teoría satisfactoria para la vibración de placas sometidas a flexión, junto con las condiciones límite correctas. Presentó además, un artículo sobre la vibración de barras de sección transversal. Se trasladó a la Universidad de Berlín en 1875 para ocupar la cátedra de física teórica, y publicó su famoso libro de mecánica en 1876. (Fotografía cortesía de *Applied Mechanics Reviews)*.

Esquema del capítulo

En algunas situaciones prácticas podría ser difícil desarrollar un modelo matemático del sistema y predecir sus características de vibración por medio de un estudio analítico. En tales casos podemos utilizar métodos experimentales para medir la respuesta de vibración del sistema ante una situación conocida. Esto ayuda a identificar el sistema en función de su masa, rigidez y amortiguamiento. Este capítulo presenta los diversos aspectos de la medición y aplicaciones de la vibración. Primero se delinea el esquema básico de medición de vibración. También se describen los transductores, dispositivos que transforman variables físicas en señales eléctricas equivalentes, de igual modo los detectores de vibración y los instrumentos de medición de frecuencia que se utilizan para medir vibraciones. Se presentan los principios de trabajo de agitadores o excitadores mecánicos y electrodinámicos, que se utilizan para excitar una máquina o sistema a fin de estudiar sus características dinámicas. Se describen el análisis de señales, el cual determina la respuesta de un sistema sometido a una excitación conocida y los presenta de una forma cómoda junto con descripciones del analizador de espectros, el filtro pasa banda y analizadores de ancho de banda. El análisis modal experimental se ocupa de la determinación de frecuencias naturales, la relación de amortiguamiento y modos mediante pruebas de vibración. Se describen el equipamiento que se requiere, el procesamiento de señales digitales, el análisis de señales aleatorias, la determinación de datos modales a partir de picos observados y la gráfica de Nyquist, además de la determinación de modos. Se mencionan los criterios de severidad de vibración, las técnicas de mantenimiento de máquinas, de monitoreo de la condición de máquinas y los sistemas de instrumentación para el monitoreo y diagnóstico de la condición de máquinas. Concluimos con la presentación de programas MATLAB para trazar el círculo de Nyquist y la ecuación de aceleración.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Entender los diversos tipos de transductores, detectores de vibración e instrumentos de medición de frecuencia.
- Conocer los principios de trabajo de agitadores o excitadores mecánicos y electrodinámicos.
- Aprender el proceso de análisis de señales.
- Entender las técnicas de análisis modal experimentales para determinar las frecuencias naturales, la relación de amortiguamiento y los modos.
- Conocer los diversos aspectos del monitoreo de la condición de una máquina.
- Uso de MATLAB para trazar círculos de Nyquist e implementar los métodos de análisis estudiados.

10.1 Introducción

En la práctica, la medición de vibración es una actividad necesaria por las siguientes razones:

1. Las crecientes demandas de una mayor productividad y diseño económico conducen a velocidades de operación más altas de la maquinaria[1] y al uso eficiente de materiales mediante estructuras ligeras. Estas tendencias provocan la ocurrencia de condiciones resonantes más frecuentes durante la operación de la maquinaria y reducen la confiabilidad del sistema. De ahí que

[1]De acuerdo con Eshleman, en la referencia [10.12], durante el periodo de 1940 a 1980 la velocidad promedio de las máquinas rotatorias se duplicó de 1800 a 3600 rpm.

la medición periódica de las características de vibración de maquinaria y estructuras llega a ser esencial para garantizar márgenes de seguridad adecuados. Cualquier cambio de las frecuencias naturales u otras características de vibración indicarán o una falla, o la necesidad de mantenimiento de la máquina.

2. La medición de las frecuencias naturales de una estructura o máquina es útil al seleccionar las velocidades de operación de maquinaria cercana para evitar condiciones de resonancia.
3. Las características de vibración teóricamente calculadas de una máquina o estructura pueden ser diferentes de los valores reales debido a las suposiciones hechas en el análisis.
4. La medición de frecuencias de vibración y las fuerzas desarrolladas es necesaria en el diseño y operación de sistemas de aislamiento de vibración activos.
5. En muchas aplicaciones se tiene que determinar la supervivencia de una estructura o máquina en un entorno de vibración especificado. Si la estructura o máquina es capaz de realizar la tarea esperada incluso después de completar una prueba en el entorno de vibración especificado, se espera que sobreviva a las condiciones especificadas.
6. Por motivos de sencillez, los sistemas continuos se suelen representar de forma aproximada como sistemas de varios grados de libertad. Si las frecuencias naturales medidas y modos de un sistema continuo son comparables a las frecuencias naturales medidas y modos del modelo de varios grados de libertad, entonces la aproximación demostrará ser válida.
7. La medición de las características de vibración de entrada y de salida resultantes de un sistema ayuda a identificar el sistema en función de su masa, rigidez y amortiguamiento.
8. La información sobre vibraciones del suelo producidas por sismos, velocidades fluctuantes del viento en estructuras, variación aleatoria de olas oceánicas e irregularidades en carreteras, son importantes en el diseño de estructuras, máquinas, plataformas petroleras y sistemas de suspensión de vehículos.

Esquema de medición de vibraciones. La figura 10.1 ilustra las características básicas de un esquema de medición de vibración. En esta figura, el movimiento (o fuerza dinámica) del cuerpo vibratorio se transforma en una señal eléctrica por medio de un transductor o detector de vibración. Por lo común, un transductor es un dispositivo que transforma los cambios de cantidades mecánicas (desplazamiento, velocidad, aceleración o fuerza) en cambios de cantidades eléctricas (voltaje o corriente). Como la señal de salida (voltaje o corriente) de un transductor es muy débil para ser registrada de forma directa, se utiliza un instrumento de conversión de señales para amplificar la señal al valor requerido. La salida del instrumento de conversión de señales se puede presentar en una pantalla de visualización para su inspección visual, capturar en una unidad de registro, o guardar en una computadora para usarla posteriormente. Los datos se pueden analizar entonces para determinar las características de vibración deseadas de la máquina o estructura.

Dependiendo de la cantidad medida, un instrumento de medición de vibración se conoce como vibrómetro, medidor de velocidad, acelerómetro, medidor de fase o medidor de frecuencia. Si el instrumento está diseñado para registrar la cantidad medida, entonces el sufijo "metro" se tiene que reemplazar por "grafo" [10.1]. En algunas aplicaciones tenemos que hacer vibrar una máquina o estructura para determinar sus características de resonancia. Para esto se utilizan vibradores electrodinámicos, vibradores electrohidráulicos y generadores de señales (osciladores).

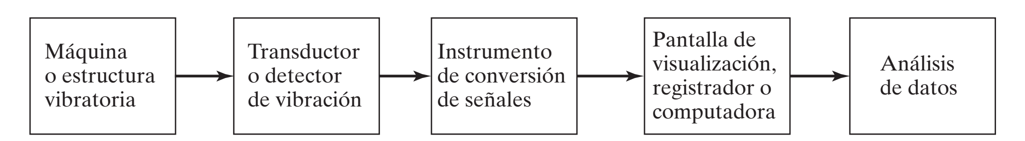


Figura 10.1 Esquema de medición de vibración básico.

Las siguientes consideraciones a menudo dictan el tipo de instrumentos de medición de vibración que debe utilizarse en una prueba de vibración: (1) los rangos esperados de las frecuencias y amplitudes, (2) los tamaños de la máquina/estructura implicada, (3) las condiciones de operación de la máquina/equipo/estructura, y (4) el tipo de procesamiento de datos que se utilizó (visualización gráfica, registro gráfico o almacenamiento del registro en forma digital para procesamiento por computadora).

10.2 Transductores

Un transductor es un dispositivo que transforma valores de variables físicas en señales eléctricas equivalentes. Hay varios tipos de transductores disponibles; algunos de ellos son menos útiles que otros debido a su no linealidad o respuesta lenta. A continuación se analizan algunos de los transductores que se utilizan comúnmente para medir la vibración.

10.2.1 Transductores de resistencia variable

En estos transductores, un movimiento mecánico cambia la resistencia eléctrica (de un reóstato, un medidor de deformación o un semiconductor), lo que a su vez cambia el voltaje o corriente de salida. En la figura 10.2 se muestra el diagrama de un medidor de deformación de resistencia eléctrica, el cual se compone de un alambre fino cuya resistencia cambia cuando se somete a una deformación mecánica. Cuando el medidor de deformación se adhiere a una estructura, experimenta el mismo movimiento (deformación) que la estructura y por consiguiente su cambio de resistencia proporciona la deformación experimentada por la estructura. El alambre se coloca entre dos hojas de papel delgado. El medidor de deformación se pega en la superficie donde se va a medir la deformación. El material más común para el alambre es una aleación de cobre-níquel conocida como Advance. Cuando la superficie experimenta una deformación normal (ϵ), el medidor de deformación también experimenta la misma deformación y el cambio, y la siguiente ecuación presenta el cambio resultante de su resistencia [10.6]

$$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = 1 + 2v + \frac{\Delta r}{r}\frac{L}{\Delta L} \approx 1 + 2v \tag{10.1}$$

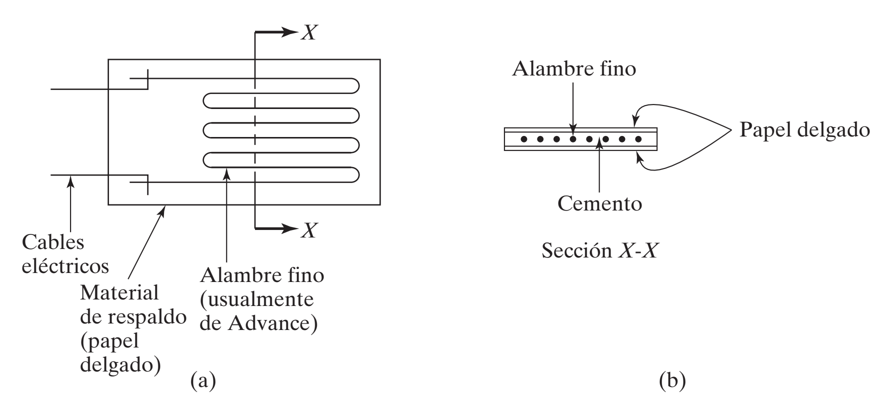


Figura 10.2 Medidor de deformación de resistencia eléctrica.

donde

K = Factor de calibración del alambre
R = Resistencia inicial
ΔR = Cambio de resistencia
L = Longitud inicial del alambre
ΔL = Cambio de longitud del alambre
v = Relación de Poisson del alambre
r = Resistividad del alambre
Δr = Cambio de resistividad del alambre ≈ 0 para Advance

El fabricante del medidor de deformación proporciona el valor del factor de calibración K, de ahí que el valor de ϵ se puede determinar una vez que ΔR y R se miden como

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta R}{RK} \tag{10.2}$$

En un detector de vibración[2] el medidor de deformación se monta sobre un elemento elástico de un sistema de resorte-masa, como se muestra en la figura 10.3. La deformación en cualquier punto de la viga en voladizo (miembro elástico) es proporcional a la deflexión de la masa, $x(t)$, que se ha de medir. Por consiguiente, la deformación indicada por el medidor de deformación se puede utilizar para hallar $x(t)$. El cambio de resistencia del alambre ΔR se puede medir con un puente de Wheatstone, un circuito de potenciómetro, o un divisor de voltaje. La figura 10.4 muestra un puente de Wheatstone, que representa un circuito sensible a cambios mínimos de la resistencia. A través de los puntos a y c se aplica un voltaje V de c.d. El voltaje resultante a través de los puntos b y d está dado por [10.6]:

$$E = \left[\frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}\right]V \tag{10.3}$$

Inicialmente, las resistencias están balanceadas (ajustadas) de modo que el voltaje de salida E es cero. Por lo tanto, para balance inicial, la ecuación (10.3) entrega

$$R_1R_3 = R_2R_4 \tag{10.4}$$

Cuando las resistencias (R_i) cambian en pequeñas cantidades (ΔR_i), el cambio del voltaje de salida ΔE se expresa como

$$\Delta E \approx Vr_0\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right) \tag{10.5}$$

donde

$$r_0 = \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_3R_4}{(R_3 + R_4)^2} \tag{10.6}$$

[2]Cuando se utiliza un transductor junto con otros componentes que permiten el procesamiento y transmisión de la señal, el dispositivo se conoce como *detector*.

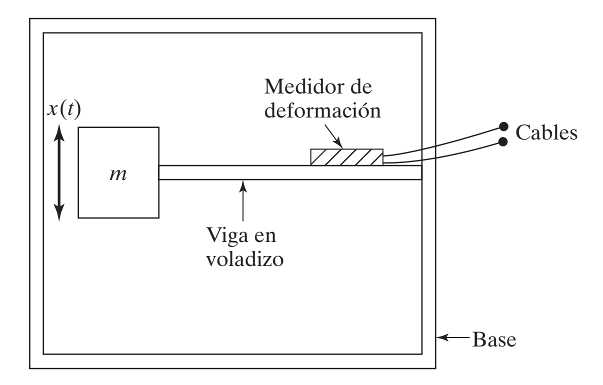


Figura 10.3 Medidor de deformación como detector de vibración.

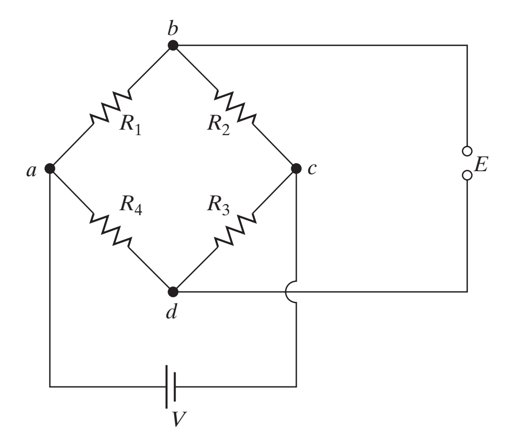


Figura 10.4 Puente de Wheatstone.

Si los cables del medidor de deformación se conectan entre los puntos a y b, $R_1 = R_g$, $\Delta R_1 = \Delta R_g$ y $\Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$, y la ecuación (10.5) entrega

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{\Delta E}{V r_0} \tag{10.7}$$

donde R_g es la resistencia inicial del medidor. Las ecuaciones (10.2) y (10.7) producen

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \epsilon K = \frac{\Delta E}{V r_0}$$

o

$$\Delta E = K V r_0 \epsilon \tag{10.8}$$

Como el voltaje de salida es proporcional a la deformación, se puede calibrar para que lea la deformación de forma directa.

10.2.2 Transductores piezoeléctricos

Ciertos materiales naturales y fabricados como el cuarzo, la turmalina, el sulfato de litio y la sal de Rochelle, generan carga eléctrica cuando se someten a deformación o esfuerzo mecánico (vea la figura 10.5(a)). La carga eléctrica desaparece cuando se retira la carga mecánica. Tales materiales reciben el nombre de piezoeléctricos y los transductores, los cuales aprovechan el efecto piezoeléctrico, se conocen como transductores piezoeléctricos. La carga generada en el cristal por una fuerza F_x está dada por

$$Q_x = kF_x = kAp_x \tag{10.9}$$

donde k se conoce como constante piezoeléctrica, A es el área sobre la cual actúa la fuerza F_x, y p_x es la presión ejercida por F_x. El voltaje de salida del cristal está dado por

$$E = vtp_x \tag{10.10}$$

donde ν es la sensibilidad al voltaje y t es el espesor del cristal. Los valores de constante piezoeléctrica y la sensibilidad al voltaje para cuarzo son 2.25×10^{-12} C/N y 0.055 volt-metro/N, respectivamente [10.6]. Estos valores son válidos sólo cuando la perpendicular a la cara más grande está a lo largo del eje x del cristal. La carga eléctrica desarrollada y la salida de voltaje serán diferentes si el trozo de cristal se corta en una dirección diferente.

En la figura 10.5(b) se muestra un transductor piezoeléctrico común. En esta figura, una pequeña masa ejerce carga sobre un cristal piezoeléctrico por la acción de un resorte. Cuando la base vibra, la carga ejercida por la masa sobre el cristal cambia con la aceleración, de ahí que el voltaje de salida generado por el cristal será proporcional a la aceleración. La ventaja principal del acelerómetro piezoeléctrico incluye tamaño compacto, robustez, alta sensibilidad y alto rango de frecuencia [10.5, 10.8].

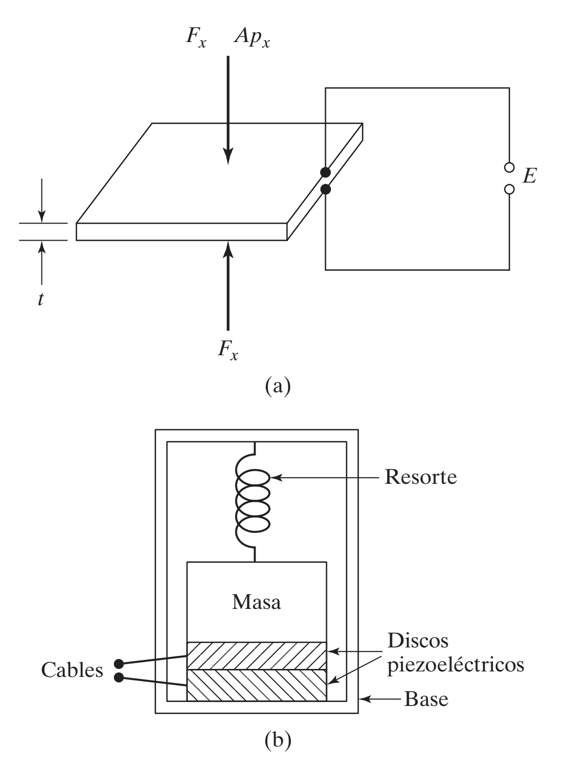


Figura 10.5 Acelerómetro piezoeléctrico.

Ejemplo 10.1 Voltaje de salida de un transductor piezoeléctrico

Un cristal de cuarzo de 0.1 pulg de espesor se somete a una presión de 50 lb/pulg^2. Determine el voltaje de salida si la sensibilidad al voltaje es de 0.055 V-m/N.

Solución: Con t = 0.1 pulg = 0.00254 m, p_x = 50 lb/pulg^2 = 344.738 N/m^2 y v = 0.055 V-m/N, la ecuación (10.10) resulta

$$E = (0.055)(0.00254)(344.738) = 48.1599 \text{ volts}$$

■

10.2.3 Transductores electrodinámicos

Cuando un conductor eléctrico, en forma de bobina, se mueve en un campo magnético como se muestra en la figura 10.6, se genera un voltaje E en el conductor. El valor de E en volts es

$$E = Dlv \tag{10.11}$$

donde D es la densidad de flujo magnético (teslas), l es la longitud del conductor (metros) y v es la velocidad del conductor con respecto al campo magnético (metros/segundo). El campo magnético puede ser producido por un imán permanente o un electroimán. En ocasiones la bobina se mantiene estacionaria y el imán es el que se mueve. Como el voltaje de salida de un transductor electromagnético es proporcional a la velocidad relativa de la bobina, se suele utilizar en “detectores de velocidad”. La ecuación (10.11) se reescribe como

$$Dl = \frac{E}{v} = \frac{F}{I} \tag{10.12}$$

donde F indica la fuerza (newtons) que actúa en la bobina mientras transporta una corriente (amperes). La ecuación (10.12) muestra que el funcionamiento de un transductor electrodinámico se puede invertir. De hecho, la ecuación (10.12) constituye la base para el uso de un transductor electrodinámico como “excitador de vibración” (vea la sección 10.5.2).

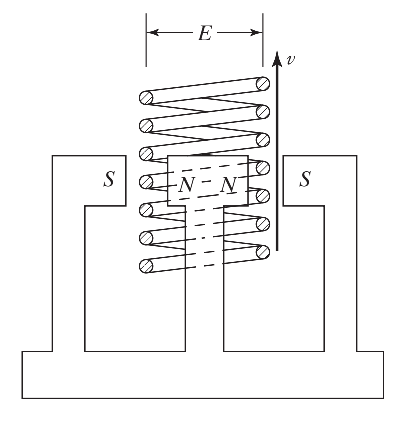


Figura 10.6 Idea básica que da origen a un transductor electrodinámico.

10.2.4 Transductor de transformador diferencial variable lineal

En la figura 10.7 se muestra el diagrama de un *transductor de transformador variable lineal (LVDT*, por sus siglas en inglés). Se compone de una bobina primaria en el centro de dos bobinas secundarias en los extremos y un núcleo magnético que se puede mover libremente en el interior de las bobinas en la dirección del eje (axial). Cuando se aplica un voltaje de entrada de c.a. a la bobina primaria, el voltaje de salida será igual a la diferencia de los voltajes inducidos en las bobinas secundarias. Este voltaje de salida depende del acoplamiento magnético entre las bobinas y el núcleo, el que a su vez depende del desplazamiento axial del núcleo. Las bobinas secundarias están conectadas en oposición de fase de modo que cuando el núcleo magnético está en la posición media exacta, los voltajes en las dos bobinas serán iguales y con desfase de 180°. Esto hace que el voltaje de salida del LVDT sea cero. Cuando la bobina se mueve a uno u otro lado de la posición media (cero), el acoplamiento magnético se incrementará en una bobina secundaria y se reducirá en la otra bobina. La polaridad de salida depende de la dirección del movimiento del núcleo magnético.

El rango de desplazamiento de muchos LVDT en el mercado es desde 0.0002 cm hasta 40 cm. Las ventajas de un LVDT sobre otros transductores de desplazamiento incluyen la insensibilidad a la temperatura y la alta salida. La masa del núcleo magnético restringe el uso del LVDT para aplicaciones de alta frecuencia [10.4].

Siempre que el núcleo no se mueva muy lejos del centro de la bobina, el voltaje de salida varía linealmente con el desplazamiento del núcleo, como se muestra en la figura 10.8, de ahí el nombre de transformador diferencial variable lineal.

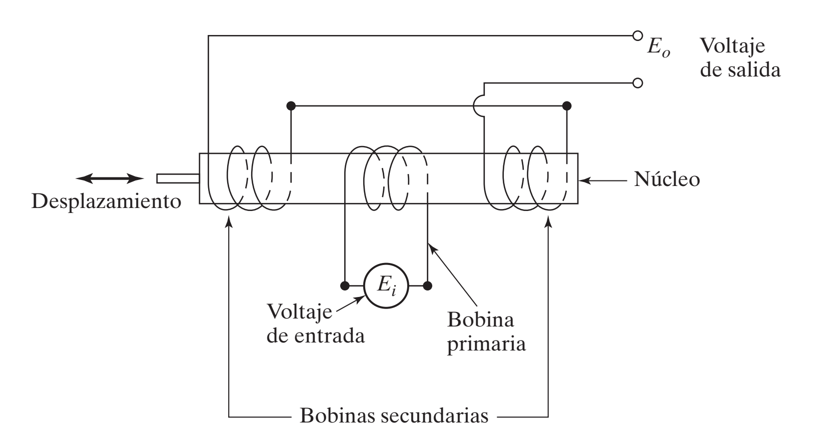


Figura 10.7 Diagrama de un transductor LVDT.

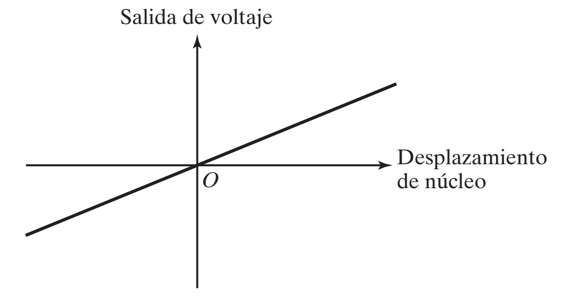


Figura 10.8 Linealidad de voltaje con desplazamiento de núcleo.

10.3 Detectores de vibración

Cuando un transformador se utiliza junto con otro dispositivo para medir vibraciones, se llama *detector de vibración*. Los detectores de vibración comúnmente utilizados se conocen como instrumentos sísmicos. Un instrumento sísmico se compone de un sistema de masa-resorte-amortiguador montado en el cuerpo vibratorio, como se muestra en la figura 10.9. Entonces el movimiento vibratorio se mide determinando el desplazamiento de la masa con respecto a la base en la cual está montada.

El instrumento se compone de una masa m, un resorte k y un amortiguador c dentro de una jaula, la que se sujeta al cuerpo vibratorio. Con esta disposición los extremos inferiores del resorte y el amortiguador hidráulico tendrán el mismo movimiento que la jaula (el cual se va a medir, y) y su vibración excita la masa suspendida y la pone en movimiento. Entonces el desplazamiento de la masa con respecto a la jaula $z = x - y$, donde x denota el desplazamiento vertical de la masa suspendida, se puede medir si fijamos una aguja en la masa y una escala en la jaula, como se muestra en la figura 10.9.[3]

Se supone que cuerpo vibratorio tiene movimiento armónico:

$$y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t \tag{10.13}$$

La ecuación de movimiento de la masa m se escribe como

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{10.14}$$

Definiendo el desplazamiento relativo z como

$$z = x - y \tag{10.15}$$

La ecuación (10.14) se escribe como

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{10.16}$$

Las ecuaciones (10.13) y (10.16) conducen a

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 Y \operatorname{sen} \omega t \tag{10.17}$$

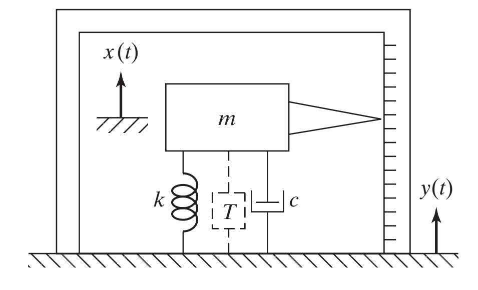


Figura 10.9 Instrumento sísmico.

[3] La salida del instrumento que se muestra en la figura 10.9 es el movimiento mecánico relativo de la masa, indicado por la aguja y la escala graduada en la jaula. Por conveniencia y para operación de alta velocidad, el transductor a veces convierte el movimiento en una señal eléctrica.

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (3.75); por consiguiente la solución de estado estable está dado por

$$z(t) = Z \text{ sen } (\omega t - \phi) \tag{10.18}$$

donde Z y ϕ están dados por (vea las ecuaciones (3.76) y (3.77)):

$$Z = \frac{Y\omega^2}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{r^2 Y}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{10.19}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \tag{10.20}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \tag{10.21}$$

y

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{10.22}$$

Las variaciones de Z y ϕ con respecto a r se muestran en las figuras 10.10 y 10.11. Como se verá más adelante, el rango útil de las frecuencias, indicado en la figura 10.10, determina el tipo de instrumento.

10.3.1 Vibrómetro

Un *vibrómetro* o un *sismógrafo* son instrumentos que miden el desplazamiento de un cuerpo vibratorio. En la figura 10.10 se observa que $Z/Y \approx 1$ cuando $\omega/\omega_n \geq 3$ (rango II). Por lo tanto, el desplazamiento relativo entre la masa y la base (detectado por el transductor) es en esencia el mismo que el desplazamiento de la base. Para un análisis exacto, consideramos la ecuación (10.19). Observamos que

$$z(t) \simeq Y \text{ sen}(\omega t - \phi) \tag{10.23}$$

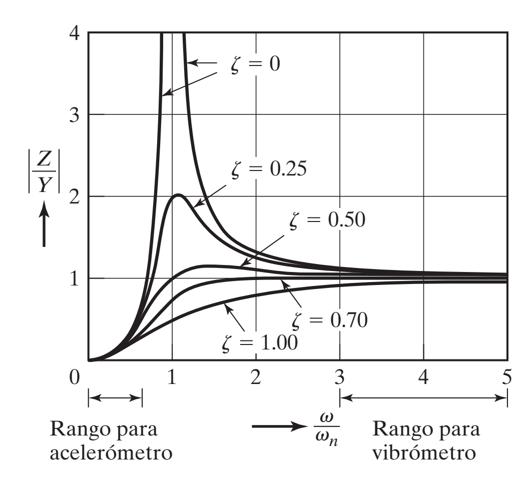


Figura 10.10 Respuesta de un instrumento de medición de vibración.

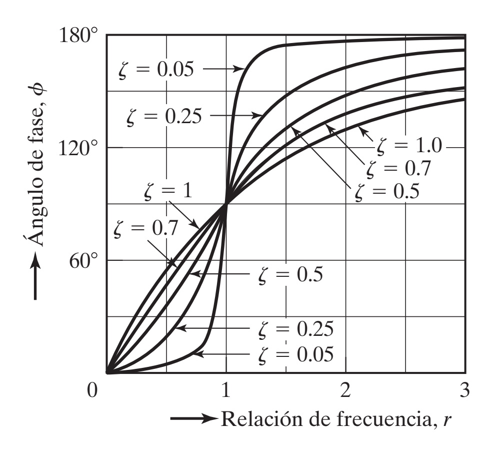


Figura 10.11 Variación de ϕ con r.

si

$$\frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \approx 1 \tag{10.24}$$

Una comparación de la ecuación (10.23) con $y(t) = Y$ sen ωt muestra que $z(t)$ proporciona directamente el movimiento $y(t)$ excepto el retraso de fase ϕ. Se ve que el retraso de fase es igual a 180° para $\zeta = 0$. Por lo tanto el desplazamiento registrado $z(t)$ se retrasa con respecto al desplazamiento que se está midiendo $y(t)$ por un instante $t' = \phi/\omega$. Este retraso no es importante si el desplazamiento de la base $y(t)$ consta de un solo componente armónico.

Como $r = \omega/\omega_n$ tiene que ser grande y el valor de ω es fijo, la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ del sistema de masa-resorte-amortiguador debe ser baja. Esto significa que la masa debe ser grande y el resorte debe tener una rigidez baja. Esto da por resultado un instrumento voluminoso, el cual no es deseable en muchas aplicaciones. En la práctica, quizás el vibrómetro no tenga un valor grande de r y por consiguiente es posible que el valor de Z no sea exactamente igual a Y. En tal caso, el valor verdadero de Y se puede calcular con la ecuación (10.19), como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.2 Amplitud determinada con un vibrómetro

Un vibrómetro con una frecuencia natural de 4 rad/s y $\zeta = 0.2$ se fija en una estructura que experimenta un movimiento armónico. Si la diferencia entre los valores máximo y mínimo registrados es de 8 mm, encuentre la amplitud de movimiento de la estructura vibratoria cuando su frecuencia es de 40 rad/s.

Solución: La amplitud del movimiento registrado Z es de 4 mm. Para $\zeta = 0.2$, $\omega = 40.0$ rad/s y $\omega_n = 4$ rad/s, $r = 10.0$, la ecuación (10.19) da

$$Z = \frac{Y(10)^2}{[(1 - 10^2)^2 + \{2(0.2)(10)\}^2]^{1/2}} = 1.0093Y$$

Por lo tanto, la amplitud de vibración de la estructura es $Y = Z/1.0093 = 3.9631$ mm.

■

10.3.2 Acelerómetro

Un acelerómetro es un instrumento que mide la aceleración de un cuerpo vibratorio (vea la figura 10.12) Los acelerómetros se utilizan ampliamente para medir vibración [10.7] e incluso registrar sismos. A partir del registro del acelerómetro, la velocidad y los desplazamientos se obtienen por integración. Las ecuaciones (10.18) y (10.19) producen

$$-z(t)\omega_n^2 = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \{-Y\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\} \tag{10.25}$$

Esto demuestra que si

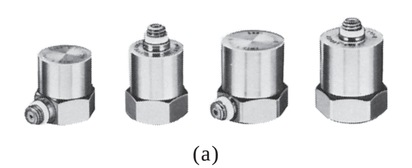
$$\frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \simeq 1 \tag{10.26}$$

la ecuación (10.25) se escribe como

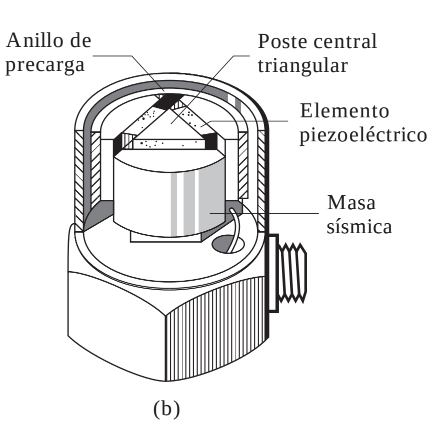
$$-z(t)\omega_n^2 \simeq -Y\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{10.27}$$

Comparando la ecuación (10.27) con $\ddot{y}(t) = -Y\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$, vemos que el término $z(t)\omega_n^2$ da la aceleración $\ddot{y}$, excepto el retraso de fase ϕ. Por tanto, se puede hacer que el instrumento registre (proporcione) directamente el valor de $\ddot{y} = -z(t)\omega_n^2$. El tiempo con el cual el registro se retrasa con respecto a la aceleración es $t' = \phi/\omega$. Si $\ddot{y}$ consta de un solo componente, el retraso no será de importancia.

El valor de la expresión del lado izquierdo de la ecuación (10.26) se muestra trazado en la figura 10.13. Se ve que el lado izquierdo de la ecuación (10.26) queda entre 0.96 y 1.04 en el rango $0 \leq r \leq 0.6$, si el valor de ζ queda entre 0.65 y 0.7. Como r es pequeña, la frecuencia natural del instrumento tiene que ser grande comparada con la frecuencia de vibración que se va a medir. Por la relación $\omega_n = \sqrt{k/m}$ vemos que la masa tiene que ser pequeña y el resorte debe tener un valor grande de k (es decir, un resorte corto), de modo que el instrumento será de tamaño pequeño. Por su pequeño tamaño y alta sensibilidad, en mediciones de vibración se prefieren los acelerómetros.



(a)



(b)

Figura 10.12 Acelerómetros. (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

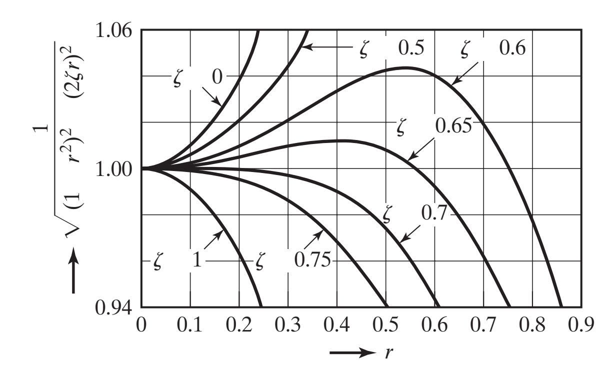


Figura 10.13 Variación del lado izquierdo de la ecuación (10.26) con r.

En la práctica, es posible que la ecuación (10.26) no se satisfaga con exactitud; en tales casos se puede utilizar la cantidad

$$\frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}$$

para hallar el valor correcto de la aceleración medida, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.3 Diseño de un acelerómetro

Un acelerómetro tiene una masa suspendida de 0.01 kg con frecuencia natural amortiguada de vibración de 150 Hz. Cuando se monta en un motor que experimenta una aceleración de 1 g a una velocidad de operación de 6000 rpm, el instrumento registra la aceleración como 9.5 m/s^2. Encuentre la constante de amortiguamiento y la rigidez de resorte del acelerómetro.

Solución: La relación de las aceleraciones medidas con la verdadera está dada por

$$\frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = \frac{\text{Valor medido}}{\text{Valor verdadero}} = \frac{9.5}{9.81} = 0.9684 \tag{E.1}$$

la cual se escribe como

$$[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2] = (1/0.9684)^2 = 1.0663 \tag{E.2}$$

La velocidad de operación del motor resulta

$$\omega = \frac{6000(2\pi)}{60} = 628.32 \text{ rad/s}$$

La frecuencia natural amortiguada de vibración del acelerómetro es

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n = 150(2\pi) = 942.48 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto

$$\frac{\omega}{\omega_d} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} = \frac{r}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{628.32}{942.48} = 0.6667 \tag{E.3}$$

La ecuación (E.3) da por resultado

$$r = 0.6667\sqrt{1 - \zeta^2} \qquad \text{o} \qquad r^2 = 0.4444(1 - \zeta^2) \tag{E.4}$$

La sustitución de la ecuación (E.4) en la ecuación (E.2) conduce a una ecuación cuadrática en ζ^2 como

$$1.5801\zeta^4 - 2.2714\zeta^2 + 0.7576 = 0 \tag{E.5}$$

La solución de la ecuación (E.5) da

$$\zeta^2 = 0.5260, 0.9115$$

o

$$\zeta = 0.7253, 0.9547$$

Seleccionando $\zeta = 0.7253$ arbitrariamente, la frecuencia natural no amortiguada del acelerómetro se determina como

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{942.48}{\sqrt{1 - 0.7253^2}} = 1368.8889 \text{ rad/s}$$

Como $\omega_n = \sqrt{k/m}$, tenemos

$$k = m\omega_n^2 = (0.01)(1368.8889)^2 = 18738.5628 \text{ N/m}$$

La constante de amortiguamiento se determina a partir de

$$c = 2m\omega_n\zeta = 2(0.01)(1368.8889)(0.7253) = 19.8571 \text{ N-s/m}$$

■

10.3.3 Velómetro

Un velómetro mide la velocidad de un cuerpo vibratorio. La ecuación (10.13) proporciona la velocidad del cuerpo vibratorio

$$\dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t \tag{10.28}$$

y la ecuación (10.18) entrega

$$\dot{z}(t) = \frac{r^2\omega Y}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \tag{10.29}$$

Si

$$\frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \simeq 1 \tag{10.30}$$

entonces

$$\dot{z}(t) \simeq \omega Y \cos(\omega t - \phi) \tag{10.31}$$

Comparando las ecuaciones (10.28) y (10.31) se ve que, con excepción de la diferencia de fase ϕ, $\dot{z}(t)$ da directamente $\dot{y}(t)$, siempre que la ecuación (10.30) sea verdadera. Para satisfacer la ecuación (10.30), r debe ser muy grande. En caso de que la ecuación (10.30) no se satisfaga, entonces la velocidad del cuerpo vibratorio se puede calcular con la ecuación (10.29).

Ejemplo 10.4 Diseño de un velómetro

Diseñe un velómetro si el error máximo se tiene que limitar a 1 por ciento de la velocidad verdadera. La frecuencia natural del velómetro tiene que ser de 80 Hz y la masa suspendida de 0.05 kg.

Solución: La ecuación (10.29) proporciona la relación (R) de las velocidades registrada y verdadera:

$$R = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = \frac{\text{Velocidad registrada}}{\text{Velocidad verdadera}} \tag{E.1}$$

El valor máximo de (E.1) ocurre cuando (vea la ecuación (3.82))

$$r = r^* = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \tag{E.2}$$

La sustitución de la ecuación (E.2) en la (E.1) resulta

$$\frac{\left(\dfrac{1}{1 - 2\zeta^2}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{1}{1 - 2\zeta^2}\right)\right]^2 + 4\zeta^2\left(\dfrac{1}{1 - 2\zeta^2}\right)}} = R$$

la cual se simplifica como

$$\frac{1}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}} = R \tag{E.3}$$

Para un error de 1 por ciento, $R = 1.01$ o 0.99, y la ecuación (E.3) conduce a

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.245075 = 0 \tag{E.4}$$

y

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.255075 = 0 \tag{E.5}$$

De la ecuación (E.5) resultan raíces imaginarias y de la ecuación (E.4)

$$\zeta^2 = 0.570178, 0.429821$$

o

$$\zeta = 0.755101, 0.655607$$

Seleccionamos el valor $\zeta = 0.755101$ arbitrariamente. La rigidez del resorte se puede encontrar como

$$k = m\omega_n^2 = 0.05(502.656)^2 = 12633.1527 \text{ N/m}$$

dado que

$$\omega_n = 80(2\pi) = 502.656 \text{ rad/s}$$

La constante de amortiguamiento se determina a partir de

$$c = 2\zeta\omega_n m = 2(0.755101)(502.656)(0.05) = 37.9556 \text{ N-s/m}$$

■

10.3.4 Distorsión de fase

Como lo muestra la ecuación (10.18), todos los instrumentos de medición de vibración presentan retraso de fase. De este modo, la respuesta o salida del instrumento se retrasa con respecto al movimiento o entrada que mide. El ángulo de fase dividido entre la frecuencia ω da el retraso. El retraso no es importante si medimos un solo componente armónico. Pero, de vez en cuando, la vibración que se va a medir no es armónica, sino que se compone de la suma de dos o más componentes armónicos. En ese caso, la gráfica registrada no da una imagen precisa de la vibración porque los diferentes armónicos se pueden amplificar en diferentes cantidades y sus desplazamientos de fase también pueden ser diferentes. La distorsión de la forma de onda de la señal registrada se conoce como *distorsión de fase* o *error de desplazamiento de fase*. Para ilustrar la naturaleza del error de desplazamiento de fase, consideramos una señal de vibración de la forma que se muestra en la figura 10.14(a) [10.10]:

$$y(t) = a_1 \text{ sen } \omega t + a_3 \text{ sen } 3\omega t \tag{10.32}$$

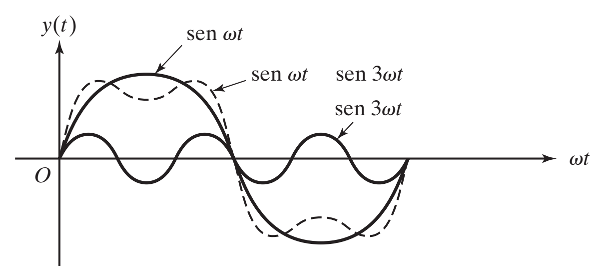
Sea el desplazamiento de fase de 90° para el primer armónico y de 180° para el tercer armónico de la ecuación (10.32). Los retrasos correspondientes son $t_1 = \theta_1/\omega = 90°$ y $t_2 = \theta_2/(3\omega) = 180°/(3\omega)$. La señal de salida se muestra en la figura 10.14(b). Se ve que la señal de salida es muy diferente de la señal de entrada debido a la distorsión de fase.

Como un caso general, sea la onda compleja que se está midiendo la dada por la suma de varios armónicos como

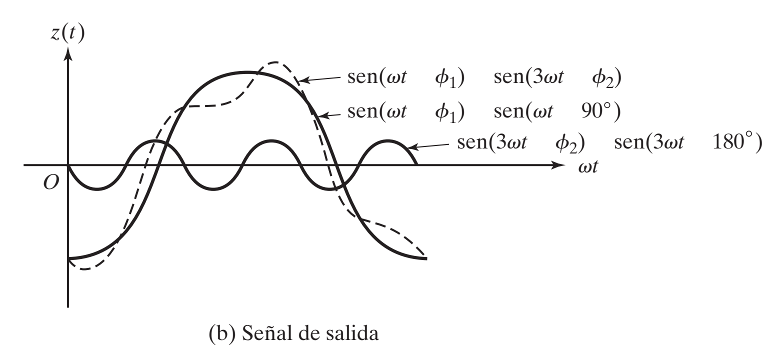
$$y(t) = a_1 \text{ sen } \omega t + a_2 \text{ sen } 2\omega t + \cdots \tag{10.33}$$

Si el desplazamiento se mide con un vibrómetro, una ecuación similar a la ecuación (10.18) da su respuesta a cada componente de la serie, de modo que la salida del vibrómetro es

$$z(t) = a_1 \text{ sen}(\omega t - \phi_1) + a_2 \text{ sen}(2\omega t - \phi_2) + \cdots \tag{10.34}$$



(a) Señal de entrada



(b) Señal de salida

Figura 10.14 Error de desplazamiento de fase.

donde

$$\tan \phi_j = \frac{2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{10.35}$$

Como ω/ω_n es grande para este instrumento, en la figura 10.11 vemos que $\phi_j \simeq \pi$, $j = 1, 2, ...$, y la ecuación (10.34) se escribe como

$$z(t) \simeq -[a_1 \operatorname{sen} \omega t + a_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots] \simeq -y(t) \tag{10.36}$$

Por lo tanto, el registro de salida será simplemente opuesto al movimiento que se está midiendo. Esto es importante y es fácil de corregir.

Aplicando un razonamiento similar, podemos demostrar, en el caso de un velómetro, que

$$\dot{z}(t) \simeq -\dot{y}(t) \tag{10.37}$$

para una señal de entrada compuesta de varios armónicos. A continuación consideramos la distorsión de fase para un acelerómetro. Sea la curva de aceleración que se va a medir, la cual será expresada utilizando la ecuación (10.33), como

$$\ddot{y}(t) = -a_1\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - a_2(2\omega)^2 \operatorname{sen} 2\omega t - \cdots \tag{10.38}$$

La respuesta o salida del instrumento a cada componente se determina como en la ecuación (10.34), y por lo tanto

$$\ddot{z}(t) = -a_1\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1) - a_2(2\omega)^2 \operatorname{sen}(2\omega t - \phi_2) - \cdots \tag{10.39}$$

donde los retrasos de fase ϕ_j son diferentes con diferentes componentes de la serie en la ecuación (10.39). Como el retraso de fase ϕ varía casi linealmente de 0° con $r = 0$ a 90° con $r = 1$ con $\zeta = 0.7$ (vea la figura 10.11), podemos expresar ϕ como

$$\phi \simeq \alpha r = \alpha \frac{\omega}{\omega_n} = \beta\omega \tag{10.40}$$

donde α y $\beta = \alpha/\omega_n$ son constantes. El retraso es

$$t' = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\beta\omega}{\omega} = \beta \tag{10.41}$$

Esto demuestra que el retraso del acelerómetro es independiente de la frecuencia de cualquier componente siempre que la frecuencia quede en el intervalo $0 \leq r \leq 1$. Como cada componente de la señal tiene el mismo periodo de retraso o retraso de fase, tenemos, de acuerdo con la ecuación (10.39),

$$\begin{aligned} -\omega^2\ddot{z}(t) &= -a_1\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - \omega\beta) - a_2(2\omega)^2 \operatorname{sen}(2\omega t - 2\omega\beta) - \cdots \\ &= -a_1\omega^2 \operatorname{sen} \omega\tau - a_2(2\omega)^2 \operatorname{sen} 2\omega\tau - \cdots \end{aligned} \tag{10.42}$$

donde $\tau = t - \beta$. Observe que la ecuación (10.42) asume que $0 \leq r \leq 1$, es decir, incluso la frecuencia más alta implicada, $n\omega$, es menor que ω_n. Esto puede no ser cierto en la práctica. Afortunadamente, no ocurre distorsión de fase significativa en la señal de salida, aun cuando algunas de las frecuencias más altas sean más grandes que ω_n. La razón es que, por lo común, únicamente los primeros componentes son importantes para representar incluso una forma de onda compleja; las amplitudes de los armónicos más altos son pequeñas y contribuyen muy poco a la forma de onda total. Por lo tanto, el registro de salida del acelerómetro representa una aceleración medida razonablemente verdadera [10.7, 10.11].

10.4 Instrumentos de medición de frecuencia

La mayoría de los instrumentos de medición de frecuencia son del tipo mecánico y se basan en el principio de resonancia. En los párrafos siguientes se analizan dos clases: el tacómetro de Fullarton y el tacómetro de Frahm.

Instrumento de una sola lengüeta, o tacómetro de Fullarton. Este instrumento se compone de una lengüeta en voladizo de longitud variable con una masa unida a uno de sus extremos. El otro extremo de la lengüeta está sujeto, y su longitud libre se puede cambiar por medio de un mecanismo de tornillo (vea la figura 10.15(a)). Como cada longitud de la lengüeta corresponde a una diferente frecuencia natural, la lengüeta se marca a lo largo de su longitud en función de su frecuencia natural. En la práctica, el extremo sujeto de la lengüeta se presiona contra el cuerpo vibratorio, y se manipula el mecanismo de tornillo para modificar su longitud libre hasta que el extremo libre

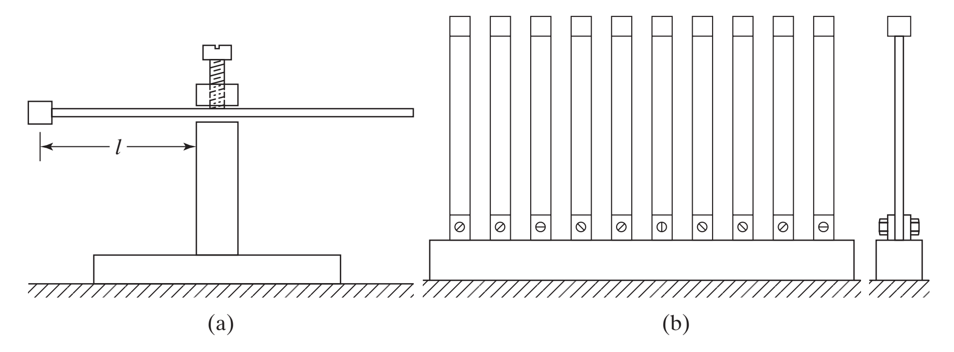


Figura 10.15 Instrumentos de medición de frecuencia.

muestra la amplitud más grande de vibración. En ese instante, la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural de la lengüeta en voladizo; se puede leer directamente desde la lengüeta.

Instrumento de múltiples lengüetas o tacómetro de Frahm. Este instrumento de compone de varias lengüetas en voladizo con pequeñas masas en sus extremos libres (vea la figura 10.15(b)). Cada lengüeta tiene una frecuencia natural diferente y está marcada como corresponde. Con varias lengüetas es posible cubrir un amplio rango de frecuencias. Cuando el instrumento se instala en un cuerpo vibratorio, la lengüeta cuya frecuencia natural se aproxima más a la frecuencia desconocida del cuerpo vibra con la amplitud más grande. La frecuencia del cuerpo vibratorio se determina a partir de la frecuencia conocida de la lengüeta vibratoria.

Estroboscopio. Un estroboscopio es un instrumento que produce pulsos luminosos de forma intermitente. La frecuencia a la cual se producen los pulsos luminosos se puede modificar y leer con el instrumento. Cuando se observa un punto específico de un objeto rotatorio (vibratorio) con el estroboscopio, parecerá estacionario sólo cuando la frecuencia de la luz pulsante se iguale a la velocidad del objeto rotatorio (vibratorio). La ventaja principal del estroboscopio es que no hace contacto con el cuerpo rotatorio (vibratorio). Debido a la persistencia de la visión, la frecuencia más baja que se puede medir con un estroboscopio es aproximadamente de 15 Hz. La figura 10.16 muestra un estroboscopio común.

Figura 10.16 Estroboscopio. (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

10.5 Excitadores de vibración

Los excitadores de vibración o agitadores se pueden utilizar en varias aplicaciones, como en la determinación de las características dinámicas de máquinas y estructuras y en pruebas de fatiga de materiales. Los excitadores de vibración pueden ser de tipo mecánico, electromagnético, electrodinámico o hidráulico. En esta sección se describen los principios de funcionamiento de excitadores mecánicos y electromagnéticos.

10.5.1 Excitadores mecánicos

Como se indica en la sección 1.10 (figura 1.46), se puede utilizar un mecanismo de yugo escocés para producir vibraciones armónicas. La manivela del mecanismo puede ser accionada por un motor de velocidad constante, o por uno de velocidad variable. Cuando se requiere que una estructura vibre, la fuerza armónica se puede aplicar bien como una fuerza de inercia, como se muestra en la figura 10.17(a), o como una fuerza de resorte elástico, como se muestra en la figura 10.17(b). Por lo común estos vibradores se utilizan para frecuencias menores que 30 Hz y cargas menores que 700 N [10.1].

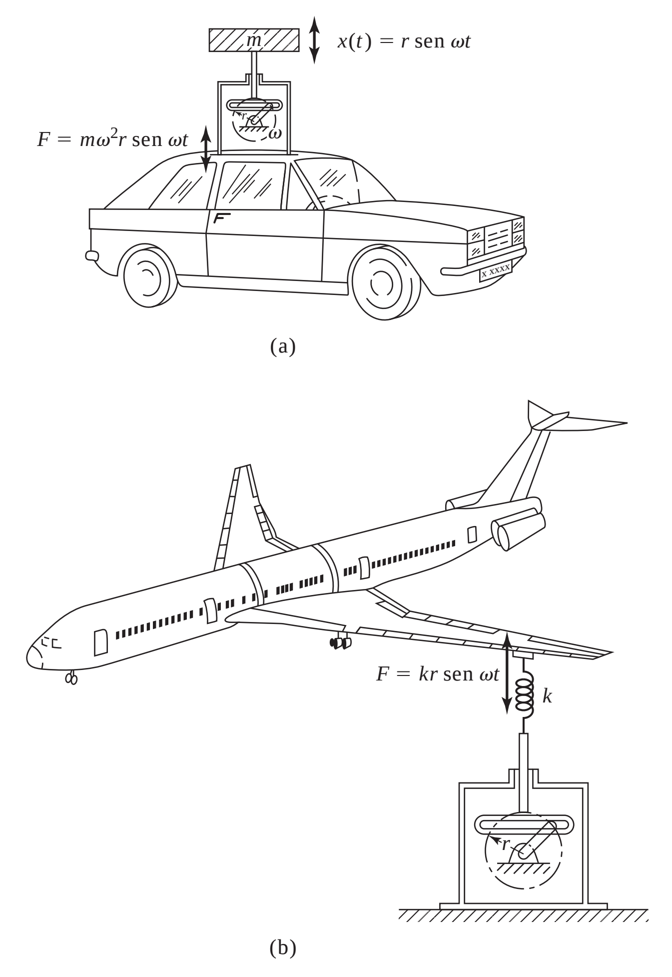


Figura 10.17 Vibración de una estructura por medio de (a) una fuerza de inercia; (b) una fuerza de resorte elástico.

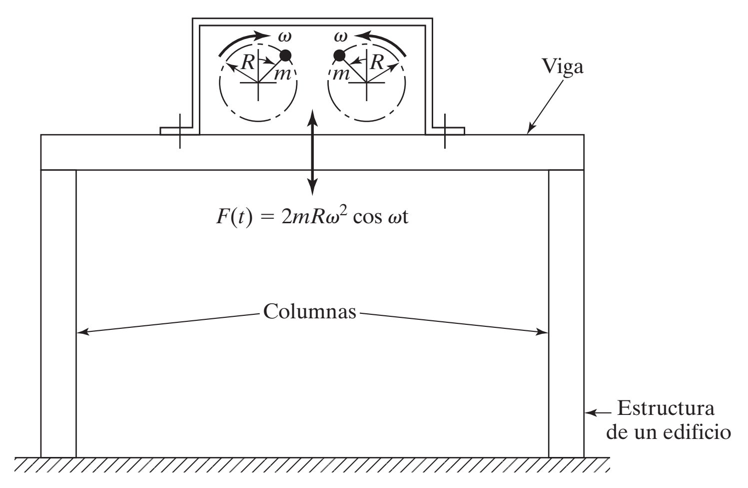


Figura 10.18 Excitación producida por una fuerza desbalanceada.

El desbalance creado por dos masas que giran a la misma velocidad en direcciones opuestas (vea la figura 10.18) se puede utilizar como un excitador mecánico. Este tipo de agitador se puede utilizar para generar cargas relativamente grandes entre 250 y 25 000 N. Si las dos masas, cada una de magnitud m, giran a una velocidad angular w en un radio R, la fuerza vertical $F(t)$ generada es resultado de

$$F(t) = 2mR\omega^2 \cos \omega t \tag{10.43}$$

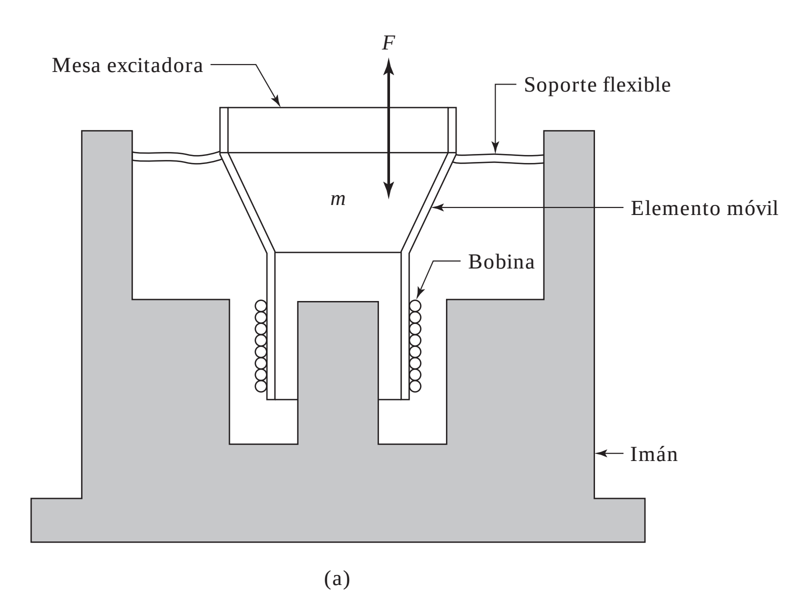
Los componentes horizontales de las dos masas de cancelan, de ahí que la fuerza horizontal resultante sea cero. La fuerza $F(t)$ se aplicará a la estructura donde esté instalado el excitador.

10.5.2 Agitador electrodinámico

El diagrama de un *agitador electrodinámico*, también conocido como *excitador electromagnético*, se muestra en la figura 10.19(a). Como se indicó en la sección 10.2.3, el agitador electrodinámico se puede considerar como lo opuesto a un transductor electrodinámico. Cuando pasa corriente a través de una bobina colocada en un campo magnético, se produce una fuerza F (Newtons) proporcional a la corriente I (amperes) y la intensidad de flujo magnético (teslas), la cual acelera el componente colocado en la mesa agitadora:

$$F = DIl \tag{10.44}$$

donde l es la longitud de la bobina (en metros). El campo magnético es producido por un imán permanente en agitadores pequeños en tanto que en agitadores grandes se utiliza un electroimán. La magnitud de la aceleración de la mesa o componente depende de la corriente máxima y las masas del componente y el elemento móvil del agitador. Si la corriente que fluye a través de la bobina varía armónicamente con el tiempo (corriente c.a.), la fuerza producida también varía armónicamente. Por otra parte, si se utiliza corriente directa para energizar la bobina, se genera una fuerza constante en la mesa excitadora. Se pueden utilizar excitadores electrodinámicos junto con una inercia o un resorte como en el caso de las figuras 10.17(a) y (b) para poner a vibrar la estructura.



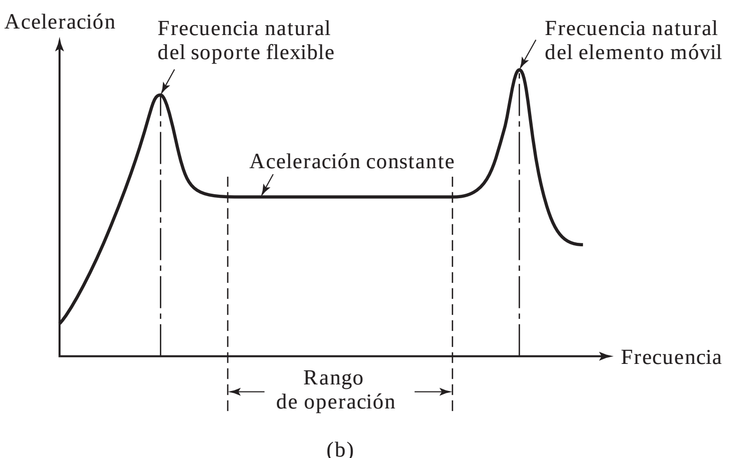


Figura 10.19 (a) Agitador electrodinámico. (b) Características de resonancia típicas de un excitador electrodinámico.

Como la bobina y el elemento móvil deben tener un movimiento lineal, se suspenden de un soporte flexible (de rigidez vertical muy pequeña) como se muestra en la figura 10.19(a). De este modo, el excitador electromagnético tiene dos frecuencias naturales: una que corresponde a la frecuencia natural del soporte flexible, y la otra que corresponde a la frecuencia natural del elemento móvil, la cual puede llegar a ser muy grande. Estas dos frecuencias resonantes se muestran en la figura 10.19(b). El rango de frecuencia de operación del excitador queda entre estas dos frecuencias resonantes, como se indica en la figura 10.19(b) [10.7].

Los excitadores electromagnéticos se utilizan para generar fuerzas hasta de 30 000 N, desplazamientos hasta de 25 mm y frecuencias en el rango de 5 a 20 kHz [10.1]. En la figura 10.20 se muestra un excitador electrodinámico práctico.

Figura10.20 Excitador con un cabezal de uso general. (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

10.6 Análisis de señales

En el análisis de señales determinamos la respuesta de un sistema sometido a una excitación conocida y lo presentamos en una forma conveniente. Suele suceder que con el tiempo la respuesta de un sistema no proporcione mucha información útil. Sin embargo, la respuesta de frecuencia mostrará una o más frecuencias separadas en torno a las cuales se concentra la energía. Como por lo común se conocen las características dinámicas de los componentes individuales del sistema, podemos relacionar los distintos componentes de frecuencia (de la respuesta de frecuencia) con componentes específicos [10.3].

Por ejemplo, el cronograma de la aceleración de la estructura de una máquina sometida a una vibración excesiva podría ser como aparece en la figura 10.21(a). Esta figura no se puede utilizar para identificar la causa de la vibración. Si el cronograma de la aceleración se cambia al dominio de la frecuencia, el espectro de frecuencia resultante podría aparecer como se muestra en la figura 10.21(b) donde, para ser más específicos, la energía se muestra concentrada alrededor de 25 Hz. Esta frecuencia se puede relacionar fácilmente con, por ejemplo, la velocidad de rotación de un motor particular. Por lo tanto, el espectro de aceleración muestra una fuerte evidencia de que el motor podría ser el causante de la vibración. Si el motor está provocando vibraciones excesivas, el cambio del motor o de su velocidad de funcionamiento podría evitar la resonancia y por consiguiente el problema de vibraciones excesivas.

10.6.1 Analizadores de espectros

Se pueden utilizar analizadores de espectro o de frecuencia para analizar señales. Estos dispositivos analizan una señal en el dominio de la frecuencia separando la energía de la señal en varias bandas de frecuencia. La separación de la energía de la señal en bandas de frecuencia se realiza por medio de un conjunto de filtros. Los analizadores se suelen clasificar según el tipo de filtro empleado. Por ejemplo, si se utiliza un filtro de banda octava, el analizador de espectro se conoce como *analizador de banda octava.*

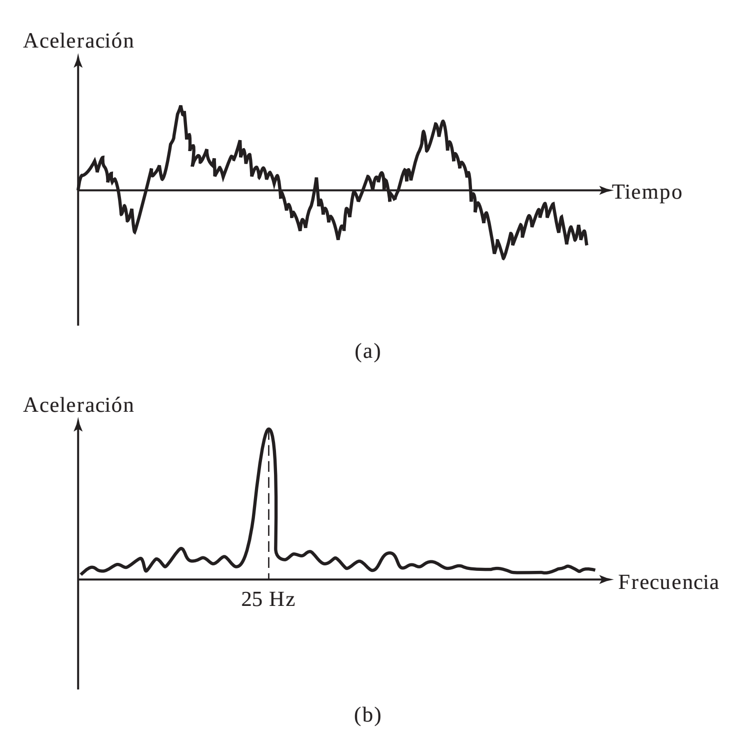


Figura 10.21 Historial de la aceleración.

Recientemente los analizadores digitales se han hecho muy populares para el análisis de señales en tiempo real. En un análisis de frecuencia en tiempo real, la señal se analiza de forma continua en todas las bandas de frecuencia. De este modo, el proceso de cálculo no debe llevarse más tiempo que el de reunir los datos de las señales. Los analizadores en tiempo real son especialmente útiles para monitorear la salud de la maquinaria, puesto que se puede observar un cambio en el espectro de ruido o de vibración al mismo tiempo que ocurre un cambio en la máquina. Hay dos tipos de procedimientos de análisis de tiempo real: el método de filtración digital, y el método rápido de la transformada de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) [10.13].

El método de filtración digital es más adecuado para el análisis de ancho de banda de porcentaje constante, el método FFT para el análisis de ancho de banda constante. Antes de que consideremos la diferencia entre los dos métodos, primero analizamos el componente básico de un analizador de espectro, es decir, el filtro pasabanda.

10.6.2 Filtro pasabanda

Un filtro pasabanda es un circuito que permite el paso de componentes de frecuencia de una señal dentro de una banda de frecuencia y rechaza todos los demás componentes de frecuencia de la señal. Un filtro se puede construir, por ejemplo, con resistores, inductores y capacitores. La figura 10.22 ilustra las características de respuesta de un filtro cuyas frecuencias de corte baja y alta son f_l y f_u, respectivamente. Un filtro práctico tendrá una característica de respuesta que se desvía del rectángulo ideal, como se muestra por medio de la línea continua en la figura 10.22. Para un buen filtro pasabanda, las fluctuaciones dentro de la banda serán mínimas y las pendientes de las faldas del filtro serán empinadas para mantener el ancho de banda cerca del valor ideal, $B = f_u - f_t$.

Para un filtro práctico, las frecuencias f_l y f_u a las cuales la respuesta ocurre a 3 dB[4] por debajo de su respuesta pasabanda media se conocen como frecuencias de corte.

Hay dos tipos de filtros pasabanda que se utilizan en el análisis de señales: el filtro de ancho de banda de porcentaje constante y el filtro de ancho de banda constante. Para un filtro de ancho de banda de porcentaje constante la relación del ancho de banda a la frecuencia central (sintonizada) $(f_u - f_l)/f_c$ es una constante. Los filtros de una octava,[5] de media octava y de un tercio de octava, son ejemplos de filtros de ancho de banda de porcentaje constante. La tabla 10.1 muestra algunos de los límites de corte y frecuencias centrales de bandas de una octava que se usan en el análisis de señales. Para un filtro de ancho de banda constante, el ancho de banda, $f_u - f_l$, es independiente de la frecuencia central (sintonizada), f_c.

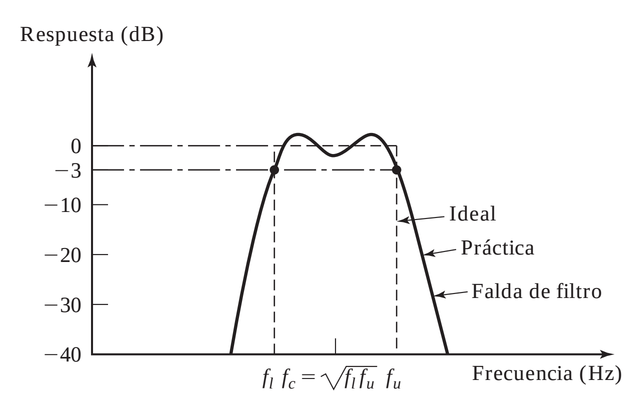


Figura 10.22 Respuesta de un filtro.

Tabla 10.1

Límite de corte bajo (Hz)	5.63	11.2	22.4	44.7	89.2	178	355	709	1410
Frecuencia central (Hz)	8.0	16.0	31.5	63.0	125	250	500	1000	2000
Límite de corte alto (Hz)	11.2	22.4	44.7	89.2	178	355	709	1410	2820

[4] Un decibel (dB) de una cantidad (como potencia, P) se define como

$$\text{Cantidad en dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right)$$

donde P es la potencia y P_{ref} es un valor de referencia de la potencia.

[5] Una octava es el intervalo entre dos frecuencias cualesquiera $(f_2 - f_1)$, cuya relación de frecuencia (f_2/f_1), es 2. Se dice que dos frecuencias f_1 y f_2 están separadas por varias octavas N cuando

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^N \qquad \text{o} \qquad N \text{ (en octavas)} = \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

donde N puede ser un entero o una fracción. Si $N = 1$, tenemos una octava; si $N = 1/3$ tenemos un tercio de octava, etcétera.

10.6.3 Analizadores de ancho de banda de porcentaje constante y de ancho de banda constante

La diferencia principal entre los analizadores de ancho de banda de porcentaje constante y ancho de banda constante radica en el detalle proporcionado por los varios anchos de banda. Los filtros de una octava de banda, cuya frecuencia de corte alta es dos veces la frecuencia de corte baja, dan por resultado un análisis menos detallado (demasiado basto) para la vibración y ruido prácticos encontrados en máquinas. El filtro de media octava proporciona el doble de información pero requiere el doble de tiempo para obtener los datos. Se puede utilizar un analizador de espectros con un conjunto de filtros de una octava y un tercio de octava para analizar ruido (señal). Cada filtro se sintoniza a una frecuencia central diferente para abarcar todo el rango de frecuencia de interés. Como la frecuencia de corte baja de un filtro es igual a la frecuencia de corte alta del filtro anterior, la característica de filtro compuesto aparecerá como se muestra en la figura 10.23. La figura 10.24 muestra un analizador de frecuencia digital de una octava y fracción de octava en tiempo real. Se utiliza un analizador de ancho de banda constante para obtener un análisis más detallado que en el caso de un analizador de ancho de banda de porcentaje constante, sobre todo en el rango de alta frecuencia de la señal. Cuando el filtro de ancho de banda constante se utiliza con una frecuencia central de variación continua, se conoce como analizador de onda o heterodino. Los analizadores heterodinos están disponibles con anchos de banda constantes que van de uno a varios cientos de hertz. En la figura 10.25 se muestra un analizador heterodino práctico.

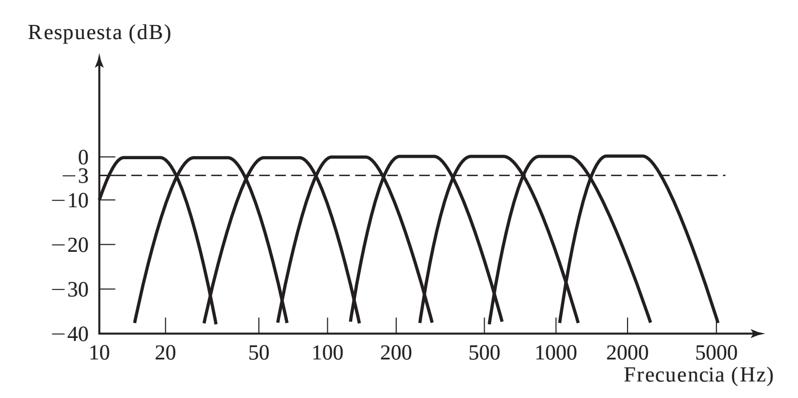


Figura 10.23 Característica de respuesta de un conjunto típico de filtros de una octava.

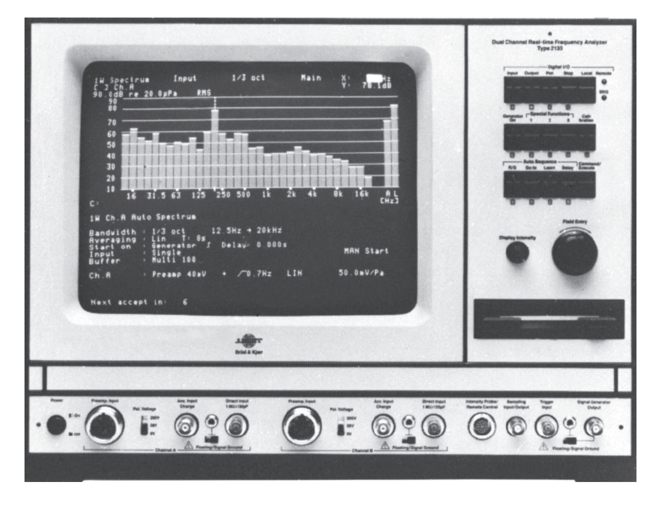


Figura 10.24 Analizador de frecuencia digital de una octava y fracción de octava. (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

Figura 10.25 Analizador heterodino (Cortesía de Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, MA.).

10.7 Prueba dinámica de máquinas y estructuras

La prueba dinámica de máquinas (estructuras) implica la determinación de su deformación a una frecuencia crítica. Esto se puede hacer aplicando los dos métodos siguientes [10.3].

10.7.1 Uso de las mediciones operacionales de deflexión

En este método, la deflexión dinámica forzada se mide en la frecuencia de estado estable (operación) del sistema. Para efectuar la medición se monta un acelerómetro en algún punto de la máquina (estructura) como referencia, y se coloca otro acelerómetro móvil en varios puntos y diferentes direcciones si es necesario. Luego se miden las magnitudes y las diferencias de fase entre los acelerómetros móviles y de referencia en todos los puntos en operación de estado estable del sistema. Trazando estas mediciones podemos hallar cómo se mueven las diversas partes de la máquina (estructura) una respecto de la otra, e incluso de manera absoluta.

La deflexión medida es válida sólo para las fuerzas y/o frecuencia asociadas con las condiciones de operación; como tal, no podemos obtener información sobre otras deflexiones bajo otras fuerzas y/o frecuencias. Sin embargo, la deflexión medida puede ser bastante útil. Por ejemplo, si una parte o ubicación particular experimenta una deflexión excesiva, podemos reforzar dicha parte o ubicación. Esto, de hecho, incrementa la frecuencia natural más allá del rango de frecuencia operacional del sistema.

10.7.2 Uso de una prueba modal

Como cualquier respuesta dinámica de una máquina (estructura) se puede obtener como una combinación de sus modos, el conocimiento de los modos, las frecuencias modales y las relaciones de amortiguamiento modales constituyen una descripción dinámica completa de la máquina (estructura). En la siguiente sección se describe el procedimiento de análisis modal experimental.

10.8 Análisis modal experimental

10.8.1 La idea básica

El *análisis modal experimental*, también conocido como *análisis modal* o *prueba modal*, se refiere a la determinación de frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento y modos por medio de una prueba de vibración. Hay dos ideas básicas implicadas:

1. Cuando una estructura, máquina o cualquier sistema es excitado, su respuesta presenta un pico agudo en resonancia cuando la frecuencia forzada es igual a su frecuencia natural si el amortiguamiento no es grande.
2. La fase de la respuesta cambia 180° cuando la frecuencia forzada cruza la frecuencia natural de la estructura o máquina, y la fase será de 90° en resonancia.

10.8.2 Equipo necesario

La medición de vibración requiere el siguiente equipo:

1. Un excitador o fuente de vibración para aplicar una fuerza de entrada conocida a la estructura o máquina.
2. Un transductor para convertir el movimiento físico de la estructura o máquina en una señal eléctrica.
3. Un amplificador de acondicionamiento de señal para hacer las características del transductor compatibles con la electrónica de entrada del sistema de adquisición de datos digital.
4. Un analizador para realizar las tareas de procesamiento de señales y análisis modal mediante un programa de computadora apropiado.

Excitador. El excitador puede ser un agitador electromagnético o un martillo de impacto. Como se explica en la sección 10.5.2, el agitador electromagnético es capaz de proporcionar grandes fuerzas de entrada para que la respuesta sea fácil de medir. Además, la salida del agitador es fácil de controlar si es de tipo electromagnético. Por lo común, la señal de excitación es del tipo de barrido senoidal o aleatoria. En la entrada de barrido senoidal se aplica una fuerza armónica de magnitud F a varias frecuencias discretas a lo largo de un rango de frecuencia específico de interés. A cada frecuencia separada se hace que la estructura o máquina alcance un estado estable antes de que se midan la magnitud y fase de la respuesta. Si el agitador se fija en la estructura o máquina que se está probando, la masa del agitador influirá en respuesta medida (lo cual se conoce como *efecto de carga de masa*). Como tal, se tiene que tener cuidado para minimizar el efecto de la masa del agitador. Por lo general el agitador se fija en la estructura o máquina por medio de una varilla corta, llamada *larguero*, para aislarlo, reducir la masa agregada y aplicar la fuerza a la estructura o máquina a lo largo de la dirección axial del larguero. Esto permite controlar la dirección de la fuerza aplicada a la estructura o máquina.

El martillo de impacto es un martillo con un transductor de fuerza incorporado en su cabeza como se indica en los ejemplos 4.7 y 4.8. El martillo de impacto se puede utilizar para golpear o impactar la estructura o máquina que se está probando para producir un amplio rango de frecuencias sin provocar el problema de carga de masa. La fuerza de impacto producida por el martillo de impacto, la cual es casi proporcional a la masa de la cabeza del martillo y la velocidad de impacto, se pueden determinar con el transductor de fuerza insertado en la cabeza del martillo. Como se muestra en la sección 6.15, la respuesta de la estructura o máquina a un impulso se compone de excitaciones a cada una de las frecuencias naturales de la estructura o máquina.

Aun cuando el martillo de impacto es sencillo, portátil, económico y mucho más fácil de utilizar que un agitador, a menudo no es capaz de impartir suficiente energía para obtener señales de respuesta adecuadas en el rango de frecuencia de interés. También es difícil controlar la dirección de la fuerza aplicada con un martillo de impacto. En la figura 10.26 se muestra una respuesta de frecuencia típica de una estructura o máquina obtenida con un martillo de impacto. La forma

de la respuesta de frecuencia depende de la masa y rigidez tanto del martillo como de la estructura o máquina. El rango útil de excitación de frecuencia suele estar limitado por una frecuencia de corte ω_c, lo cual implica que la estructura o máquina no recibió suficiente energía para excitar modos más allá de ω_c. El valor de ω_c se suele considerar como la frecuencia donde la amplitud de la respuesta de frecuencia se reduce en 10 a 20 dB de su valor máximo.

Transductor. Entre los transductores, los piezoeléctricos son los más populares (vea la sección 10.2.2). Se puede diseñar un transductor piezoeléctrico para generar señales proporcionales a la fuerza o a la aceleración. En un acelerómetro, el material piezoeléctrico actúa como un resorte rígido que hace que el transductor tenga una frecuencia resonante o natural. Por lo común, la frecuencia máxima medible de un acelerómetro es una fracción de su frecuencia natural. También se pueden utilizar medidores de deformación para medir la respuesta de vibración de una estructura o máquina, como se vio en la sección 10.2.1.

Acondicionador de señales. Como la impedancia de salida de un transductor no es adecuada para entrada directa al equipo de análisis de señales, se utilizan acondicionadores de señales, en forma de amplificadores de carga o voltaje, para igualar y amplificar las señales antes de analizarlas.

Analizador. Después de acondicionar la señal de respuesta, se envía a un analizador para su procesamiento. Un tipo que comúnmente se utiliza es el *analizador de transformada rápida de Fourier (FFT*, por sus siglas en inglés). Tal analizador recibe señales de voltaje analógicas (que representan desplazamiento, velocidad, aceleración, deformación o fuerza) desde un amplificador de acondicionamiento de señales, filtro, o digitalizador para realizar cálculos. Calcula los espectros de frecuencia discretos de señales individuales así como los espectros cruzados entre las señales de entrada y las diferentes señales de salida. Las señales analizadas se pueden utilizar para determinar las frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento y modos en forma numérica o gráfica.

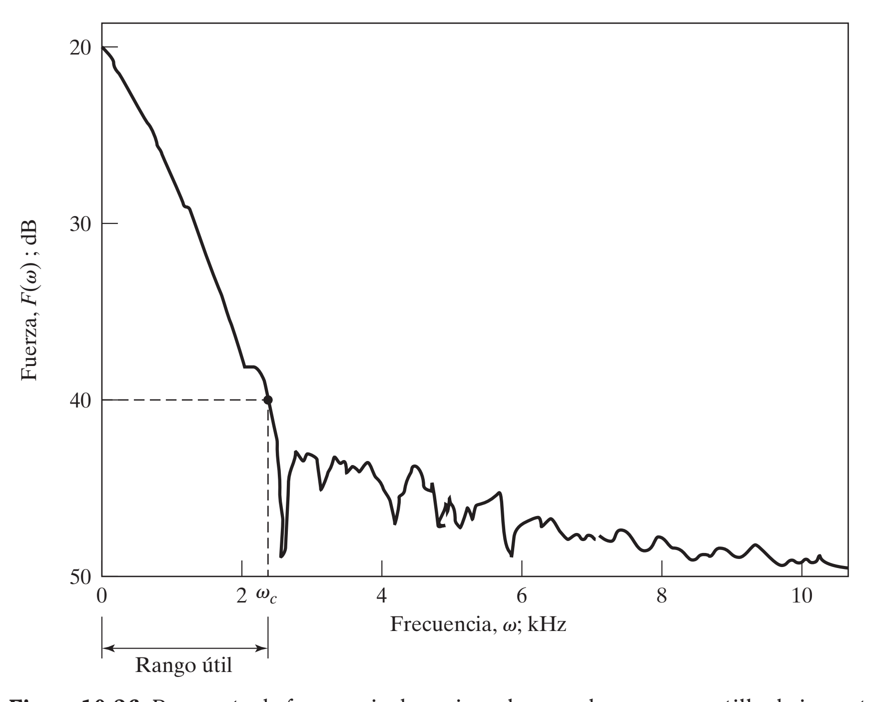


Figura 10.26 Respuesta de frecuencia de un impulso creado por un martillo de impacto.

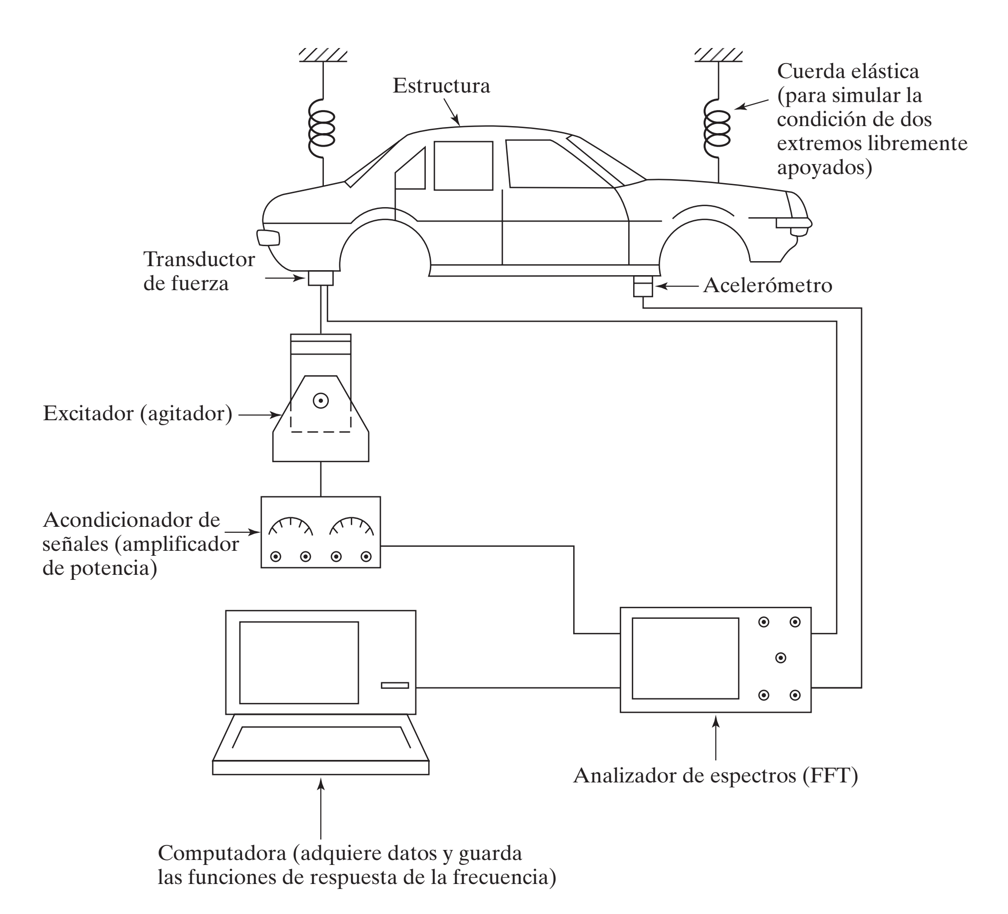


Figura 10.27 Análisis modal experimental.

El montaje general para el análisis modal experimental de un sistema estructural o mecánico se muestra en la figura 10.27. Observe que todo el equipo se tiene que calibrar antes de usarlo. Por ejemplo, en el análisis de esfuerzo experimental se utiliza con más frecuencia un martillo de impacto por la sencilla razón de es que es más cómodo y rápido de utilizar que un agitador. Un martillo de impacto se compone de un transductor de fuerza o celda de carga incorporada en la cabeza (o punta) del martillo. El transductor de fuerza se tiene que calibrar dinámicamente siempre que se cambian la cabeza o la punta. Asimismo, los transductores, junto con los acondicionadores de señales, se deben calibrar con respecto a magnitud y fase a lo largo del rango de frecuencia de interés.

10.8.3 Procesamiento de señales digitales

El analizador convierte las señales analógicas en el dominio del tiempo, $x(t)$, en datos digitales en el dominio de frecuencia por medio de relaciones de la serie de Fourier, dadas por las ecuaciones (1.97) a (1.99), para facilitar el cálculo digital. De este modo el analizador acepta las señales de salida analógicas de acelerómetros o transductores de fuerza, $x(t)$, y calcula los coeficientes espectrales de estas señales a_0, a_n y b_n utilizando las ecuaciones (1.97) a (1.99) en el dominio de frecuencia. El proceso de convertir señales analógicas en datos digitales se indica en la figura 10.28 para dos señales representativas. En la figura 10.28, $x(t)$ denota la señal analógica y $x_i = x(t_i)$ representa el registro digital correspondiente, donde t_i indica el valor de tiempo i-ésimo discreto. Un convertidor analógico a digital (A/D) realiza este proceso, el cual es parte de un analizador digital. Si se reúnen

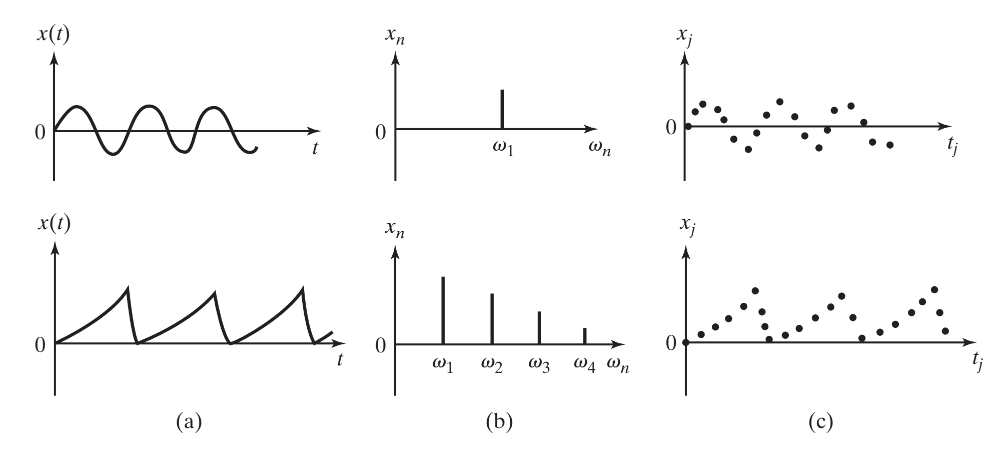


Figura 10.28 Representación de señales en diferentes formas: (a) Señales en el dominio del tiempo. (b) Señales en el dominio de la frecuencia. (c) Registros digitales de $x(t)$.

N muestras de $x(t)$ como valores de tiempo discretos, t_i, se pueden utilizar los datos $[x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_N(t_i)]$ para obtener la forma discreta de la transformada de Fourier como

$$x_j = x(t_j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N/2}\left(a_i \cos\frac{2\pi i t_j}{T} + b_i \operatorname{sen}\frac{2\pi i t_j}{T}\right); \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{10.45}$$

donde las ecuaciones 10.46 a 10.48 proporcionan los coeficientes espectrales digitales a_0, a_i y b_i (vea las ecuaciones (1.97) a (1.99)).

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \tag{10.46}$$

$$a_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \cos\frac{2\pi i t_j}{N} \tag{10.47}$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \operatorname{sen}\frac{2\pi i t_j}{N} \tag{10.48}$$

con la cantidad de muestras N igual a la misma potencia de 2 (como 256, 512 o 1024) el cual está fijo para un analizador dado. Las ecuaciones (10.46) a (10.48) indican N ecuaciones algebraicas para cada una de las N muestras. Las ecuaciones se pueden expresar en forma matricial como

$$\vec{X} = [A]\vec{d} \tag{10.49}$$

donde $\vec{X} = \{x_1, x_2 \cdots x_N\}^T$ es el vector de las muestras, $\vec{d} = \{a_0, a_1, a_2 \cdots a_{N/2} b_1 b_2 \cdots b_{N/2}\}^T$ es el vector de coeficientes espectrales y $[A]$ es la matriz compuesta de los coeficientes cos $\frac{2\pi i t_j}{T}$ y

sen $\frac{2\pi i t_j}{T}$ de las ecuaciones (10.46)-(10.48). El contenido de frecuencia de la señal o respuesta del sistema se determina a partir de la solución

$$\vec{d} = [A]^{-1}\vec{X} \tag{10.50}$$

10.8.4 Análisis de señales aleatorias

donde $[A]^{-1}$ se calcula de forma eficiente si el analizador utiliza la transformada de Fourier (FFT). Los datos de entrada y salida medidos por los transductores en general contienen algún componente o ruido aleatorio que dificulta el análisis de los datos de una manera determinística. Incluso, en algunos casos se utiliza excitación aleatoria en pruebas de vibración. Por lo tanto, el análisis de señales aleatorias se hace necesario en pruebas de vibración. Si $x(t)$ es una señal aleatoria, como se muestra en la figura 10.29, su promedio o media, indicados como $\overline{x}$, se define como[6]

$$\overline{x}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^T x(t)\, dt \tag{10.51}$$

la que, para una señal digital, se expresa como

$$\overline{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x(t_j) \tag{10.52}$$

Correspondiente a cualquier señal aleatoria $y(t)$, siempre podemos definir una nueva variable $x(t)$ como $x(t) = y(t) - \overline{y}(t)$, de modo que el valor medio de $x(t)$ es cero. Por consiguiente, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la señal $x(t)$ tenga una media de cero y definir el valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados o varianza de $x(t)$ indicada por $\overline{x}^2(t)$, como

$$\overline{x}^2(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt \tag{10.53}$$

la que, para una señal digital con N muestras de $x(t)$ en $t = t_1, t_2, ..., t_N$, se puede expresar como

$$\overline{x}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x^2(t_j) \tag{10.54}$$

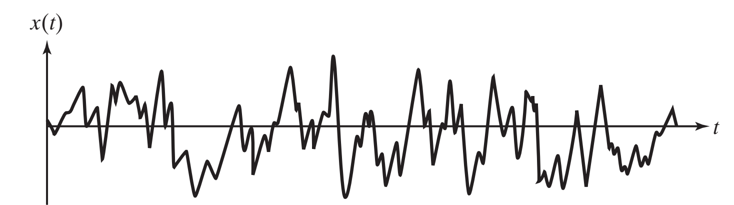


Figura 10.29 Una señal aleatoria, $x(t)$.

[6] En el capítulo 14 (en inglés) se analizan con detalle las señales aleatorias (procesos) y vibraciones aleatorias.

El valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados (RCM) de $x(t)$ es

$$x_{\text{RCM}} = \sqrt{\overline{x}^2} \tag{10.55}$$

La función de autocorrelación de una señal aleatoria $x(t)$, indicada como $R(t)$, mide la velocidad con la cual la señal cambia en el dominio del tiempo y se define como

$$R(t) = x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau)x(\tau + t)\, d\tau \tag{10.56}$$

la cual, para una señal digital, se escribe como

$$R(n, \Delta t) = \frac{1}{N - n} \sum_{j=0}^{N-n} x_j x_{j+n} \tag{10.57}$$

donde N es la cantidad de muestras, Δt es el intervalo de muestreo y n es un parámetro ajustable que controla cuántos puntos se utilizan en el cálculo. Se ve que $R(0)$ denota el valor de la media al cuadrado $\overline{x}^2$, de $x(t)$. La función de autocorrelación se puede utilizar para identificar la presencia de componentes periódicos (ocultos) en una señal aleatoria. Si $x(t)$ es puramente aleatoria, entonces $R(t) \to 0$ a medida que $T \to \infty$. Sin embargo, si $x(t)$ es periódica o tiene un componente periódico, entonces $R(t)$ también será periódica.

La densidad espectral de potencia (DEP) de una señal aleatoria $x(t)$, expresada como $S(\omega)$, mide la velocidad con la cual la señal cambia en el dominio de la frecuencia y se define como la transformada de Fourier de $R(t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \tag{10.58}$$

la cual, en forma digital, se expresa como

$$S(\Delta\omega) = \frac{|x(\omega)|^2}{N\, \Delta t} \tag{10.59}$$

donde $|x(\omega)|^2$ representa la magnitud de la transformada de Fourier de los datos muestreados de $x(t)$. Las definiciones de autocorrelación y funciones de DEP se pueden ampliar para dos señales diferentes, como una señal de desplazamiento $x(t)$ y una señal de fuerza aplicada $f(t)$. Esto conduce a la función de correlación cruzada, $R_{xf}(t)$ y la DEP cruzada $S_{xf}(\omega)$:

$$R_{xf}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) f(\tau + t)\, d\tau \tag{10.60}$$

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \tag{10.61}$$

Las ecuaciones (10.60) y (10.61) permiten determinar las funciones de transferencia de la estructura o máquina que se está probando. En la ecuación (10.60), si a $f(\tau + t)$ la reemplaza $x(\tau + t)$,

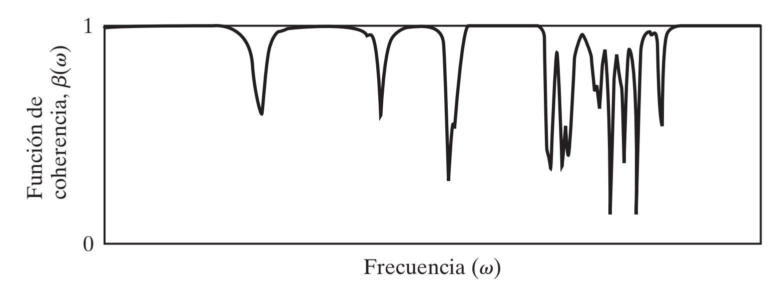


Figura 10.30 Típica función de coherencia.

obtenemos $R_{xx}(t)$, la cual al utilizarla en la ecuación (10.61) conduce a $S_{xx}(\omega)$. La función de respuesta de frecuencia, $H(i\omega)$, está relacionada con las funciones DEP como sigue

$$S_{xx}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \tag{10.62}$$

$$S_{fx}(\omega) = H(i\omega) S_{ff}(\omega) \tag{10.63}$$

$$S_{xx}(\omega) = H(i\omega) S_{xf}(\omega) \tag{10.64}$$

con $f(t)$ y $x(t)$ que indican la entrada de fuerza aleatoria y la respuesta de salida resultante, respectivamente. La función $S_{xx}(\omega)$, dada por la ecuación (10.62), contiene información sobre la magnitud de la función de transferencia del sistema (estructura o máquina), mientras que las funciones $S_{xf}(\omega)$ y $S_{xx}(\omega)$, dadas por las ecuaciones (10.63) y (10.64), contienen información tanto sobre magnitud como sobre fase. En pruebas de vibración, el analizador de espectro primero calcula las diferentes funciones de densidad espectrales a partir de los resultados de salida del transductor, y luego calcula la función de respuesta de frecuencia $H(i\omega)$ del sistema con las ecuaciones (10.63) y (10.64).

Función de coherencia. Una función, conocida como *función de coherencia* (β), se define como una medida del ruido presente en las señales como

$$\beta(\omega) = \left(\frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)}\right)\left(\frac{S_{xf}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}\right) = \frac{|S_{xf}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) S_{ff}(\omega)} \tag{10.65}$$

Observe que si las lecturas de x y f son ruidos puros, entonces $\beta = 0$, y si las lecturas de x y f no están contaminadas en absoluto con ruido, entonces $\beta = 1$. La gráfica de una función de coherencia típica se muestra en la figura 10.30. Por lo general, $\beta \approx 1$ cerca de la frecuencia natural del sistema porque las señales son grandes y menos influenciadas por el ruido.

10.8.5 Determinación de datos modales a partir de picos observados

La función de respuesta de frecuencia, $H(i\omega)$, calculada a partir de la ecuación (10.63) o (10.64), se puede utilizar para determinar las frecuencias naturales, las relaciones de amortiguamiento y los modos correspondientes a todos los picos resonantes observados en la gráfica de $H(i\omega)$. Sea la gráfica de la función de respuesta de frecuencia como se muestra en la figura 10.31, con sus cuatro picos o resonancias que sugieren que el sistema que se está probando se puede modelar como un sistema de cuatro grados de libertad. En ocasiones se hace difícil asignar el número de grados de libertad al sistema, en especial cuando la separación entre los picos resonantes es mínima en la

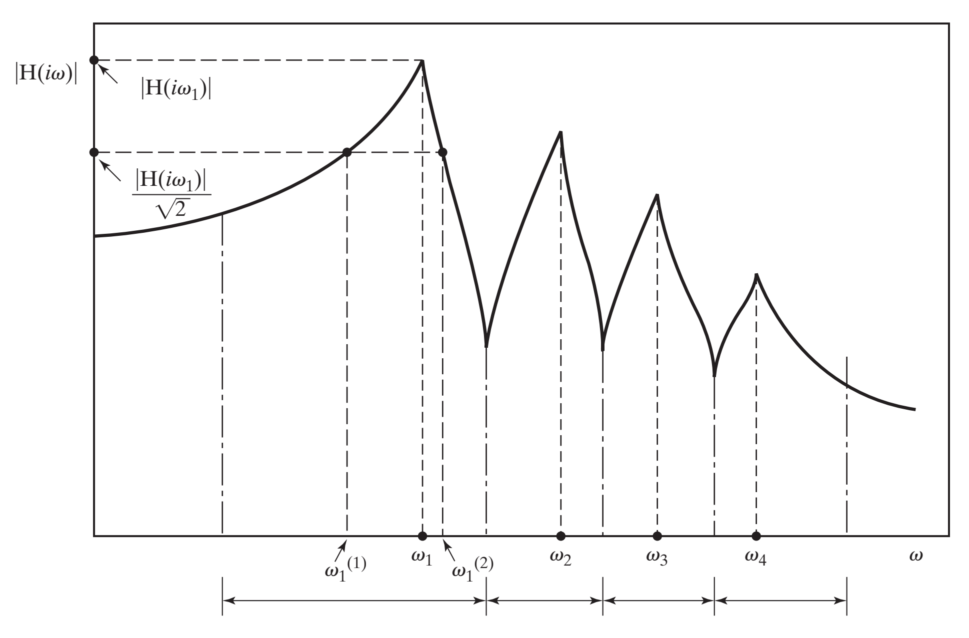


Figura 10.31 Gráfica de la función de respuesta de frecuencia de una estructura o máquina, obtenida mediante la ecuación (10.63) o (10.64).

gráfica de $H(i\omega)$, la cual se puede trazar aplicando una fuerza armónica de frecuencia ajustable en un punto específico de la estructura o máquina, midiendo la respuesta (por ejemplo, desplazamiento) en otro punto y hallando el valor de la función de respuesta de frecuencia con la ecuación (10.63) o (10.64). La gráfica de $H(i\omega)$, semejante a la figura 10.31, se puede trazar si se hallan los valores de $H(i\omega)$ a varias frecuencias de la fuerza armónica aplicada.

Un método simple de hallar los datos modales implica el uso de un método de un solo grado de libertad. En este método, la gráfica de $H(i\omega)$ se divide en varios rangos de frecuencia, con un pico en cada rango, como se muestra en la figura 10.31. Cada rango de frecuencia dividido se considera entonces como la función de respuesta de frecuencia de un sistema de un solo grado de libertad. Esto implica que la función de respuesta de frecuencia en cada rango de frecuencia está dominada por ese modo específico único. Como se observó en la sección 3.4, un pico indica un punto de resonancia que corresponde a un ángulo de fase de 90°. Por lo tanto, las frecuencias resonantes se pueden identificar como los picos en la gráfica de $H(i\omega)$, lo cual se puede confirmar de una observación de los valores del ángulo de fase de 90° en cada uno de los picos. La relación de amortiguamiento correspondiente al pico j, con frecuencia resonante ω_j, en la figura 10.31 indica la relación de amortiguamiento modal ζ_j. Esta relación se puede hallar utilizando la ecuación (3.45), como

$$\zeta_j = \frac{\omega_j^{(2)} - \omega_j^{(1)}}{2\,\omega_j} \tag{10.66}$$

donde $\omega_j^{(1)}$ y $\omega_j^{(2)}$, conocidos como puntos de mediana potencia, quedan a ambos lados de la frecuencia resonante ω_j, y satisfacen la relación

$$|H(i\omega_j^{(1)})| = |H(i\omega_j^{(2)})| = \frac{|H(i\omega_j)|}{\sqrt{2}} \tag{10.67}$$

Observe que ω_j en realidad representa la frecuencia natural amortiguada del sistema que se está probando. Sin embargo, cuando el amortiguamiento es pequeño, ω_j se puede considerar aproximadamente igual a la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Cuando el sistema que se está probando se representa como un sistema de k grados de libertad ($k = 4$ para el sistema correspondiente a la figura 10.31), cada pico observado en la gráfica de $H(i\omega)$ se supone que es un sistema de un solo grado de libertad y las k frecuencias resonantes (picos) así como las relaciones de amortiguamiento correspondientes, se determinan repitiendo el procedimiento anterior (y aplicando la ecuación (10.66)) k veces.

Ejemplo 10.5 Determinación de la relación de amortiguamiento con el diagrama de Bode

Las gráficas que muestran la variación de la magnitud de la respuesta y su ángulo de fase con la frecuencia de un sistema de un solo grado de libertad, como se indica en la figura 3.11, proporcionan la respuesta de frecuencia del sistema. En lugar de ocuparse directamente de las curvas de magnitud, si se utilizan los logaritmos de las relaciones de magnitud (en decibeles), las curvas resultantes se conocen como diagramas de Bode. Encuentre la frecuencia natural y la relación de amortiguamiento de un sistema cuyo diagrama de Bode se muestra en la figura 10.32.

Solución: La frecuencia natural, que corresponde aproximadamente a la respuesta pico del sistema es de 10 Hz y la respuesta pico es de −35 bB. Los puntos de mediana potencia corresponden a las frecuencias ω_1 y ω_2, donde la amplitud de la respuesta es igual a 0.707 veces la respuesta pico. Según la figura 10.32, los puntos de mediana potencia se pueden identificar como $\omega_1 = 9.6$ Hz y $\omega_2 = 10.5$ Hz; por lo tanto la relación de amortiguamiento se determina aplicando la ecuación (10.66) como

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{10.5 - 9.6}{2(10.0)} = 0.045$$

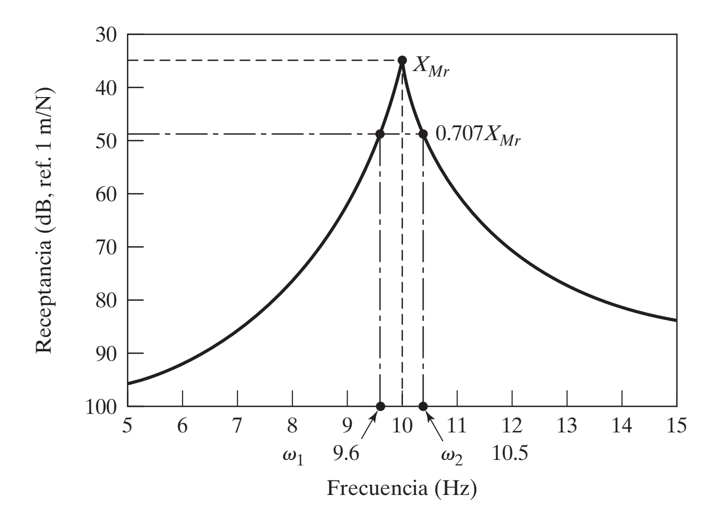


Figura 10.32 Diagrama de Bode.

El procedimiento descrito en esta sección para hallar los parámetros modales es básicamente un método visual. En la siguiente sección se presenta un método más sistemático basado en la computadora que el analizador puede ejecutar mediante una programación adecuada.

■

10.8.6 Determinación de los datos modales con la gráfica de Nyquist

De acuerdo con este método, también se supone que un modo único domina en las proximidades de su frecuencia natural en la función de respuesta de frecuencia. Cuando se trazan las partes real e imaginaria de la función de respuesta de frecuencia de un sistema de un solo grado de libertad (dadas por la ecuación (3.54)) a lo largo de los ejes horizontal y vertical de una gráfica para un rango de frecuencias, la gráfica resultante será un círculo, conocido como *círculo de Nyquist* o *gráfica de Nyquist*. La función de respuesta de frecuencia, dada por la ecuación (3.54), se escribe como

$$\alpha(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} = u + iv \tag{10.68}$$

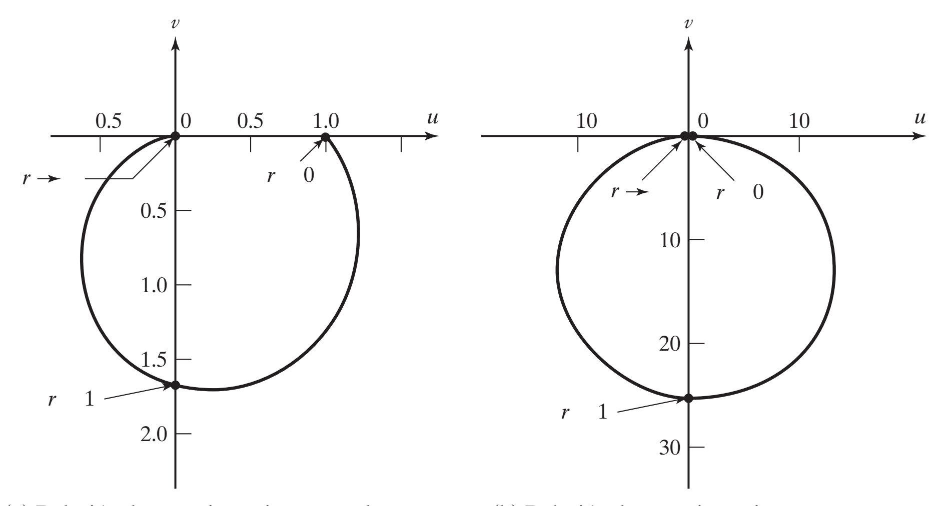
donde

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \tag{10.69}$$

$$u = \text{Parte real de } \alpha(i\omega) = \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \tag{10.70}$$

$$v = \text{Parte imaginaria de } \alpha(i\omega) = \frac{-2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \tag{10.71}$$

Durante la prueba de vibración, el analizador tiene valores de la frecuencia de control ω y los valores calculados correspondientes de $u = \text{Re}\,(\alpha)$ y $\nu = \text{Im}(a)$ a partir de los datos medidos. La gráfica entre u y ν se parece a un círculo con valores grandes de amortiguamiento (ζ), mientras que cada vez más asume la forma de un círculo a medida que el amortiguamiento se hace más y más pequeño, como se muestra en la figura 10.33.



(a) Relación de amortiguamiento grande (b) Relación de amortiguamiento pequeña

Figura 10.33 Círculo de Nyquist.

Propiedades del círculo de Nyquist. Para identificar las propiedades del círculo de Nyquist, primero observamos que los valores grandes de u y v ocurren cerca de la resonancia, $r = 1$. En esa región, podemos reemplazar $1 - r^2$ en las ecuaciones (10.70) y (10.71) como

$$1 - r^2 = (1 + r)(1 - r) \approx 2(1 - r) \qquad \text{y} \qquad 2\zeta r \approx 2\zeta$$

de modo que

$$u = \text{Re}\,(\alpha) \approx \frac{1 - r}{2[(1 - r)^2 + \zeta^2]} \tag{10.72}$$

$$v = \text{Im}\,(\alpha) \approx \frac{-\zeta}{2[(1 - r)^2 + \zeta^2]} \tag{10.73}$$

Es fácil de verificar que u y v, dadas por las ecuaciones (10.72) y (10.73), satisfacen la relación

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{4\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\zeta}\right)^2 \tag{10.74}$$

la cual indica la ecuación de un círculo con su centro en $\left(u = 0, v = -\frac{1}{4\zeta}\right)$ y radio $\frac{1}{4\zeta}$. Los puntos de mediana potencia ocurren en $r = 1 \pm \zeta$, lo cual corresponde a $u = \pm\frac{1}{4\zeta}$ y $v = \frac{1}{4\zeta}$. Estos puntos se encuentran en los dos extremos del diámetro horizontal del círculo, donde el punto u alcanza su magnitud máxima.

Estas observaciones se pueden utilizar para hallar ω ($r = 1$) y ζ. Una vez que los valores medidos de la función de respuesta de frecuencia $H(\omega)$ están disponibles (con la magnitud de la fuerza aplicada fija) para un rango de frecuencias de control ω, en lugar de buscar el pico en la gráfica de $H(i\omega)$ contra ω, podemos construir la gráfica de Nyquist de Re $(H(i\omega))$ contra Im $(H(i\omega))$ siguiendo el método de los mínimos cuadrados para ajustarse a un círculo. Este proceso también promedia los errores experimentales. La intersección del círculo con el eje imaginario negativo corresponderá entonces a $H(i\omega_n)$. La diferencia de las frecuencias en los dos puntos diametrales horizontales proporciona el ancho de banda $(\omega^{(2)} - \omega^{(1)})$, con el cual ζ se puede hallar como $\zeta = \left(\dfrac{\omega^{(2)} - \omega^{(1)}}{2\omega_n}\right)$.

10.8.7 Medición de modos

Para determinar los modos con una prueba de vibración, tenemos que expresar las ecuaciones de movimiento del sistema de varios grados de libertad en coordenadas modales [10.18]. Para esto, primero consideramos un sistema no amortiguado.

Sistema de varios grados de libertad no amortiguado. Las ecuaciones de movimiento de un sistema de varios grados de libertad no amortiguado en coordenadas físicas son

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{f} \tag{10.75}$$

Para vibración armónica libre, la ecuación (10.75)se escribe como

$$\left[[k] - \omega_i^2[m]\right]\vec{y}_i = \vec{0} \tag{10.76}$$

donde ω_i es la frecuencia natural i-ésima y $\vec{y}_i$ es el modo correspondiente. Las relaciones de ortogonalidad para los modos se expresan como

$$[Y]^T[m][Y] = \text{diag}[M] \equiv \left[\nwarrow M_i \searrow\right] \tag{10.77}$$

$$[Y]^T[k][Y] = \text{diag}[K] \equiv \left[\nwarrow K_i \searrow\right] \tag{10.78}$$

donde $[Y]$es la matriz modal que contiene los modos $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_N$ como columnas (N indica los grados de libertad del sistema, que también son iguales a la cantidad de frecuencias naturales o picos medidos), M_i y K_1 son los elementos de diag $[M]$ y diag $[K]$, también llamados *masa modal* y *rigidez modal*, respectivamente, correspondientes al modo i, por lo que

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} \tag{10.79}$$

Cuando las funciones forzadas son armónicas, $\vec{f}(t) = \vec{F}e^{\tilde{i}\omega t}$, con $\tilde{i} = \sqrt{-1}$, la ecuación (10.75) produce

$$\vec{x}(t) = \vec{X}e^{\tilde{i}\omega t} = \left[[k] - \omega^2[m]\right]^{-1}\vec{F}e^{\tilde{i}\omega t} \equiv [\alpha(\omega)]\vec{F}e^{\tilde{i}\omega t} \tag{10.80}$$

donde $[\alpha(\omega)]$ recibe el nombre de *función de respuesta de frecuencia* o *matriz de receptancia* del sistema. Utilizando las relaciones de ortogonalidad de las ecuaciones (10.77) y (10.78), $[\alpha(\omega)]$ se expresa como

$$[\alpha(\omega)] = [Y]\left[[K] - \omega^2[M]\right]^{-1}[Y]^T \tag{10.81}$$

Un elemento individual de la matriz $[\alpha(\omega)]$ situado en la fila p y columna q indica la respuesta armónica de una coordenada, X_p, originada por una fuerza armónica aplicada en otra coordenada, F_q (sin ningunas otras fuerzas), y se escribe como

$$\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq} = \left.\frac{X_p}{F_q}\right|_{\text{con } F_j=0;\, j=1,2,\ldots,N;\, j\neq q}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\vec{y}_i\right)_p\left(\vec{y}_i\right)_q}{K_i - \omega^2 M_i} \tag{10.82}$$

donde $(\vec{y}_i)\,j$ indica el componente j-ésimo del modo $\vec{y}_i$. Si la matriz modal $[Y]$ se normaliza aún más (se reescala o normaliza en cuanto a masa) como

$$[\Phi] \equiv \left[\vec{\phi}_1\,\vec{\phi}_2 \cdots \vec{\phi}_N\right] = [Y][M]^{-1/2} \tag{10.83}$$

la forma de los modos, $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_N$ no cambiará, pero la ecuación (10.82) se escribe como

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\vec{\phi}_i\right)_p\left(\vec{\phi}_i\right)_q}{\omega_i^2 - \omega^2} \tag{10.84}$$

Sistema de varios grados de libertad amortiguado. Las ecuaciones de movimiento de un sistema amortiguado de varios grados de libertad en coordenadas físicas son

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{f} \tag{10.85}$$

Para simplificar, supongamos un amortiguamiento proporcional, de modo que la matriz de amortiguamiento $[c]$ se exprese como

$$[c] = a[k] + b[m] \tag{10.86}$$

donde a y b son constantes. Entonces los modos no amortiguados del sistema, $\vec{y}_i$ y $\vec{\phi}_i$, diagonalizan no sólo las matrices de masa y rigidez, como se indica en las ecuaciones (10.77) y (10.78), sino también la matriz de amortiguamiento:

$$[Y]^T[c][Y] = \text{diag}\,[C] = \left[\nwarrow C_i \searrow\right] \tag{10.87}$$

Por lo tanto, los modos del sistema amortiguado no cambiarán como los del sistema no amortiguado, pero las frecuencias naturales sí lo harán y por lo común se vuelven complejas. Cuando se supone que el vector $\vec{f}$ es armónico en la ecuación (10.85), la función de respuesta de frecuencia o receptancia se deriva como

$$\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\vec{y}_i)_p(\vec{y}_i)_q}{K_i - \omega^2 M_i + \tilde{i}\omega C_i} \tag{10.88}$$

Cuando se utilizan modos normalizados en cuanto a masa (vea la ecuación 10.83), $\alpha_{pq}(\omega)$se vuelve

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2\tilde{i}\zeta_i\omega_i\omega} \tag{10.89}$$

donde ζ_i es la relación de amortiguamiento en el modo i.

Como se indicó antes, el elemento de la matriz $[\alpha(\omega)]$ en la fila p y columna q, $\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq}$, indica la función de transferencia entre el desplazamiento o respuesta en el punto $p(X_p)$ y la fuerza de entrada en el punto $q(F_q)$ del sistema que se está probando (con todas las demás fuerzas iguales a cero). Como esta función de transferencia indica la relación $\frac{X_p}{F_q}$, está dada por $H_{pg}(\omega)$. Por lo tanto

$$\alpha_{pq}(\omega) = H_{pq}(\omega) \tag{10.90}$$

Si los picos o frecuencias resonantes (naturales) del sistema están bien separados, entonces el término correspondiente al pico particular (pico i-ésimo) domina a los demás términos en la suma de ecuación (10.88) o (10.89). Sustituyendo $\omega = \omega_i$ en la ecuación (10.89), obtenemos

$$\alpha_{pq}(\omega_i) = H_{pq}(\omega_i) = \frac{(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q}{\omega_i^2 - \omega_i^2 + \tilde{i}2\zeta_i\omega_i^2}$$

o

$$|\alpha_{pq}(\omega_i)| = |H_{pq}(\omega_i)| = \frac{|(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q|}{2\zeta_i\omega_i^2}$$

o

$$|(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q| = 2\zeta_i\omega_i^2|H_{pq}(\omega_i)| \tag{10.91}$$

Se ve que la ecuación (10.91) permite calcular el valor absoluto de $(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q$ con los valores medidos de la frecuencia natural (ω_i), la relación de amortiguamiento (ζ_i) y la función de transferencia $|H_{pq}(\omega_i)|$ en el pico i. Para determinar el signo del elemento $(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q$, se puede utilizar la gráfica de fase $H_{pq}(\omega_i)$. Como sólo hay N componentes independientes desconocidos de $\vec{\phi}_i$ en los N^2 elementos de la matriz $[(\vec{\phi}_i)_p(\vec{\phi}_i)_q] = [\vec{\phi}_i\,\vec{\phi}_i^{\mathrm{T}}]_{pq}$, se requieren N mediciones de $|H_{pq}(\omega_i)|$ para determinar el modo $\vec{\phi}_i$ que corresponde a la frecuencia modal ω_i. Esto se puede lograr midiendo el desplazamiento o respuesta del sistema en el punto q primero con entrada en el punto 1, luego en el punto 2, ..., y por último en el punto N.

10.9 Monitoreo y diagnóstico de la condición de una máquina

La mayoría de las máquinas producen bajos niveles de vibración cuando están diseñadas apropiadamente. Durante su operación, las máquinas se someten a fatiga, desgaste, deformación y asentamiento de los cimientos. Estos efectos incrementan las holguras entre partes en contacto, desalineaciones en flechas, principio de grietas en sus piezas y desbalances en rotores, todo lo cual aumenta el nivel de vibración, con lo que se provocan cargas dinámicas adicionales en los rodamientos. Conforme pasa el tiempo, los niveles de vibración siguen aumentando y acaban provocando fallas o descomposturas de la máquina. Los tipos comunes de fallas o condiciones de operación que conducen a niveles aumentados de vibración en máquinas incluyen flechas deflexionadas o excéntricas, componentes desalineados o desbalanceados, rodamientos o engranes defectuosos, propulsores con aspas defectuosas, y partes mecánicas flojas.

10.9.1 Criterios de severidad de vibración

Las gráficas de severidad de vibración, dadas por estándares como ISO 2372, pueden servir de guía para determinar la condición de una máquina. En la mayoría de los casos, el valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados (RCM) de la velocidad vibratoria de la máquina se compara contra los criterios establecidos por los estándares. Aunque es muy sencillo implementar este procedimiento, la señal de velocidad total utilizada para comparación quizá no proporcione una advertencia suficiente del daño inminente de la máquina.

10.9.2 Técnicas de mantenimiento de máquinas

La duración de una máquina sigue la clásica *curva de la tina de baño* que se muestra en la figura 10.34. Como la falla de una máquina en general se caracteriza por un incremento de la vibración y/o nivel de ruido, el nivel de vibración también sigue la forma de la misma curva de la tina de baño. El nivel de vibración se reduce durante el periodo inicial de aflojamiento, luego se incrementa muy lentamente durante el periodo normal de operación debido al desgaste normal, y al final se incrementa rápidamente debido al desgaste excesivo o descompostura en el periodo de desgaste.

Se pueden utilizar tres tipos de esquemas de mantenimiento en la práctica:

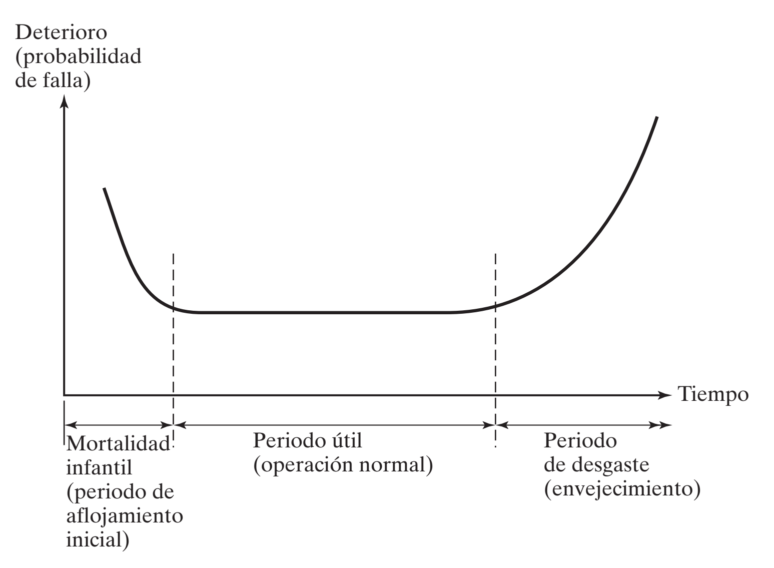


Figura 10.34 Curva de la tina de baño de la duración de una máquina.

1. *Mantenimiento por descompostura*. Se permite que la máquina falle, momento en el cual la máquina descompuesta es reemplazada por una nueva. Esta estrategia se puede utilizar si la máquina no es cara de reemplazar y la descompostura no provoca otros daños. De lo contrario, el costo de la producción perdida, los riesgos de seguridad y el daño adicional provocado a otras máquinas hacen que este esquema sea inaceptable.
2. *Mantenimiento preventivo*. El mantenimiento se realiza a intervalos fijos como cada 3000 horas de operación, o una vez al año. Por lo común, los intervalos de mantenimiento se determinan estadísticamente por la experiencia pasada. Aunque este método reduce la probabilidad de des-

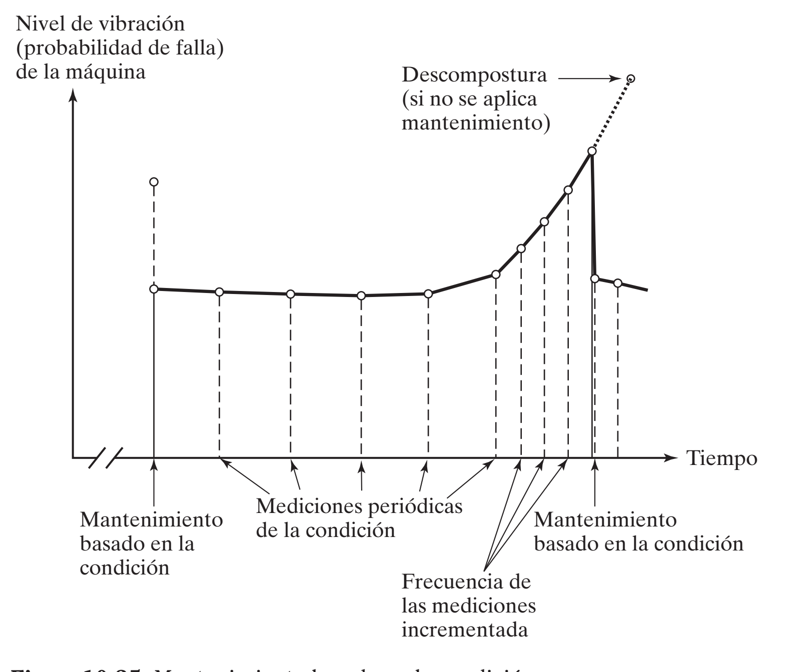


Figura 10.35 Mantenimiento basado en la condición.

composturas inesperadas, se ha visto que no es económico. La detención para mantenimiento implica no sólo tiempo de producción perdido sino también un alto riesgo de introducir imperfecciones debido a errores humanos. Además, la probabilidad de falla del componente de una máquina no se puede reducir reemplazándolo con uno nuevo durante el periodo de desgaste normal.

3. *Mantenimiento basado en la condición.* Las reparaciones generales realizadas a intervalos fijos son reemplazadas por mantenimientos a intervalos fijos que permiten observar con regularidad los cambios de la condición de operación de la máquina. Por lo tanto, se puede detectar el inicio de las condiciones de falla y seguir de cerca sus desarrollos. Los niveles de vibración medidos se pueden extrapolar para predecir cuándo los niveles de vibración alcanzarán valores inaceptables y cuándo se deberá dar servicio a la máquina. Por consiguiente, este esquema también se conoce como mantenimiento predictivo. En este método los costos de mantenimiento se reducen en gran medida debido a las pocas fallas catastróficas, a una mejor utilización de las partes de repuesto y a la eliminación del mantenimiento preventivo innecesario. El nivel de vibración (y por consiguiente la probabilidad de falla) de la máquina debido al mantenimiento basado en la condición sigue la forma indicada en la figura 10.35.

10.9.3 Técnicas de monitoreo de la condición de máquinas

Se pueden aplicar varios métodos para monitorear la condición de una máquina, como se indica en la figura 10.36. Los métodos auditivos y visuales son las formas básicas de técnicas de monitoreo en las cuales un técnico calificado, que conoce a fondo las máquinas, puede identificar una falla con sólo escuchar los sonidos u observar las grandes amplitudes de vibración producidas por una máquina averiada. En ocasiones se utiliza un micrófono o un estroboscopio para escuchar el ruido de la máquina. Incluso se utilizan dispositivos desde lupas hasta estroboscopios para monitorear visualmente la condición de una máquina. Se puede utilizar corriente y voltaje para el monitoreo de la condición de máquinas eléctricas como grandes generadores y motores.

En el método de monitoreo de variables operativas, también conocido como monitoreo de desempeño o de ciclo de trabajo, el desempeño de una máquina se observa con respecto a su funcionamiento deseado. Cualquier desviación del desempeño deseado indica un mal funcionamiento de la máquina. El monitoreo de temperatura implica medir la temperatura operacional o superficial de una máquina. Este método se puede considerar como una clase de método de variables operativas. Un rápido incremento de la temperatura de un componente, que ocurre principalmente por desgaste, es una indicación de un mal funcionamiento, como un lubricante inadecuado en las chumaceras. El monitoreo de temperatura utiliza dispositivos como pirómetros, termopares, termografía y termómetros de resistencia. En algunos casos se utilizan colorantes penetrantes para identificar grietas que aparecen en la superficie de una máquina. Este procedimiento requiere utilizar pinturas sensibles al calor, conocidas como pinturas termográficas, para detectar grietas en superficies calientes. En tales casos se selecciona la pintura más adecuada para la temperatura superficial esperada.

Se generan desechos de desgaste en superficies móviles relativas de elementos de máquina sometidos a carga. Las partículas de desgaste que se encuentren en los aceites lubricantes o en la grasa se pueden utilizar para evaluar el grado de daño. A medida que se incrementa el desgaste, las partículas del material utilizado para construir componentes de la máquina como rodamientos

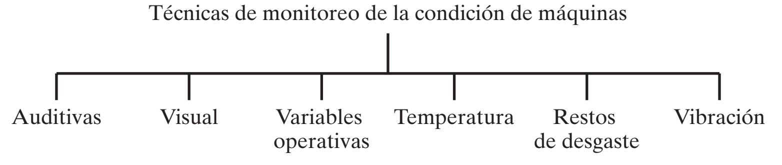


Figura 10.36 Técnicas de monitoreo de la condición de máquinas.

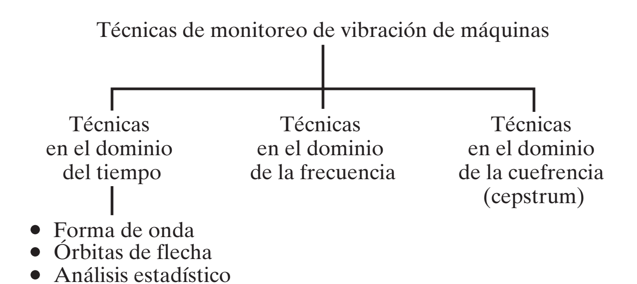


Figura 10.37 Técnicas de monitoreo de vibración de máquinas.

y engranes se pueden hallar en concentraciones crecientes. Por lo tanto, la severidad del desgaste se puede evaluar observando la concentración (cantidad), tamaño, forma y color de las partículas. Observe que el color de las partículas indica qué tan calientes llegaron a estar.

El análisis de vibración se utiliza más comúnmente para monitorear la condición de máquinas. La vibración en máquinas es provocada por fuerzas de excitación cíclicas que se originan por desbalances, desgaste o avería de las partes. Qué tipo de cambios ocurren en el nivel de vibración, cómo se pueden detectar estos cambios, y cómo se interpreta la condición de la máquina, ha sido el tema de diversos estudios de investigación en el pasado. Las técnicas de monitoreo de vibración disponibles se pueden clasificar como se muestra en la figura 10.37. Estas técnicas se describen en la siguiente sección.

10.9.4 Técnicas de monitoreo de vibración

Análisis en el dominio del tiempo

Formas de onda en el dominio del tiempo. El análisis en el dominio del tiempo utiliza el historial de la señal (forma de onda). La señal se guarda en un osciloscopio o analizador en tiempo real y se registra cualquier impulso no estable o transitorio. Los daños individuales como dientes rotos en engranes y grietas en el anillo interno o externo de rodamientos se pueden identificar fácilmente a partir de la forma de onda de la caja de engranes. Como un ejemplo, la figura 10.38 muestra la señal de aceleración de una caja de engranes de una sola etapa. El piñón del par de engranes se acopla a un motor eléctrico de CA de 5.6 kW y 2865 rpm. Como la velocidad del piñón (flecha) es de 2865 rpm o 47.75 Hz, el periodo es de 20.9 ms. La forma de onda de la aceleración indica que los pulsos ocurren de manera temporal con un periodo de 20 ms. Observando que este periodo es el mismo que el periodo del piñón, el origen de los pulsos en la señal de aceleración se puede atribuir a un diente roto en el piñón.

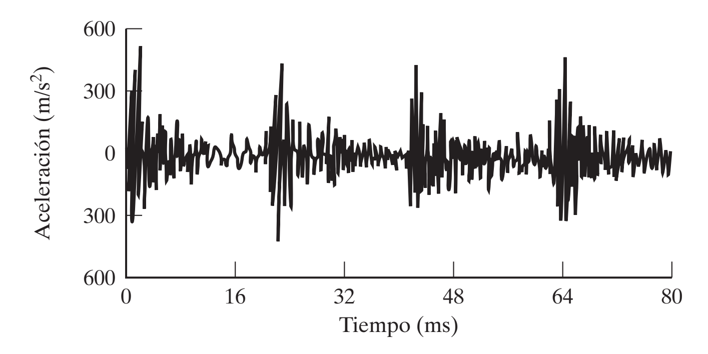


Figura 10.38 Forma de onda en el dominio del tiempo de una caja de engranes averiada [10.23].

Índices. En algunos casos se utilizan índices como el nivel pico, el valor de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados (RCM) y el factor de cresta para identificar daños en la máquina. Como el nivel pico ocurre sólo una vez, no es una cantidad estadística y por consiguiente no es un índice confiable para detectar averías en sistemas que operan de forma continua. Aun cuando el valor RCM es un mejor índice para detectar averías en aplicaciones de estado estable, puede no ser útil si la señal contiene información de más de un componente, como en el caso de vibración de una caja de engranes o de transmisión completa compuesta de varios engranes, flechas y rodamientos. El factor de cresta, definido como la relación del pico con el nivel RCM, incluye información tanto del pico como de los niveles RCM. Sin embargo, quizá tampoco sea capaz de identificar fallas en ciertos casos. Por ejemplo, si la falla ocurre de manera progresiva, el nivel RCM de la señal podría ir en aumento gradualmente, aunque el factor de cresta pudiera mostrar una tendencia decreciente.

Órbitas. En ocasiones se pueden obtener ciertos patrones conocidos como figuras de Lissajous al desplegar en pantalla las formas de onda en el dominio del tiempo obtenidas con dos transductores con sus salidas desfasadas 90°. Cualquier cambio en el patrón de estas figuras u órbitas se puede utilizar para identificar fallas como desalineación, desbalance o roce de flechas, desgaste en chumaceras e inestabilidad hidrodinámica en rodamientos lubricados. La figura 10.39 ilustra un cambio de órbita a causa de un rodamiento desgastado. El diámetro agrandado de la órbita en la dirección vertical indica que el rodamiento se hizo más rígido en la dirección horizontal; es decir, su holgura es mayor en la dirección vertical.

Métodos estadísticos

Curva de densidad de probabilidad. Toda señal de vibración tendrá una curva de densidad de probabilidad característica. La densidad de probabilidad de una señal se puede definir como la probabilidad de hallar su amplitud instantánea dentro de un cierto rango, dividida entre el rango. Usualmente, la forma de onda correspondiente a componentes en buen estado tendrá una curva de densidad de probabilidad en forma de campana semejante a la distribución normal. Por lo tanto, cualquier desviación significativa de la forma acampanada se puede asociar con la falla de un componente. Como el uso de la curva de densidad de probabilidad implica la comparación de variaciones de forma en lugar de variaciones de amplitudes, es muy útil en el diagnóstico de fallas de máquinas.

Momentos. En algunos casos, los momentos de la curva de densidad de probabilidad se pueden utilizar para monitorear la condición de una máquina. Los momentos de la curva son similares a los momentos mecánicos con respecto al eje centroidal del área. Los primeros cuatros momentos de una curva de densidad de probabilidad (con normalización apropiada) se conocen como la media, la desviación estándar, la oblicuidad y la curtosis, respectivamente. Para señales prácticas, los

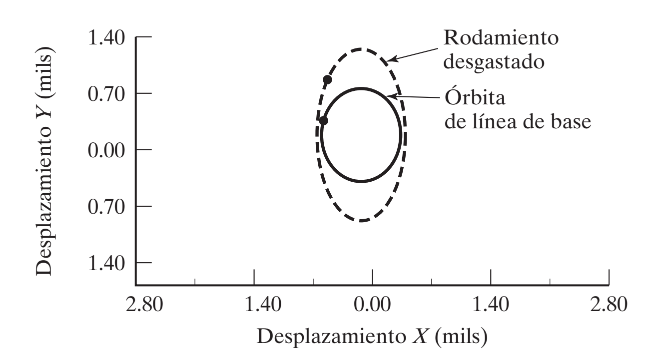


Figura 10.39 Cambio de órbita debido a un rodamiento averiado. [10.23].

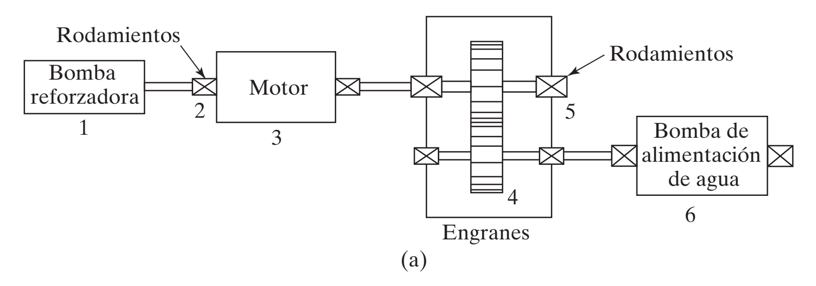
momentos impares por lo común se aproximan a cero y los momentos pares indican la impulsibilidad de la señal. El momento de cuarto orden, curtosis, se suele utilizar en el monitoreo de la condición de una máquina. La curtosis se define como

$$k = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^4 f(x)\, dx \tag{10.92}$$

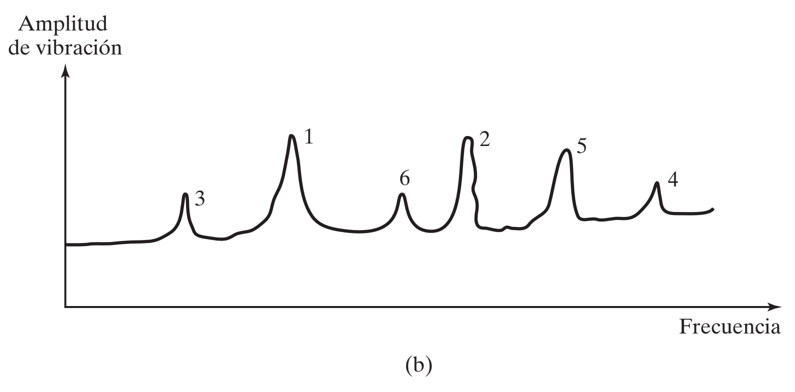
donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la amplitud instantánea, $x(t)$ en el tiempo t, $\bar{x}$ es el valor medio, y σ es la desviación estándar de $x(t)$. Las fallas como anillos de rodamiento agrietados y el astillamiento de rodillos y bolas en rodamientos, provocan pulsos relativamente grandes en la forma de onda en el dominio de tiempo de la señal, los que a su vez conducen a grandes valores de curtosis. Por lo tanto, un incremento del valor de curtosis se puede atribuir a la falla de un componente de una máquina.

Análisis en el dominio de la frecuencia

Espectro de frecuencia. La señal o espectro de frecuencia en el dominio de la frecuencia es una curva de la amplitud de la respuesta de vibración contra la frecuencia y se puede derivar por medio del análisis de Fourier digital rápido de la forma de onda en el dominio del tiempo. El espectro de frecuencia proporciona información valiosa con respecto a la condición de una máquina. La respuesta de vibración de una máquina depende no sólo de sus componentes sino también por su ensamble, montaje e instalación. Por lo tanto, las características de vibración de cualquier máquina son un tanto únicas para esa máquina particular; de ahí que el espectro de vibración se considera como la firma de vibración de dicha máquina. En tanto las fuerzas de excitación sean constantes o varíen en pequeñas cantidades, el nivel de vibración medido de la máquina también permanecerá constante o variará en pequeñas cantidades. Sin embargo, a medida que la máquina comienza a desarrollar fallas, su nivel de vibración, y por consiguiente la forma del espectro de frecuencia,



(a)



(b)

Figura 10.40 Relación entre componentes de máquina y el espectro de vibración.

cambia. Comparando el espectro de frecuencia de la máquina dañada con el espectro de frecuencia de referencia correspondiente a la máquina en buenas condiciones, se puede detectar la naturaleza y ubicación de la falla. Otra importante característica de un espectro es que cada elemento rotatorio en una máquina genera una frecuencia identificable, como se ilustra en la figura 10.40; por lo tanto, los cambios del espectro a una frecuencia dada se pueden atribuir directamente a un componente de la máquina. Como tales cambios pueden ser más fáciles de detectar en comparación con los cambios de los niveles de vibración globales, esta característica será muy valiosa en la práctica.

Dado que los picos en el espectro se relacionan con varios componentes de la máquina, es necesario ser capaz de calcular las frecuencias fallidas. Se pueden derivar varias fórmulas para determinar las frecuencias fallidas de componentes estándar como rodamientos, cajas de engranes, bombas, ventiladores y poleas. Asimismo, ciertas condiciones se pueden describir para fallas estándar por ejemplo desbalance, desalineación, aflojamiento, remolineo de aceite y resonancia.

Análisis en el dominio de la cuefrencia. La cuefrencia sirve como la abscisa (eje x) para un parámetro conocido como cepstrum, parecido a la frecuencia, que sirve como la abscisa para el parámetro espectro. En la literatura hay varias definiciones disponibles para el término *cepstrum*. Originalmente, cepstrum se definía como el espectro de potencia del logaritmo del espectro de potencia. Si $x(t)$ indica una señal de tiempo, su espectro de potencia, $S_X(\omega)$, está dado por

$$S_X(\omega) = |F\{x(t)\}|^2 \tag{10.93}$$

donde $F\{\}$ indica la transformada de Fourier de $\{\}$:

$$F\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{i\omega t}\,dt \tag{10.94}$$

Por lo tanto, el cepstrum, $c(\tau)$ se convierte en

$$c(\tau) = |F\{\log S_X(\omega)\}|^2 \tag{10.95}$$

Más adelante, el cepstrum se definió como la transformada de Fourier inversa del logaritmo del espectro de potencia, de modo que $c(\tau)$ se vuelve

$$c(\tau) = F^{-1}\{\log S_X(\omega)\} \tag{10.96}$$

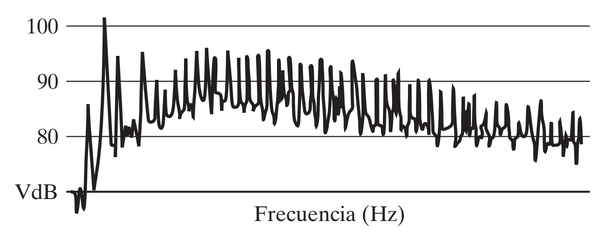
La palabra *cepstrum* se deriva del reacomodo de las letras en la palabra *spectrum*. La razón de este vínculo es que el cepstrum es básicamente el espectro de un espectro. De hecho, muchos de los términos utilizados en el análisis de espectros se han modificado para usarse en el análisis de cepstrum. A continuación se dan algunos ejemplos:

Cuefrencia—Frecuencia
Ramónicos—Armónicos
Gamnitud—Magnitud
Safe—Fase

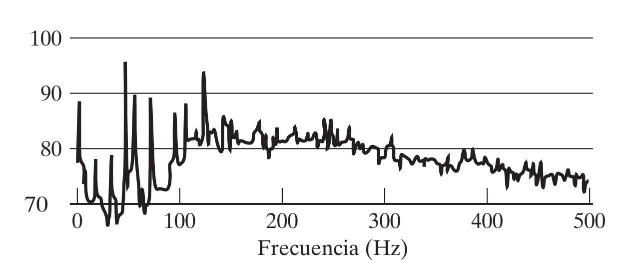
Por esto, es lógico ver por qué la cuefrencia sirve como la abscisa del cepstrum.

En la práctica, la opción de la definición de cepstrum no es crítica, puesto que ambas definiciones, ecuaciones (10.95) a (10.96), muestran picos distintos en el mismo lugar si hay una fuerte periodicidad en el espectro (logarítmico). El cepstrum es útil en el monitoreo y diagnóstico de la condición de una máquina, ya que puede detectar cualquier periodicidad en el espectro provocada

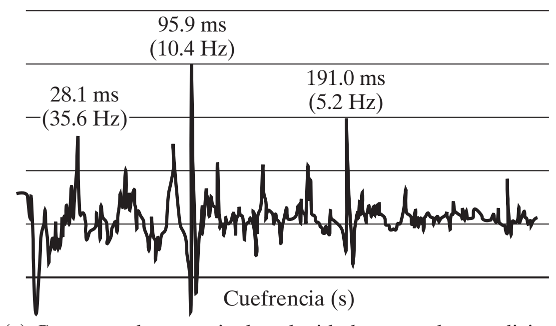
por la falla de componentes como un aspa en una turbina y un diente de engrane en una caja de velocidades. Como un ejemplo, en las figuras 10.41(a) a (d) se muestran los espectros y cepstros de dos cajas de transmisión de camión, una en buenas condiciones y la otra en malas, funcionando en un banco de prueba en primera velocidad. Observe que en la figura 10.41(a) la caja de velocidades en buenas condiciones no muestra una periodicidad marcada en su espectro, en tanto que la caja de velocidades en malas condiciones muestra una gran cantidad de bandas laterales con una separación aproximada de 10 Hz en su espectro (figura 10.41(b)). Esta separación no se puede determinar con precisión en la figura 10.41(b). Del mismo modo, el cepstrum de la caja en buenas condiciones no indica cuefrencias de forma prominente (figura 10.41(d)). Sin embargo, el cepstrum de la caja en malas condiciones (figura 10.41(c) indica tres cuefrencias prominentes en 28.1 ms (35.6 Hz),



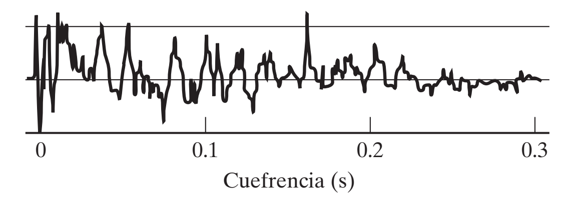
(a) Espectro de una caja de velocidades en malas condiciones



(b) Espectro de una caja de velocidades en buenas condiciones



(c) Cepstrum de una caja de velocidades en malas condiciones



(d) Cepstrum de una caja de velocidades en buenas condiciones

Figura 10.41 Espectro y cepstrum de una caja de velocidades [10.24].

95.9 ms (10.4 Hz), y 191.0 ms (5.2 Hz). Se ha identificado que la primera serie de ramónicos correspondiente a 35.6 Hz corresponde a la velocidad de entrada de la caja de velocidades. La velocidad de salida teórica es de 5.4 Hz. Por lo tanto, no se espera que los ramónicos correspondientes a 10.4 Hz sean los mismos que el segundo armónico de la velocidad de salida, la cual sería de 10.8 Hz. Un examen cuidadoso revela que los ramónicos correspondientes a la frecuencia de 10.4 Hz son los mismos que la velocidad de la segunda velocidad. Esto indica que la segunda velocidad estaba averiada aunque la primera siguiera funcionando.

10.9.5 Sistemas de instrumentación

Basados en sus grados de complejidad, se pueden utilizar tres tipos de sistemas de instrumentación para monitorear la condición de máquinas, el sistema básico, el sistema portátil y el sistema basado en computadora. El primer tipo, el cual puede ser etiquetado como el *sistema básico*, se compone de un simple medidor de vibración tamaño bolsillo, un estroboscopio y un par de auriculares. El medidor de vibración mide los niveles de vibración totales (valores RMS o pico de aceleración o velocidad) dentro de rangos de frecuencia adecuados; el estroboscopio indica la velocidad de la máquina, y los auriculares sirven para escuchar la vibración de la máquina. Las lecturas de velocidad RCM totales se pueden comparar con gráficas de severidad publicadas para ver si se requiere mantenimiento a partir de la condición. Los niveles de vibración totales también se pueden trazar contra el tiempo para encontrar con qué rapidez cambia la condición de la máquina. El medidor de vibración también se puede utilizar junto una computadora de bolsillo para reunir y guardar las mediciones. En ocasiones, un operador experimentado puede escuchar la vibración (sonido) de una máquina durante un tiempo y determinar su condición. En algunos casos, fallas como desalineación, desbalance o aflojamiento de piezas se pueden observar visualmente.

Los *sistemas de monitoreo de la condición de máquinas* se compone de un analizador de vibración de transformada de Fourier (FFT) portátil de baterías. Este analizador de vibración se puede utilizar para detectar fallas registrando y guardando los espectros de vibración de cada uno de los puntos de medición. Cada espectro registrado se puede comparar con un espectro de referencia que fue registrado en ese punto de medición particular cuando se sabía que la máquina estaba en buenas condiciones. Cualquier incremento significativo de las amplitudes en el nuevo espectro indica una falla que se tiene que investigar más a fondo. El analizador de vibración también tiene cierta capacidad de diagnóstico para identificar problemas como bandas propulsoras y cajas de velocidades defectuosas y rodamientos flojos. Cuando la falla diagnosticada requiere un reemplazo de piezas, el operador puede hacerlo. Si un rotor requiere balanceo, se puede utilizar el analizador de vibración para determinar las ubicaciones y magnitudes de las masas correctivas para volver a balancear el rotor.

El *sistema de monitoreo de la condición de máquina basado en computadora* es útil y económico cuando se incrementan la cantidad de máquinas, los puntos de monitoreo y la complejidad de la detección de fallas. Se compone de un analizador de vibración FFT acoplado a una computadora para mantener una base de datos centralizada que también tiene capacidades de diagnóstico. Los datos se guardan en un disco, lo que permite utilizarlos para comparar los espectros o para trazar gráficas tridimensionales (vea la figura 10.42). Determinados sistemas basados en la computadora utilizan grabadoras de cinta para registrar señales de vibración de cada máquina en todos los puntos de medición. Estas mediciones se pueden volver a reproducir en la computadora para su almacenamiento y posterior procesamiento.

10.9.6 Selección del parámetro de monitoreo

Comúnmente se utilizan acelerómetros piezoeléctricos para medir la vibración de máquinas. Se prefieren por su reducido tamaño, frecuencia superior y rango dinámico, confiabilidad durante largos periodos y robustez. Cuando se utiliza un acelerómetro como detector de vibración, la velocidad y desplazamientos se pueden obtener de los integradores interconstruidos en el analizador. Por lo tanto, el usuario puede seleccionar entre aceleración, velocidad y desplazamiento como

parámetro de monitoreo. Aunque cualquiera de estos tres espectros se puede utilizar para monitorear la condición de una máquina, por lo común el espectro de velocidad será el más plano (lo que indica que el rango de amplitudes de velocidad es el más pequeño). Como el cambio de la amplitud de la velocidad es fácil de observar en un espectro muy plano, se suele utilizar la velocidad como parámetro para monitorear la condición de máquinas.

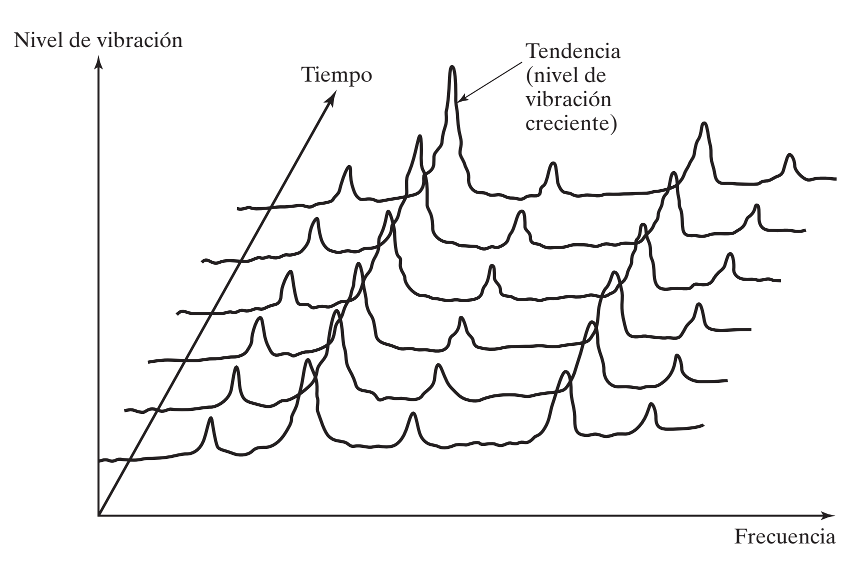


Figura 10.42 Curva tridimensional de datos.

10.10 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 10.6 Trazo del círculo de Nyquist

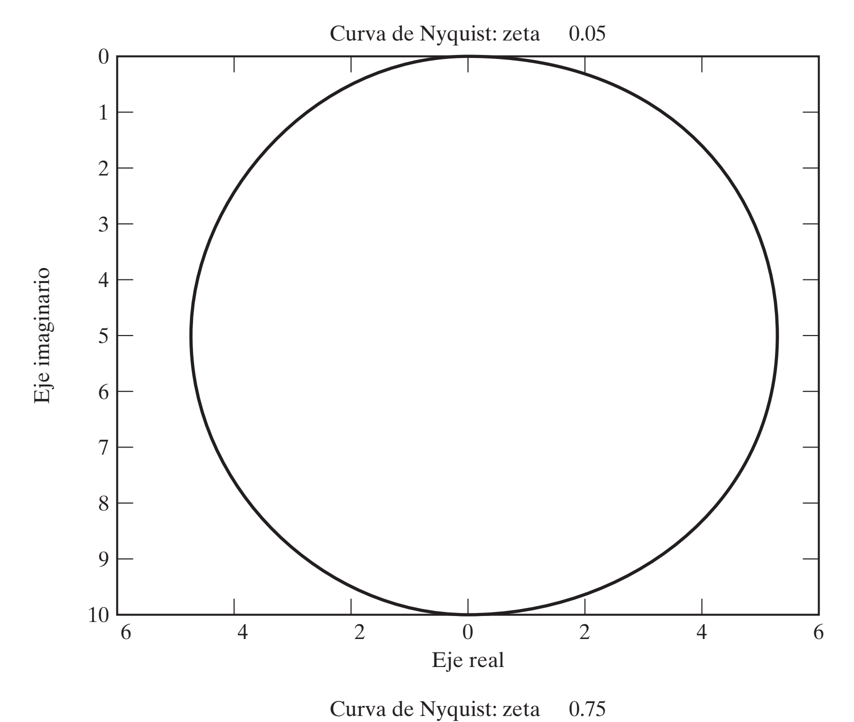
Utilizando MATLAB, trace el círculo de Nyquist para los siguientes datos:

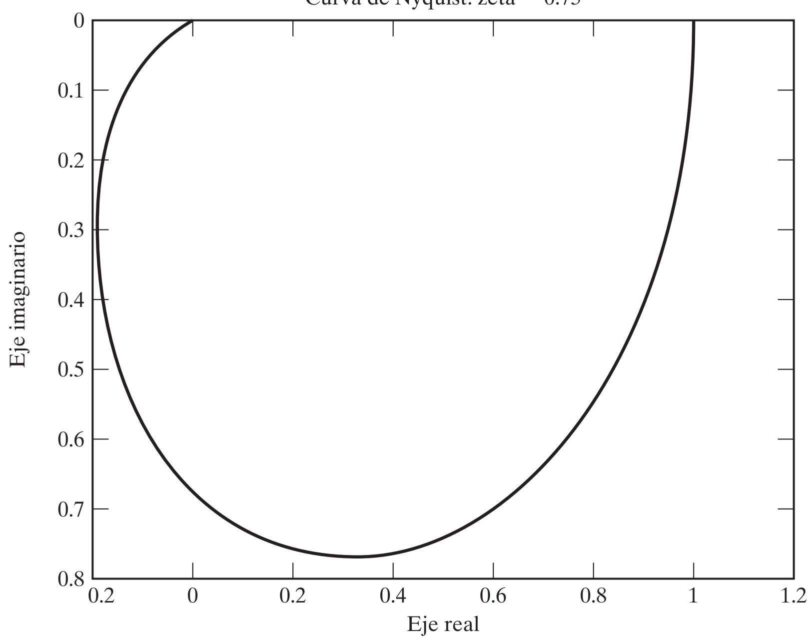
a. $\zeta = 0.75$
b. $\zeta = 0.75$

Solución: Las ecuaciones (10.70) y (10.71) se trazan a lo largo de los ejes horizontal y vertical. A continuación se presenta el programa MATLAB para trazar el círculo de Nyquist.

```
%Ex10_6.m
zeta = 0.05;
for i = 1: 10001
    r(i) = 50 * (i-1) / 10000;
    Re1(i) = ( 1-r(i)^2 )/( (1-r(i)^2)^2 + 4*zeta^2*r(i)^2 );
    Im1(i) = -2*zeta*r(i)/( (1-r(i)^2)^2 + 4*zeta^2*r(i)^2 );
end
zeta = 0.75;
for i = 1: 10001
    r(i) = 50 *(i-1) / 10000;
    Re2(i) = ( 1-r(i)^2 )/( (1-r(i)^2)^2 + 4*zeta^2*r(i)^2 );
    Im2(i) = -2*zeta*r(i)/( (1-r(i)^2)^2 + 4*zeta^2*r(i)^2 );
```

```
end
plot(Re1, Im1);
title('Curva de Nyquist: zeta = 0.05');
ylabel('Eje imaginario');
xlabel('Eje real');
pause;
plot(Re2, Im2);
title('Curva de Nyquist: zeta = 0.75');
ylabel('Eje imaginario');
xlabel('Eje real');
```





■

Ejemplo 10.7 Trazo de la ecuación del acelerómetro

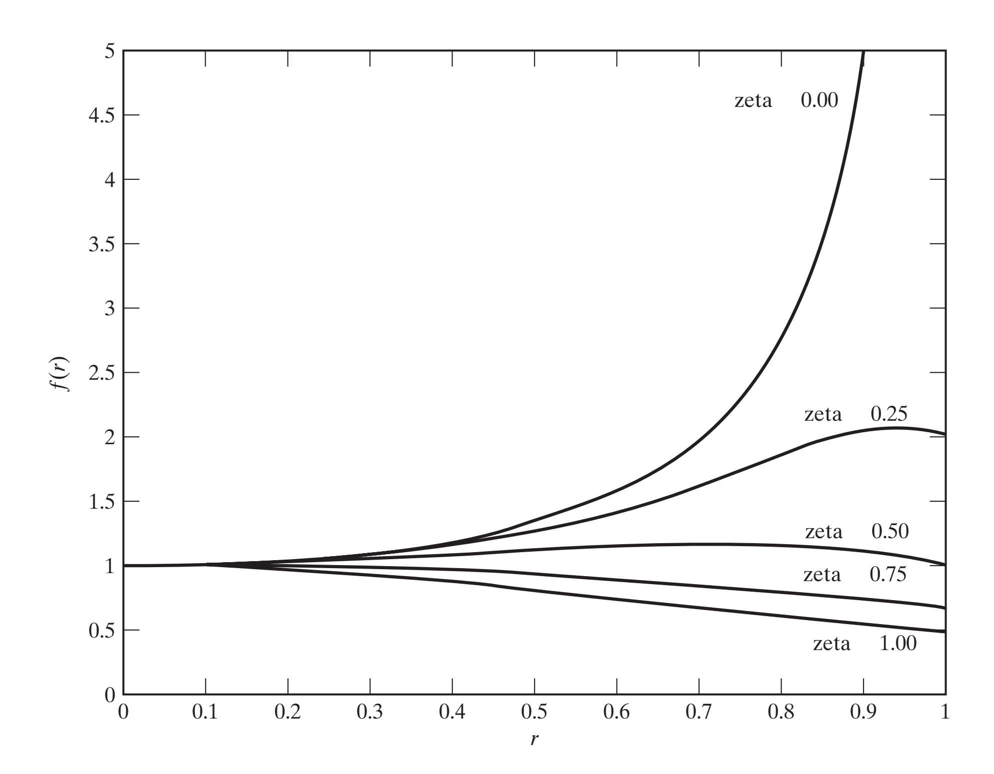
Utilizando MATLAB, trace la relación de las aceleraciones medidas a verdaderas, dadas por

$$f(r) = \frac{1}{\{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\}^{1/2}} \tag{E.1}$$

para $\zeta = 0.0$, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.0.

Solución: El programa MATLAB para trazar la ecuación (E.1) en el rango $0 \leq r \leq 1$ se enuncia a continuación.

```
%Ex10_7.m
zeta = 0.0;
for i = 1: 101
   r(i) = (i-1)/100;
   f1(i) = 1/sqrt((1-r(i)^2)^2 + (2*zeta*r(i))^2);
end
zeta = 0.25;
for i = 1: 101
   r(i) = (i-1)/100;
   f2(i) = 1/sqrt( (1-r(i)^2)^2 + (2*zeta*r(i))^2 );
end
zeta = 0.5;
for i = 1: 101
   r(i) = (i-1)/100;
   f3(i) = 1/sqrt( (1-r(i)^2)^2 + (2*zeta*r(i))^2 );
end
zeta = 0.75;
for i = 1: 101
   r(i) = (i-1)/100;
   f4(i) = 1/sqrt( (1-r(i)^2)^2 + (2*zeta*r(i))^2 );
end
zeta = 1.0;
for i = 1: 101
   r(i) = (i-1)/100;
   f-(i) = 1/sqrt( (1-r(i)^2)^2 + (2*zeta*r(i))^2 );
end
plot(r,f1);
axis([0 1 0 5]);
gtext('zeta = 0.00');
hold on;
plot(r,f2);
gtext('zeta = 0.25');
hold on;
plot(r,f3);
gtext('zeta = 0.50');
hold on;
plot(r,f4);
gtext('zeta = 0.75');
hold on;
plot(r,f5);
gtext('zeta = 1.00');
xlabel('r');
ylabel('f(r)');
```



■

Resumen del capítulo

En algunas aplicaciones prácticas podría ser difícil desarrollar un modelo matemático, derivar las ecuaciones rectoras y realizar un análisis para predecir las características de vibración del sistema. En tales casos podemos medir las características de vibración del sistema sometido a condiciones de entrada conocidas y desarrollar un modelo matemático del sistema. Presentamos los diversos aspectos de medición de vibración y aplicaciones. Analizamos los varios tipos de transductores, detectores de vibración, instrumentos de medición de frecuencia y agitadores (excitadores) disponibles para medir vibración. Describimos el análisis de señales y el análisis modal experimental y la determinación de frecuencias naturales, la relación de amortiguamiento y modos. Presentamos las técnicas de monitoreo y diagnóstico de la condición de máquinas. Por último, presentamos soluciones obtenidas con MATLAB de problemas de análisis relacionados con medición de vibraciones.

Ahora que ya terminó este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas dados a continuación.

Referencias

10.1 G. Buzdugan, E. Mihailescu y M. Rades, *Vibration Measurement,* Martinus Nijhoff, Dordrecht, Países Bajos, 1986.

10.2 *Vibration Testing*, Bruel & Kjaer, Naerum, Dinamarca, 1983.

10.3 O. Dossing, *Structurai Testing. Part I*, *Mechanical Mobility Measurements*, Bruel & Kjaer, Naerum, Dinamarca, 1987.

10.4 D. N. Keast, *Measurements in Mechanical Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1967.

10.5 B. W. Mitchell (ed.), *Instrumentation and Measurement for Environmental Sciences* (2a. ed.), American Society of Agricultural Engineers, Saint Joseph, MI, 1983.

10.6 J. R Holman, *Experimental Methods for Engineers* (4a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1984.

10.7 J. T. Broch, *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, Bruel & Kjaer, Naerum, Dinamarca, 1976.

10.8 R. R. Bouche, *Calibration of Shock and Vibration Measuring Transducers*, Shock and Vibration Information Center, Washington, DC. SVM-11, 1979.

10.9 M. Rades, "Methods for the analysis of structural frequency-response measurement data", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, Núm. 2, febrero de 1976, págs. 73-88.

10.10 J. D. Irwin y E. R. Graf, *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

10.11 R. K. Vierck, *Vibration Analysis*, Harper & Row, Nueva York, 1979.

10.12 J. A. Macinante, *Seismic Mountings for Vibration Isolation*, Wiley, Nueva York, 1984.

10.13 R. B. Randall y R. Upton, "Digital filters and FFT technique in real-time analysis", *Digital Signal Analysis Using Digital Filters and FFT Techniques*, Bruel & Kjaer, Naerum, Dinamarca, 1985 págs. 45-67.

10.14 G. Dovel, "A modal analysis—a dynamic tool for design and troubleshooting", *Mechanical Engineering*, Vol. 111, Núm. 3, marzo de 1989, págs. 82-86.

10.15 C. W. deSilva y S. S. Palusamy, "Experimental modal analysis—a modeling and design tool", *Mechanical Engineering*, Vol. 106, Núm. 6, junio de 1984, págs. 56-65.

10.16 K. Zaveri, *Modal Analysis of Large Structures—Multiple Exciter Systems*, Bruel & Kjaer, Dinamarca, 1984.

10.17 O. Dossing, *Structural Testing—Part 2: Modal Analysis and Simulation*, Bruel & Kjaer, Naerum, Dinamarca, 1988.

10.18 D. J. Ewins, "Modal analysis as a tool for studying structural vibration", *Mechanical Signature Analysis: Theory and Applications*, S. Braun (ed.), Academic Press, Londres, págs. 217-261, 1986.

10.19 B. A. Brinkman y D. J. Macioce, "Understanding modal parameters and mode shape scaling", *Sound and Vibration*, Vol. 19, Núm. 6, junio de 1985 págs. 28-30.

10.20 N. Tandon y B. C. Nakra, "Vibration and accoustic monitoring techniques for the detection of defects in rolling element bearings—a review"; *Shock and Vibration Digest*, Vol. 24, Núm. 3, marzo de 1992, págs. 3-11.

10.21 S. Braun, "Vibration monitoring", *Mechanical Signature Analysis: Theory and Applications*, S. Braun (ed.), Academic Press, Londres, 1986, págs. 173-216.

10.22 A. El-Shafei, "Measuring vibration for machinery monitoring and diagnostics", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 25, Núm. 1, enero de 1993, págs. 3-14.

10.23 J. Mathew, "Monitoring the vibrations of rotating machine elements—an overview", *Diagnostics, Vehicle Dynamics and Special Topics*, T. S. Sankar (ed.), American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1989, págs. 15-22.

10.24 R. B. Randall, "Advances in the application of cepstrum analysis to gearbox diagnosis", *Second International Conference Vibrations in Rotating Machinery (1980)*, Institution of Mechanical Engineers, Londres, 1980, págs. 169-174.

Preguntas de repaso

10.1 Responda brevemente las preguntas siguientes:

1. ¿Cuál es la importancia de la medición de vibración?
2. ¿Cuál es la diferencia entre un vibrómetro y un vibrógrafo?
3. ¿Qué es un transductor?
4. Analice el principio básico sobre el cual funciona un medidor de deformación.
5. Defina el factor de calibración de un medidor de deformación.
6. ¿Cuál es la diferencia entre transductor y detector?
7. ¿Qué es un material piezoeléctrico? Presente dos ejemplos de tal material.
8. ¿Cuál es el principio de trabajo de un transductor electrodinámico?

9. ¿Qué es un LVDT? ¿Cómo funciona?
10. ¿Qué es un instrumento sísmico?
11. ¿Cuál es el rango de frecuencia de un sismómetro?
12. ¿Qué es un acelerómetro?
13. ¿Qué es un error de desplazamiento de fase? ¿Cuándo llega a ser importante?
14. Proporcione dos ejemplos de un excitador de vibración mecánico.
15. ¿Qué es un agitador electromagnético?
16. Analice la ventaja de utilizar la medición de deflexión operacional.
17. ¿Cuál es el propósito del análisis modal experimental?
18. Describa el uso de la función de respuesta de frecuencia en el análisis modal.
19. Mencione dos instrumentos de medición de frecuencia.
20. Proponga tres métodos de representar los datos de respuesta de frecuencia.
21. ¿Cómo se utilizan las gráficas de Bode?
22. ¿Cómo se construye un diagrama de Nyquist?
23. ¿Cuál es el principio de superposición de modos? ¿Cuál es su uso en el análisis modal?
24. Establezca los tres tipos de esquemas de mantenimiento utilizados para maquinaria.
25. ¿Cómo se utilizan las órbitas en el diagnóstico de máquinas?
26. Defina los términos *curtosis* y *cepstrum.*

10.2 Indique si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero o falso:

1. Un medidor de deformación es un transductor de resistencia variable.
2. El fabricante da el valor del factor de calibración de un medidor de deformación.
3. La salida de voltaje de un transductor electromagnético es proporcional a la velocidad relativa de la bobina.
4. El principio del transductor electrodinámico se puede utilizar en excitadores de vibración.
5. Un sismómetro también se conoce como vibrómetro.
6. Todos los instrumentos de medición de vibración presentan retraso de fase.
7. El retraso es importante cuando se mide el movimiento armónico de frecuencia ω.
8. El mecanismo de yugo escocés se puede utilizar como agitador mecánico.
9. La respuesta en el dominio del tiempo da una mejor información sobre la distribución de la energía que la de la respuesta en el dominio de la frecuencia.
10. Un analizador de espectro es un dispositivo que analiza una señal en el dominio de la frecuencia.
11. La respuesta dinámica completa de una máquina se puede determinar mediante una prueba modal.
12. La relación de amortiguamiento de un sistema vibratorio se puede determinar a partir del diagrama de Bode.
13. Los análisis de espectro también se conocen como analizadores de transformada de Fourier (FFT).
14. En el mantenimiento por descompostura, la máquina funciona hasta que falle.
15. Las formas de onda en el dominio del tiempo se pueden utilizar para detectar daños aislados de maquinaria.

10.3 Escriba en los espacios en blanco la palabra correcta:

1. Un dispositivo que transforma valores de variables físicas en una señal eléctrica equivalente se llama ________.
2. Los transductores piezoeléctricos generan _________ eléctricos cuando se someten a esfuerzo mecánico.
3. Un instrumento sísmico se compone de un sistema ________ montado en el cuerpo vibratorio.
4. El instrumento que mide la aceleración de un cuerpo vibratorio se llama _________.
5. Un _______ se puede utilizar para medir sismos.
6. El instrumento que mide la velocidad de un cuerpo vibratorio se llama _________.
7. La mayoría de los instrumentos de medición de frecuencia mecánicos están basados en el principio de _________.
8. El tacómetro de Frahm es un dispositivo compuesto de varias _________ con masas en sus extremos libres.

9. La ventaja principal de un estroboscopio es que puede medir la velocidad sin ________ con el cuerpo rotatorio.
10 En el análisis de frecuencia en tiempo real, la señal se analiza de forma continua en todas las bandas _________.
11. Los analizadores en tiempo real son útiles para monitorear la ___________ de maquinaria, puesto que un cambio en el espectro de ruido o vibración se puede observar de inmediato.
12. Un _________ es el intervalo entre dos frecuencias cualesquiera ($f_2 - f_1$), cuya relación de frecuencia $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ es 2.
13. La prueba dinámica de una máquina implica determinar la ________ de la máquina a una frecuencia crítica.
14. Para pruebas de vibración, se apoya la máquina para simular una condición ________ del sistema de modo que también se puedan observar los modos de cuerpo rígido.
15. La fuerza de excitación se mide por una celda _________.
16. La respuesta de un sistema en general se mide por medio de ________.
17. La respuesta de frecuencia de un sistema se puede medir por medio de analizadores ___________.
18. La condición de una máquina se puede determinar por medio de gráficas de severidad de ________.
19. La duración de una máquina sigue la curva de _________ clásica.
20. La _________ observada en figuras de Lissajous se puede utilizar para identificar fallas en maquinaria.
21. El cepstrum se puede definir como el espectro de potencia del logaritmo de la ___________.

10.4 Seleccione la respuesta apropiada de entre las opciones dadas.

1. Cuando se utiliza un transductor junto con otro dispositivo para medir vibración, se llama

   a. sensor de vibración **b.** detector de vibración **c.** actuador de vibración

2. El instrumento que mide el desplazamiento de un cuerpo vibratorio se llama

   a. sismómetro **b.** transductor **c.** acelerómetro

3. El circuito que permite el paso de componentes de frecuencia de una señal en una banda de frecuencia y rechaza todos los demás componentes de frecuencia se llama

   a. filtro pasabanda **b.** filtro de frecuencia **c.** filtro espectral

4. Un decibel (dB) es una cantidad, como potencia (P), definida en función del valor de referencia (P_{ref}) como

   a. $10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$ **b.** $\log_{10}\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$ **c.** $\frac{1}{P_{ref}} \log_{10}(P)$

5. La siguiente función desempeña un rol importante en el análisis modal experimental

   a. función de respuesta de tiempo **b.** función de respuesta modal **c.** función de respuesta de frecuencia

6. El método de someter un sistema a una fuerza conocida como una condición inicial y que luego se retira se conoce como

   a. relajación gradual **b.** excitación producida por un agitador electromagnético **c.** impactador

7. El proceso de utilizar una señal eléctrica, generalizada por un analizador de espectro, para aplicar una fuerza mecánica en un sistema se conoce como

   a. relajación gradual **b.** excitación producida por un agitador electromagnético **c.** impactador

8. El procedimiento de utilizar un martillo con una celda de carga integrada para aplicar carga en puntos diferentes de un sistema se conoce como

   a. relajación gradual **b.** excitación producida por un agitador electromagnético **c.** impactador

9. Durante el periodo inicial de aflojamiento, el deterioro de una máquina

   a. se reduce **b.** se incrementa **c.** permanece constante

10. Durante el periodo normal de operación, el deterioro de una máquina
   a. se reduce **b.** se incrementa **c.** permanece constante
11. Durante el periodo de envejecimiento o desgaste, el deterioro de una máquina
   a. se reduce **b.** se incrementa **c.** permanece constante

10.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. Acelerómetro piezoeléctrico	**a.** produce pulsos luminosos intermitentes
2. Transductor electrodinámico	**b.** tiene una alta salida y es insensible a la temperatura
3. Transductor LVDT	**c.** se utiliza frecuentemente en detectores de velocidad
4. Tacómetro de Fullarton	**d.** tiene una alta sensibilidad y rango de frecuencia
5. Estroboscopio	**e.** voladizo de longitud variable con una masa en su extremo libre

Problemas

Sección 10.2 Transductores

10.1 Un cristal de sal de Rochelle, con sensibilidad al voltaje de 0.098 V-m/N y espesor de 2 mm produjo un voltaje de salida de 200 volts sometido a presión. Determine la presión aplicada al cristal.

Sección 10.3 Detectores de vibración

10.2 Un sistema de resorte-masa con $m = 0.5$ kg y $k = 10\,000$ N/m, con amortiguamiento insignificante, se utiliza como detector de vibración. Cuando se monta en una estructura vibratoria con una amplitud de 4 mm, se observa que el desplazamiento total de la masa del detector es de 12 mm. Encuentre la frecuencia de la estructura vibratoria.

10.3 El movimiento vertical de una máquina se mide por medio del montaje que se muestra en la figura 10.43. El movimiento de la masa m con respecto al cuerpo de la máquina se registra en un tambor. Si la constante de amortiguamiento es igual a $c_{cri}/\sqrt{2}$, y la vibración vertical del cuerpo de la máquina es $y(t) = Y \text{ sen } \omega t$, determine la amplitud del movimiento registrado en el tambor.

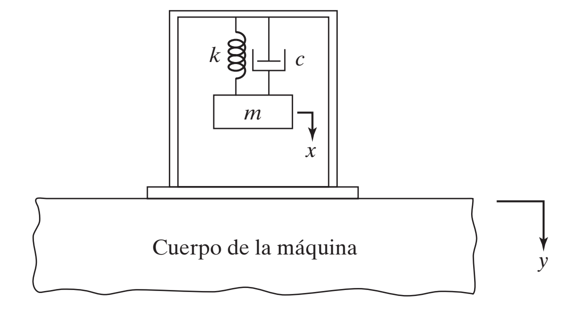


Figura 10.43

10.4 Se propone que la vibración de la base de un motor de combustión interna se mida en un rango de velocidad de 500 rpm a 1 500 rpm con un vibrómetro. La vibración se compone de dos armónicos, el primero provocado por las fuerzas de inercia primarias y el segundo por las fuerzas de inercia secundarias en el motor. Determine la frecuencia natural máxima del vibrómetro para tener una distorsión con amplitud menor que 2 por ciento.

10.5 Determine el porcentaje de error máximo de un vibrómetro en el rango de relación de frecuencia $4 \leq r < \infty$ con una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0$.

10.6 Resuelva el problema 10.5 con una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.67$.

10.7 Se utiliza un vibrómetro para medir la vibración de un motor cuyo rango de velocidad de operación es de 500 a 2000 rpm. La vibración se compone de dos armónicos. La distorsión de la amplitud debe ser menor que 3 por ciento. Determine la frecuencia natural del vibrómetro si (a) el amortiguamiento es insignificante y (b) la relación de amortiguamiento es 0.6.

10.8 Un sistema de resorte-masa con deflexión estática de 10 mm y amortiguamiento insignificante se utiliza como vibrómetro. Cuando se monta en una máquina que opera a 4000 rpm, la amplitud relativa registrada es de 1 mm. Encuentre los valores máximos de desplazamiento, velocidad y aceleración de la máquina.

10.9 Un detector de vibración tiene una frecuencia natural de 5 Hz y una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0.5$. Determine la frecuencia más baja que se puede medir con un error de 1 por ciento.

10.10 Un detector de vibración se diseñó para que opere sobre un nivel de frecuencia de 100 Hz sin que exceda un error de 2 por ciento. Cuando se monta en una estructura que vibra a una frecuencia de 100 Hz, se ve que la amplitud relativa de la masa es de 1 mm. Determine la masa suspendida del detector si la rigidez del resorte es de 4000 N/m y el amortiguamiento es insignificante.

10.11 Un vibrómetro tiene una frecuencia natural no amortiguada de 10 Hz y una frecuencia natural amortiguada de 8 Hz. Encuentre la frecuencia más baja en el rango hasta infinito a la cual la amplitud se pueda leer directamente con el vibrómetro con menos de 2 por ciento de error.

10.12 Determine el porcentaje de error máximo de un acelerómetro en el rango de relación de frecuencia $0 < r \leq 0.65$ con una relación de amortiguamiento de $\zeta = 0$.

10.13 Resuelva el problema 10.12 con una relación de amortiguamiento de 0.75.

10.14 Determine la rigidez necesaria y la constante de amortiguamiento de un acelerómetro si el error máximo se tiene que limitar a un 3 por ciento para mediciones en el rango de frecuencia de 0 a 100 Hz. Suponga que la masa suspendida es de 0.05 kg.

10.15 Se construye un acelerómetro suspendiendo una masa de 0.1 kg de un resorte con rigidez de 10000 N/m y amortiguamiento insignificante. Cuando se monta en la base de un motor, el desplazamiento pico a pico de la masa del acelerómetro es de 10 mm a una velocidad del motor de 1000 rpm. Determine el desplazamiento máximo, la velocidad máxima y la aceleración máxima de la base.

10.16 Un sistema de resorte-masa-amortiguador, que tiene una frecuencia natural no amortiguada de 100 Hz y una constante de amortiguamiento de 20 N-s/m, se utiliza como acelerómetro para medir la vibración de una máquina que opera a una velocidad de 3000 rpm. Si la aceleración real es de 10 m/s^2 y la aceleración registrada es de 9 m/s^2, determine la masa y la constante de resorte del acelerómetro.

10.17 El piso de un taller se somete a la siguiente vibración producida por motores eléctricos que operan a diferentes velocidades:

$$x(t) = 20 \text{ sen } 4\pi t + 10 \text{ sen } 8\pi t + 5 \text{ sen } 12\pi t \text{ mm}$$

Si se utiliza un vibrómetro con frecuencia natural no amortiguada de 0.5 Hz, y una frecuencia natural de 0.48 Hz para registrar la vibración del piso del taller, ¿cuál será la precisión de la vibración registrada?

10.18 Una máquina se somete a la vibración

$$x(t) = 20 \text{ sen } 50t + 5 \text{ sen } 150t \text{ mm} \qquad (t \text{ en seg})$$

Se monta un acelerómetro que tiene una frecuencia natural amortiguada de 80 rad/s y una frecuencia natural no amortiguada de 100 rad/s en la máquina para leer la aceleración directamente en mm/s^2. Examine la precisión de la aceleración registrada.

Sección 10.4 Instrumentos de medición de frecuencia

10.19 Para medir la frecuencia de vibración se utiliza una viga en voladizo de longitud variable de sección rectangular de $\frac{1}{16}$ pulg $\times$ 1 pulg, de acero para resorte. La longitud de la viga en voladizo se puede variar entre 2 pulg y 10 pulg. Halle el rango de frecuencias que se pueden medir con este dispositivo.

Sección 10.8 Análisis modal experimental

10.20 Demuestre que el componente real de la respuesta armónica de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado (de X en la ecuación 3.54) alcanza un valor máximo en

$$R_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta}$$

y un valor mínimo en

$$R_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n} = \sqrt{1 + 2\zeta}$$

10.21 Encuentre el valor de la frecuencia a la cual el componente imaginario de la respuesta armónica de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado (de X en la ecuación 3.54) alcanza un mínimo.

10.22 Construya el diagrama de Nyquist para un sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento histerético.

10.23 En la figura 10.44 se muestra la gráfica de Bode de vibración de la flecha de una turbina obtenida durante funcionamiento por inercia. Determine la relación de amortiguamiento del sistema cuando la deflexión estática de la flecha sea igual a 0.05 mil.

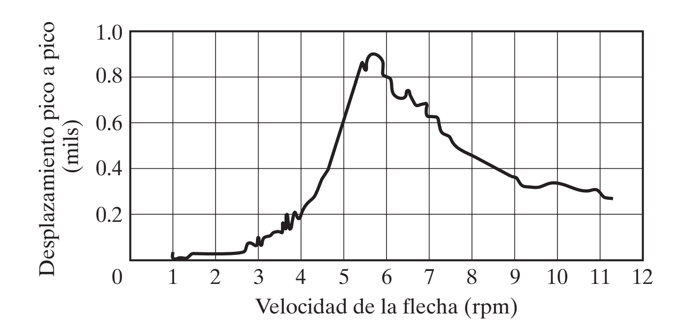
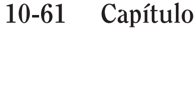


Figura 10.44

10.24 La respuesta vibratoria en el rodamiento de un motor de combustión interna se muestra en la figura 10.45. Determine la relación de amortiguamiento viscoso equivalente del sistema.

10.25 Sugiera un método del uso de la gráfica de Bode del ángulo de fase contra frecuencia (figura 3.11(b)) para identificar la frecuencia natural de la relación de amortiguamiento del sistema.



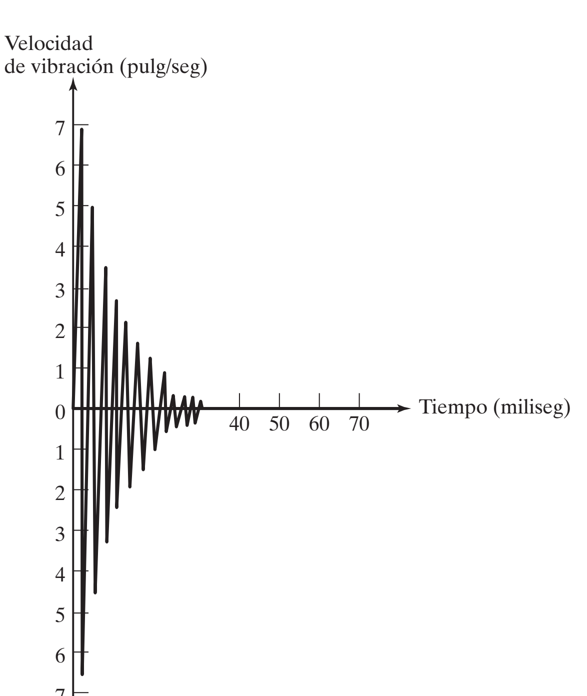


Figura 10.45 Respuesta en el dominio del tiempo.

Sección 10.9 Monitoreo y diagnóstico de la condición de una máquina

10.26. Dos rodamientos de bolas, cada una con 16 bolas, se utilizan para soportar la flecha de un ventilador que gira a 750 rpm. Determine las frecuencias, en hertz, que correspondan a los siguientes defectos:* jaula, anillo de rodamiento interno, anillo de rodamiento externo y bola. Suponga que $d = 15$ mm, $D = 100$ mm y $\alpha = 30°$.

10.27. Determine la frecuencia de los defectos en hertz* correspondiente a defectos en los rodillos, anillo de rodamiento interno, anillo de rodamiento externo y jaula para un rodamiento de rodillos con 18 rodillos cuando se instala en una máquina que funciona a una velocidad de 1 000 rpm. Suponga que $d = 2$ cm, $D = 15$ cm y $\alpha = 20°$.

10.28 Un rodamiento de empuje de contacto angular, se compone de 18 bolas, cada una de 10 mm de diámetro, y está montada en una flecha que gira a 1 500 rpm. Si el ángulo de contacto del rodamiento es de 40° con diámetro de paso de 80 mm, determine las frecuencias correspondientes a fallas en la jaula, bolas, anillo de rodamiento interno y anillo de rodamiento externo.*

10.29 Encuentre el valor de curtosis para una señal de vibración uniformemente distribuida en el rango de 1-5 mm.

$$f(x) = \frac{1}{4}; \qquad 1 \leq x \leq 5 \text{ mm}$$

---

* Cada tipo de falla en rodamientos de bolas y rodillos genera frecuencia de vibración (velocidad de impacto por minuto) como sigue. Defecto en el anillo de rodamiento interno: $f = \frac{1}{2}nN(1 + c)$; defecto en el anillo de rodamiento externo: $f = \frac{1}{2}N(1 - c)$; defecto en las bolas o rodillos: $f = \frac{DN}{d}c(2 - c)$; defecto en la jaula: $f = \frac{1}{2}nN(1 - c)$, donde d = diámetro de bola o rodillo, D = diámetro de paso, α = ángulo de contacto, n = cantidad de bolas o rodillos, N = velocidad (rpm) y $c = \frac{d}{D}\cos\alpha$.

10.30 Encuentre el valor de curtosis para una amplitud de vibración que se puede representar como una variable aleatoria discreta con la siguiente función de probabilidad de masa:

x (mm)	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Sección 10.10 Problemas resueltos utilizando MATLAB

10.31 La figura 10.46 muestra la función de transferencia de una estructura experimental. Determine los valores aproximados de ω_i y ζ_i.

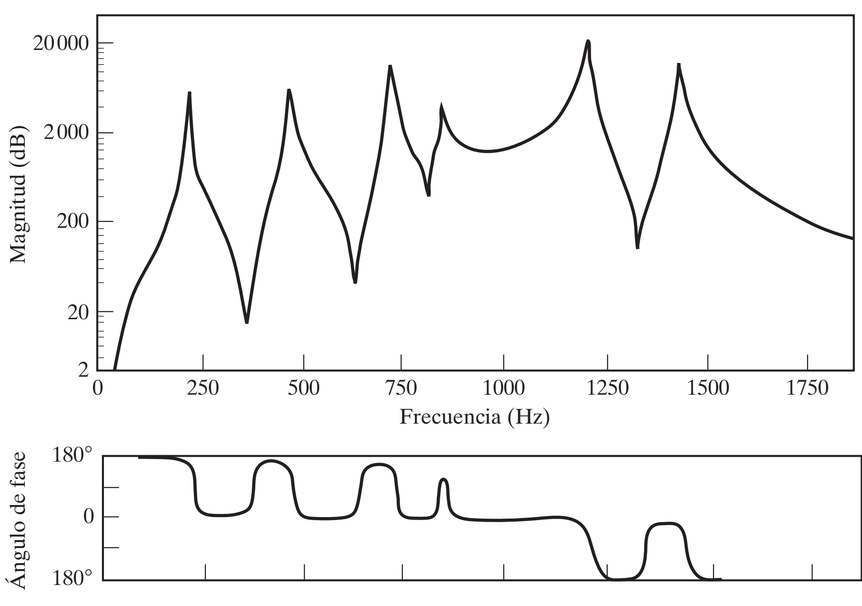


Figura 10.46

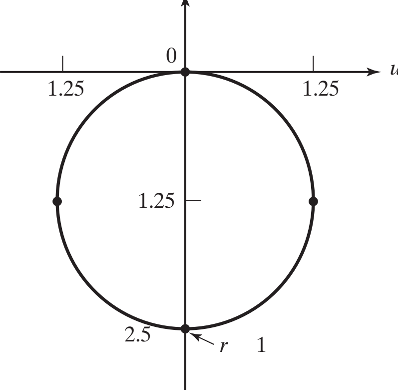


Figura 10.47

10.32 En la figura 10.47 se muestra el círculo experimental de Nyquist de una estructura. Estime la relación de amortiguamiento modal correspondiente a este círculo.

Proyectos de diseño

10.33 Diseñe un excitador de vibración que satisfaga los siguientes requerimientos:

- **a.** Peso máximo de la muestra de prueba = 10 N.
- **b.** Rango de frecuencia de operación = 10 a 50 Hz.
- **c.** Nivel de aceleración máxima = 20 g.
- **d.** Amplitud de vibración máxima = 0.5 cm pico a pico.

10.34 Los tacómetros de Frahm son particularmente útiles para medir velocidades de motores cuyas flechas giratorias son inaccesibles. Cuando el tacómetro se coloca en la estructura de un motor en funcionamiento, la vibración generada por el motor hará que una de las lengüetas vibre notablemente cuando la velocidad del motor corresponda a la frecuencia resonante de la lengüeta. Diseñe un tacómetro de Frahm ligero y compacto con 12 lengüetas para medir velocidades de motor en el rango de 300-600 rpm.

10.35 En la azotea de un edificio de varios pisos se fija una viga en voladizo con una masa m en el extremo libre, para medir la aceleración inducida en la azotea durante cargas de viento y sísmicas (vea la figura 10.48). Diseñe la viga (es decir, determine el material, las dimensiones de la sección transversal y la longitud de la viga) de modo que el esfuerzo inducido en la viga no exceda el esfuerzo de cedencia del material ante una aceleración de 0.2 g en la azotea del edificio. Suponga que la masa m es igual a la mitad de la masa de la viga.

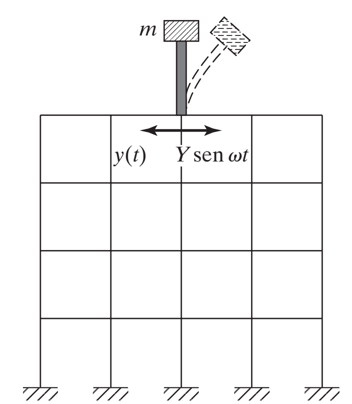


Figura 10.48

CAPÍTULO 11

Métodos de integración numérica en el análisis de vibración

Nathan Newmark
(1910-1981)

Ingeniero estadounidense. Fue profesor de ingeniería civil en la Universidad de Illinois en Urbana, Champaign. Su investigación en estructuras resistentes a sismos y dinámica estructural es ampliamente conocida. El método numérico que presentó en 1959 para calcular la respuesta dinámica de sistemas lineales y no lineales se conoce como método β de Newmark. (Cortesía de la Universidad de Illinois, Urbana, Champaign).

Esquema del capítulo

Cuando la ecuación diferencial que rige la vibración libre y forzada de un sistema no se puede integrar en forma cerrada, se tiene que utilizar un método numérico para el análisis de vibración. Se presenta el método de diferencia finita, el cual está basado en la aproximación de las derivadas que aparecen en la ecuación de movimiento y las condiciones límite. Específicamente, se describe el método de diferencia central tanto para sistemas de un solo grado de libertad como para sistemas de varios grados de libertad mediante el método de diferencia central. La solución de vibración libre de sistemas continuos también se considera utilizando el método de diferencia finita en el contexto de vibración longitudinal y barras y vibración transversal de vigas con diferentes condiciones límite. Se analiza el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la solución de las ecuaciones diferenciales que rigen la vibración de sistemas de un solo grado de libertad y varios grados de libertad. Para la solución de sistemas de varios grados de libertad se presentan los métodos de Houbolt, Wilson y Newmark. Terminamos utilizando programas MATLAB para la solución de sistemas de varios grados de libertad con varios ejemplos numéricos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá de ser capaz de realizar lo siguiente:

- Utilizar el método de diferencia finita para la solución de problemas de vibración de varios grados de libertad.
- Resolver los problemas de vibración de sistemas continuos por medio del método de diferencia finita.
- Resolver las ecuaciones diferenciales asociadas con sistemas (de varios grados de libertad) discretos por medio de los métodos de Runge-Kutta, Houbolt, Wilson y Newmark de cuarto orden.
- Utilizar funciones MATLAB para resolver problemas de vibración discretos y continuos.

11.1 Introducción

Cuando la ecuación diferencial de movimiento de un sistema vibratorio no se puede integrar en forma cerrada, se debe utilizar un método numérico. Hay varios métodos numéricos disponibles para la solución de problemas de vibración [11.1-11.3].[1] Los métodos de integración numérica tienen dos características fundamentales. En primer lugar, no tienen por objeto satisfacer la o las ecuaciones diferenciales reguladoras en todo momento sino sólo en intervalos de tiempo discretos con una separación Δt entre ellos. En segundo lugar, se supone un tipo adecuado de variación del desplazamiento x, velocidad $\dot{x}$ y aceleración $\ddot{x}$ dentro de cada intervalo de tiempo Δt. Se pueden obtener métodos de integración numérica diferentes, dependiendo del tipo de variación supuesta para el desplazamiento, velocidad y aceleración, dentro de cada intervalo de tiempo Δt. Supondremos que los valores de x y $\dot{x}$ son x_0 y $\dot{x}_0$, respectivamente, en el tiempo $t = 0$ y que la solución del problema se requiere de $t = 0$ a $t = T$. A continuación, subdividimos la duración de tiempo T en n intervalos iguales Δt de modo que $\Delta t = T/n$ y buscamos la solución en $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t$, $t = 2\,\Delta t$, ..., $t_n = n\,\Delta t = T$. Derivaremos fórmulas para hallar la solución en $t_i = \Delta t_i$ a partir de la solución conocida en $t_{i-1} = (i - 1)\Delta t$ de acuerdo con cinco esquemas de integración numérica: (1) el método de

---

[1] En la sección 4.9 se presentó un procedimiento numérico utilizando diferentes tipos de funciones de interpolación para aproximar la función forzada $F(t)$.

diferencia finita; (2) el método de Runge-Kutta; (3) el método de Houbolt; (4) el método de Wilson, y (5) el método de Newmark. En los métodos de diferencia finita y de Runge-Kutta, el desplazamiento actual (solución) se expresa en función de los valores previamente determinados de desplazamiento, velocidad y aceleración, y se resuelven las ecuaciones resultantes para determinar el desplazamiento actual. Estos métodos caen bajo la categoría de métodos de integración explícitos. En los métodos de Houbolt, Wilson y Newmark, las ecuaciones de diferencia temporal se combinan con las ecuaciones actuales de movimiento y se resuelven las ecuaciones resultantes para determinar el desplazamiento actual. Estos métodos pertenecen a la categoría de métodos de integración implícitos.

11.2 Método de diferencia finita

La idea principal en el método de diferencia finita es utilizar aproximaciones a derivadas. Por lo tanto, la ecuación diferencial que rige el movimiento y las condiciones límite asociadas, si es aplicable, es reemplazada por las ecuaciones de diferencia finita correspondientes. Se pueden utilizar tres tipos de fórmulas: de diferencia directa, inversa y central, para derivar las ecuaciones de diferencia finita [11.4-11.6]. En este capítulo consideraremos sólo las fórmulas de diferencia central, puesto que son más precisas.

En el método de diferencia finita reemplazamos el dominio de la solución (en el cual se requiere la solución de la ecuación diferencial dada) con la cantidad finita de puntos, conocidos como *puntos de malla* o *cuadrícula*, y buscamos determinar los valores de la solución deseada en estos puntos. Los puntos de cuadrícula se suelen considerar equidistantes entre sí a lo largo de cada una de las coordenadas independientes (vea la figura 11.1). Utilizando la expansión de la serie de Taylor, x_{i+1} y x_{i-1} se pueden expresar con respecto al punto de cuadrícula i como

$$x_{i+1} = x_i + h\dot{x}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_i + \frac{h^3}{6}\dddot{x}_i + \cdots \tag{11.1}$$

$$x_{i-1} = x_i - h\dot{x}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_i - \frac{h^3}{6}\dddot{x}_i + \cdots \tag{11.2}$$

donde $x_i = x(t = t_i)$ y $h = t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Tomando sólo dos términos y restando la ecuación (11.2) de la ecuación (11.1), obtenemos la aproximación de diferencia central a la primera derivada de $x =$ en $t = t_i$:

$$\dot{x}_i = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_i} = \frac{1}{2h}(x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{11.3}$$

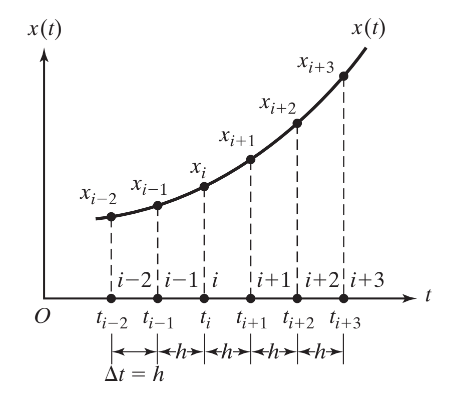


Figura 11.1 Puntos de cuadrícula.

Tomando términos hasta la segunda derivada y sumando las ecuaciones (11.1) y (11.2), obtenemos la fórmula de la diferencia central para la segunda derivada:

$$\ddot{x}_i = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_i} = \frac{1}{h^2}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \tag{11.4}$$

11.3 Método de diferencia central para sistemas de un solo grado de libertad

La ecuación rectora de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{11.5}$$

Divídase la duración en la cual se requiere la solución de la ecuación (11.5) en n partes iguales cada una de intervalo $h = \Delta t$. Para obtener una solución satisfactoria, debemos seleccionar un intervalo de tiempo Δt menor que un intervalo de tiempo crítico Δt_{cri}.[2] Sean las condiciones iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t_i = 0) = \dot{x}_0$.

Reemplazando las derivadas por las diferencias centrales y escribiendo la ecuación (11.5) en el punto de cuadrícula i se obtiene

$$m\left\{\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}\right\} + c\left\{\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,\Delta t}\right\} + kx_i = F_i \tag{11.6}$$

donde $x_i = x(t_i)$ y $F_i = F(t_i)$. La solución de la ecuación (11.6) con x_{i+1} produce

$$x_{i+1} = \left\{\frac{1}{\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\,\Delta t}}\right\}\left[\left\{\frac{2m}{(\Delta t)^2} - k\right\}x_i + \left\{\frac{c}{2\,\Delta t} - \frac{m}{(\Delta t)^2}\right\}x_{i-1} + F_i\right] \tag{11.7}$$

Ésta se conoce como *fórmula de recurrencia*. Nos permite calcular el desplazamiento de la masa (x_{i+1}) si conocemos el historial previo de los desplazamientos en t_i y t_{i-1}, así como de la fuerza

[2] Se dice que los métodos numéricos que requieren el uso de un intervalo de tiempo (Δt) menor que un intervalo crítico (Δt_{cri}) son *condicionalmente estables* [11.7]. Si Δt se considera mayor que Δt_{cri}, el método se vuelve inestable. Esto significa que el truncamiento de los términos de alto orden en la derivación de las ecuaciones (11.3) y (11.4) (o redondeo en la computadora) provoca errores que crecen y que en la mayoría de los casos hacen que los cálculos de la respuesta sean inútiles. El intervalo de tiempo crítico es $\Delta t_{\text{cri}} = \tau_n/\pi$, donde τ_n es el periodo natural del sistema o el menor en el caso de un sistema de varios grados de libertad [11.8]. Naturalmente, la precisión de la solución siempre depende del tamaño del intervalo de tiempo. Si seguimos un método incondicionalmente estable, podemos escoger el intervalo de tiempo sólo con respecto a la precisión, no con respecto a la estabilidad. Por lo común, esto permite utilizar un intervalo de tiempo mucho más grande para cualquier precisión dada.

externa presente F_i. La aplicación repetida de la ecuación (11.7) proporciona el historial completo del comportamiento del sistema. Observe que la solución de x_{i+1} se basa en el uso de la ecuación de equilibrio en el tiempo t_i, es decir, la ecuación (11.6). Por tal razón, este procedimiento de integración se conoce como *método de integración explícito*. Se tiene que tener cierto cuidado al aplicar la ecuación (11.7) cuando $i = 0$. Como tanto x_0 como x_{-1} se requieren para hallar el valor de x_1, y las condiciones iniciales sólo proporcionan los valores de x_0 y $\dot{x}_0$, tenemos que hallar el valor de x_{-1}. Por tanto el método no se autoinicia. No obstante, podemos generar el valor de x_{-1} con las ecuaciones (11.3) y (11.4) como sigue. Sustituyendo los valores conocidos de x_0 y $\dot{x}_0$ en la ecuación (11.5), $\ddot{x}_0$, se puede determinar como sigue

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m}[F(t = 0) - c\dot{x}_0 - kx_0] \tag{11.8}$$

La aplicación de las ecuaciones (11.3) y (11.4) en $i = 0$ proporciona el valor de x_{-1}:

$$x_{-1} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{x}_0 \tag{11.9}$$

Ejemplo 11.1 Respuesta de un sistema de un solo grado de libertad

Encuentre la respuesta de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado sometido a una fuerza

$$F(t) = F_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2t_0}\right)$$

con los siguientes datos: $F_0 = 1$, $t_0 = \pi$, $m = 1$, $c = 0.2$ y $k = 1$. Suponga que los valores del desplazamiento y velocidad de la masa en el instante $t = 0$ son cero.

Solución: La ecuación diferencial que rige es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = F_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2t_0}\right) \tag{E.1}$$

La ecuación (11.7) da la solución de diferencia finita de la ecuación (E.1). Como las condiciones iniciales son $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, la ecuación (11.8) produce $\ddot{x}_0 = 1$; de ahí que la ecuación (11.9) resulte $x_{-1} = (\Delta t)^2/2$. Por lo tanto la solución de la ecuación (E.1) se obtiene a partir de la relación de recurrencia.

$$x_{i+1} = \frac{1}{\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\,\Delta t}\right]}\left[\left\{\frac{2m}{(\Delta t)^2} - k\right\}x_i + \left\{\frac{c}{2\,\Delta t} - \frac{m}{(\Delta t)^2}\right\}x_{i-1} + F_i\right], \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{E.2}$$

con $x_0 = 0$, $x_{-1} = (\Delta t)^2/2$, $x_i = x(t_i) = x(i\,\Delta t)$, y

$$F_i = F(t_i) = F_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{i\pi\,\Delta t}{2t_0}\right)$$

La frecuencia natural no amortiguada y el periodo natural del sistema son

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = 1 \tag{E.3}$$

y

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \tag{E.4}$$

Por lo tanto el intervalo Δt debe ser menor que $\tau_n/\pi = 2.0$. Debemos hallar la solución de ecuación (E.1) utilizando los intervalos de tiempo $\Delta t = \tau_n/40$, $\tau_n/20$ y $\tau_n/2$. El intervalo de tiempo $\Delta\tau = \tau_n/2 > \Delta t_{\text{cri}}$ se utiliza para ilustrar el comportamiento inestable (divergente) de la solución. En la tabla 11.1 se muestran los valores de la respuesta x_i obtenidos en diferentes instantes de tiempo t_i.

Este ejemplo es idéntico al ejemplo 4.17. Los resultados obtenidos por medio de la idealización 4 (interpolación tipo lineal por partes) del ejemplo 4.17 se muestran en la tabla 11.1 hasta el instante $t_i = \pi$ en la última columna de la tabla. Se observa que el método de diferencia finita entrega resultados razonablemente precisos con los intervalos de tiempo $\Delta t = \tau_n/40$ y $\tau_n/20$ (los cuales son menores que Δt_{cri}) pero presenta resultados divergentes con $\Delta\tau = \tau_n/2$ (el cual es mayor que Δt_{cri}).

■

TABLA 11.1 Comparación de las soluciones del ejemplo 11.1

	Valores de $x_i = x(t_i)$ obtenidos con			
Tiempo (t_i)	$\Delta t = \frac{\tau_n}{40}$	$\Delta t = \frac{\tau_n}{20}$	$\Delta t = \frac{\tau_n}{2}$	**Valor de x_i dado por la idealización 4 del ejemplo 4.31**
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\pi/10$	0.04638	0.04935	—	0.04541
$2\pi/10$	0.16569	0.17169	—	0.16377
$3\pi/10$	0.32767	0.33627	—	0.32499
$4\pi/10$	0.50056	0.51089	—	0.49746
$5\pi/10$	0.65456	0.66543	—	0.65151
$6\pi/10$	0.76485	0.77491	—	0.76238
$7\pi/10$	0.81395	0.82185	—	0.81255
$8\pi/10$	0.79314	0.79771	—	0.79323
$9\pi/10$	0.70297	0.70340	—	0.70482
π	0.55275	0.54869	4.9348	0.55647
2π	0.19208	0.19898	−29.551	—
3π	2.7750	2.7679	181.90	—
4π	0.83299	0.83852	−1058.8	—
5π	−0.05926	−0.06431	6253.1	—

11.4 Método de Runge-Kutta para sistemas de un solo grado de libertad

En el método de Runge-Kutta, se hace que la fórmula aproximada utilizada para obtener x_{i+1} a partir de x_i coincida con la expansión de la serie de Taylor de x en x_{i+1} hasta los términos de orden $(\Delta t)^n$. La expansión de la serie de Taylor de $x(t)$ en $t + \Delta t$ es resultado de

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\,\Delta t + \ddot{x}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dddot{x}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \ddddot{x}\frac{(\Delta t)^4}{4!} + \cdots \tag{11.10}$$

En contraste con la ecuación (11.10), la cual requiere derivadas de mayor orden, el método de Runge-Kutta no requiere derivadas explícitamente más allá del primer orden [11.9-11.11]. Para la solución de una ecuación diferencial de segundo orden, primero la reducimos a dos ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, la ecuación (11.5) se puede volver a escribir como

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}[F(t) - c\dot{x} - kx] = f(x, \dot{x}, t) \tag{11.11}$$

Definiendo $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, la ecuación (11.11) se puede escribir como dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, t)\end{aligned} \tag{11.12}$$

Definiendo

$$\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2, t) \end{Bmatrix}$$

se utiliza la siguiente fórmula de recurrencia para hallar los valores de $\vec{X}(t)$ en diferentes puntos de cuadrícula t_i de acuerdo con el método de Runge-Kutta de cuarto orden

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \tfrac{1}{6}[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4] \tag{11.13}$$

donde

$$\vec{K}_1 = h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i) \tag{11.14}$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \tfrac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \tfrac{1}{2}h) \tag{11.15}$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \tfrac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \tfrac{1}{2}h) \tag{11.16}$$

$$\vec{K}_4 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+1}) \tag{11.17}$$

El método es estable y de inicio automático; es decir, sólo se requieren los valores de la función en un solo punto previo para encontrar el valor de la función en el punto actual.

Ejemplo 11.2 Respuesta de un sistema de un solo grado de libertad

Encuentre la solución del ejemplo 11.1 aplicando el método de Runge-Kutta.

Solución: Utilizamos un intervalo $\Delta t = 0.3142$ y definimos

$$\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix}$$

y

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dfrac{1}{m}\left[F_0\left(1 - \operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{2t_0}\right) - c\dot{x}(t) - kx(t) \right] \end{Bmatrix}$$

Por las condiciones iniciales conocidas, tenemos

$$\vec{X}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los valores de $\vec{X}_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, obtenidos según la ecuación (11.13) aparecen en la tabla 11.2.

Tabla 11.2

Intervalo i	Tiempo t_i	$x_1 = x$	$x_2 = \dot{x}$
1	0.3142	0.045406	0.275591
2	0.6283	0.163726	0.461502
3	0.9425	0.324850	0.547296
⋮			
19	5.9690	−0.086558	0.765737
20	6.2832	0.189886	0.985565

■

11.5 Método de diferencia central para sistemas de varios grados de libertad

La ecuación de movimiento de un sistema de varios grados de libertad viscosamente amortiguado (vea la ecuación (6.119)) se expresa como

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \tag{11.18}$$

donde $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez $\vec{x}$ es el vector de desplazamiento y $\vec{F}$ es el vector de fuerza. El procedimiento indicado para el caso de un sistema de un solo grado de libertad se puede extender directamente a este caso [11.12, 11.13]. Las fórmulas de diferencia central para los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo $t_i = i\,\Delta t(\dot{\vec{x}}_i$ y $\ddot{\vec{x}}_i)$ son

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{1}{2\,\Delta t}(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) \tag{11.19}$$

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) \tag{11.20}$$

las cuales son semejantes a las ecuaciones (11.3) y (11.4). Por lo tanto la ecuación de movimiento, ecuación (11.18), en el tiempo t_i se escribe como

$$[m]\frac{1}{(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) + [c]\frac{1}{2\,\Delta t}(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) + [k]\vec{x}_i = \vec{F}_i \tag{11.21}$$

donde $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t = t_{i+1})$, $\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$, $\vec{x}_{i-1} = \vec{x}(t = t_{i-1})$, $\vec{F}_i = \vec{F}(t = t_i)$, y $t_i = i\,\Delta t$. La ecuación (11.21) se reacomoda para obtener

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i+1} + \left(-\frac{2}{(\Delta t)^2}[m] + [k]\right)\vec{x}_i$$

$$+ \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] - \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-1} = \vec{F}_i$$

o

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_i - \left([k] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[m]\right)\vec{x}_i$$

$$-\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] - \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-1} \tag{11.22}$$

Por lo tanto la ecuación (11.22) aporta el vector de solución $\vec{x}_{i+1}$ una vez que se conocen $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_{i-1}$. Como se tiene que utilizar la ecuación (11.22) con $i = 1, 2, ..., n$, la evaluación de $\vec{x}_1$ requiere $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_{-1}$. Por lo tanto se requiere un procedimiento de inicio especial para obtener $\vec{x}_{-1} = \vec{x}(t = -\Delta t)$. Para esto, se evalúan las ecuaciones (11.18) a (11.20) en $i = 0$ para obtener

$$[m]\ddot{\vec{x}}_0 + [c]\dot{\vec{x}}_0 + [k]\vec{x}_0 = \vec{F}_0 = \vec{F}(t = 0) \tag{11.23}$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{1}{2\,\Delta t}(\vec{x}_1 - \vec{x}_{-1}) \tag{11.24}$$

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\vec{x}_1 - 2\vec{x}_0 + \vec{x}_{-1}) \tag{11.25}$$

La ecuación (11.23) proporciona el vector de aceleración inicial como

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [m]^{-1}(\vec{F}_0 - [c]\dot{\vec{x}}_0 - [k]\vec{x}_0) \tag{11.26}$$

y la ecuación (11.24) aporta el vector de desplazamiento en t_1 como

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_{-1} + 2\,\Delta t\dot{\vec{x}}_0 \tag{11.27}$$

Sustituyendo la ecuación (11.27) para $\vec{x}_1$, la ecuación (11.25) produce

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \frac{2}{(\Delta t)^2}[\Delta t\dot{\vec{x}}_0 - \vec{x}_0 + \vec{x}_{-1}]$$

o

$$\vec{x}_{-1} = \vec{x}_0 - \Delta t\dot{\vec{x}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\vec{x}}_0 \tag{11.28}$$

donde la ecuación (11.26) entrega $\ddot{\vec{x}}_0$. Por lo tanto la ecuación (11.28) da el valor de $\vec{x}_{-1}$ requerido para aplicar la ecuación (11.22) en $i = 1$. A continuación se describe el procedimiento de cálculo.

1. A partir de las condiciones iniciales conocidas $\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0$ y $\dot{\vec{x}}(t = 0) = \dot{\vec{x}}_0$,, calcule $\ddot{\vec{x}}(t = 0) = \ddot{\vec{x}}_0$ utilizando la ecuación (11.26).
2. Seleccione un intervalo de tiempo Δt de modo que $\Delta t < \Delta t_{\text{cri}}$.
3. Calcule $\vec{x}_{-1}$ utilizando la ecuación (11.28).
4. Encuentre $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t = t_{i+1})$, empezando con $i = 0$, a partir de la ecuación (11.22), como

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right]^{-1}\left[\vec{F}_i - \left([k] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[m]\right)\vec{x}_i - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] - \frac{1}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-1}\right] \tag{11.29}$$

donde

$$\vec{F}_i = (t = t_i) \tag{11.30}$$

Si se requiere, evalúe las aceleraciones y velocidades en t_i:

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2}[\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}] \tag{11.31}$$

y

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{1}{2\,\Delta t}[\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}] \tag{11.32}$$

Repita el paso 4 hasta que se determine $\vec{x}_{n+1}$ (con $i = n$). La estabilidad del esquema de diferencia finita para resolver ecuaciones matriciales se expone en la referencia [11.14].

Ejemplo 11.3 Método de diferencia central para un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta del sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 11.2 cuando las funciones forzadas están dadas por $F_1(t) = 0$ y $F_2(t) = 10$. Suponga el valor de c como cero y las condiciones iniciales como $\vec{x}(t = 0) = \dot{\vec{x}}(t = 0) = \vec{0}$.

Solución:

Método: Use $\Delta t = \tau/10$, donde τ es el periodo de tiempo más pequeño en el método de diferencia central.

La ecuación (E.1) proporciona las ecuaciones de movimiento

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\dot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \tag{E.1}$$

donde

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \tag{E.5}$$

y

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

Las frecuencias naturales no amortiguadas y los modos del sistema se pueden obtener resolviendo el problema de valor eigen

$$\left[-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.7}$$

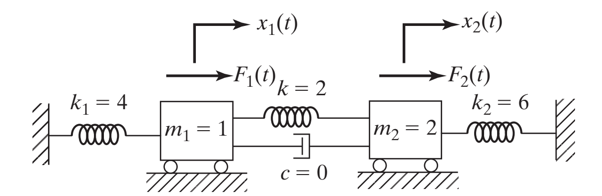


Figura 11.2 Sistema de dos grados de libertad.

La solución de la ecuación (E.7) está dada por

$$\omega_1 = 1.807747, \qquad \vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3661 \end{Bmatrix} \tag{E.8}$$

$$\omega_2 = 2.594620, \qquad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.3661 \end{Bmatrix} \tag{E.9}$$

Por lo tanto los periodos naturales del sistema son

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 3.4757 \qquad \text{y} \qquad \tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2.4216$$

Seleccionaremos el intervalo de tiempo (Δt) como $\tau_2/10 = 0.24216$. El valor inicial de $\ddot{\vec{x}}$ se puede obtener como sigue:

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [m]^{-1}\{\vec{F} - [k]\vec{x}_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \tag{E.10}$$

y el valor de $\vec{x}_{-1}$ como sigue:

$$\vec{x}_{-1} = \vec{x}_0 - \Delta t \dot{\vec{x}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\vec{x}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1466 \end{Bmatrix} \tag{E.11}$$

Ahora se puede aplicar la ecuación (11.29) de manera recursiva para obtener $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ Los resultados se muestran en la tabla 11.3.

■

11.6 Método de diferencia finita para sistemas continuos

11.6.1 Vibración longitudinal de barras

Ecuación de movimiento. La ecuación de movimiento que rige la vibración longitudinal libre de una barra uniforme (vea las ecuaciones (8.49) y (8.20)) se expresa como

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \alpha^2 U = 0 \tag{11.33}$$

donde

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho\omega^2}{E} \tag{11.34}$$

Tabla 11.3

Tiempo ($t_i = i\,\Delta t$)	$\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
t_1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1466 \end{Bmatrix}$
t_2	$\begin{Bmatrix} 0.0172 \\ 0.5520 \end{Bmatrix}$
t_3	$\begin{Bmatrix} 0.0931 \\ 1.1222 \end{Bmatrix}$
t_4	$\begin{Bmatrix} 0.2678 \\ 1.7278 \end{Bmatrix}$
t_5	$\begin{Bmatrix} 0.5510 \\ 2.2370 \end{Bmatrix}$
t_6	$\begin{Bmatrix} 0.9027 \\ 2.5470 \end{Bmatrix}$
t_7	$\begin{Bmatrix} 1.2354 \\ 2.6057 \end{Bmatrix}$
t_8	$\begin{Bmatrix} 1.4391 \\ 2.4189 \end{Bmatrix}$
t_9	$\begin{Bmatrix} 1.4202 \\ 2.0422 \end{Bmatrix}$
t_{10}	$\begin{Bmatrix} 1.1410 \\ 1.5630 \end{Bmatrix}$
t_{11}	$\begin{Bmatrix} 0.6437 \\ 1.0773 \end{Bmatrix}$
t_{12}	$\begin{Bmatrix} 0.0463 \\ 0.6698 \end{Bmatrix}$

Para obtener la aproximación de diferencia finita de la ecuación (11.33), primero dividimos la barra de longitud l en $n - 1$ partes iguales cada una de longitud $h = l/(n - 1)$ e indicamos los puntos de malla como 1, 2, 3, ..., i, ..., n, como se muestra en la figura 11.3. Luego, indicando el valor de U en el punto de malla i como U_i y utilizando una fórmula para la segunda derivada semejante a la ecuación (11.4), se escribe la ecuación (11.33) para el punto de malla i como

$$\frac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) + \alpha^2 U_i = 0$$

o

$$U_{i+1} - (2 - \lambda)U_i + U_{i-1} = 0 \tag{11.35}$$

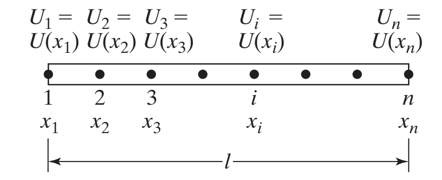


Figura 11.3 División de una barra para aproximación de diferencia finita.

donde $\lambda = h^2\alpha^2$. La aplicación de la ecuación (11.35) en los puntos de malla $i = 2, 3, ..., n - 1$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} U_3 - (2 - \lambda)U_2 + U_1 &= 0 \\ U_4 - (2 - \lambda)U_3 + U_2 &= 0 \\ &\vdots \\ U_n - (2 - \lambda)U_{n-1} + U_{n-2} &= 0 \end{aligned} \tag{11.36}$$

las cuales se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -1 & (2-\lambda) & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (2-\lambda) & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (2-\lambda) & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & . & . & . & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & (2-\lambda) & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ . \\ . \\ . \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.37}$$

Condiciones límite

Extremo fijo. La deflexión es cero en un extremo fijo. Suponiendo que la barra está fija en $x = 0$ y $x = l$, formulamos $U_1 = U_n = 0$ en la ecuación (11.37) y obtenemos la ecuación

$$[[A] - \lambda[I]]\vec{U} = \vec{0} \tag{11.38}$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.39}$$

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ . \\ . \\ . \\ U_{n-1} \end{Bmatrix} \tag{11.40}$$

e $[I]$ es la matriz identidad de orden $n - 2$.

Observe que el problema de valor eigen de la ecuación (11.38) es fácil de resolver, puesto que la matriz $[A]$ es una matriz de tres diagonales [11.15-11.17].

Extremo libre. El esfuerzo es cero en el extremo libre, de modo que $(dU)/(dx) = 0$. Podemos utilizar una fórmula para la primera derivada semejante a la ecuación (11.3). Para ilustrar el procedimiento, consideremos que la barra está libre en $x = 0$ y fija en $x = l$. Las condiciones límite se pueden expresar entonces como

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_1 \simeq \frac{U_2 - U_{-1}}{2h} = 0 \qquad \text{o} \qquad U_{-1} = U_2 \tag{11.41}$$

$$U_n = 0 \tag{11.42}$$

A fin de aplicar la ecuación (11.41), tenemos que imaginar que la función $U(x)$ es continua más allá de la longitud de la barra y crear un punto de malla ficticio -1 de modo que U_{-1} se convierta en el desplazamiento ficticio del punto x_{-1}. La aplicación de la ecuación (11.35) en el punto de malla $i = 1$ produce

$$U_2 - (2-\lambda)\,U_1 + U_{-1} = 0 \tag{11.43}$$

Incorporando la condición $U_{-1} = U_2$ (ecuación 11.41), la ecuación (11.43) se escribe como

$$(2 - \lambda)U_1 - 2U_2 = 0 \tag{11.44}$$

Sumando las ecuaciones (11.44) y (11.37), obtenemos las ecuaciones finales:

$$[[A] - \lambda[I]]\vec{U} = \vec{0} \tag{11.45}$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.46}$$

y

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n-1} \end{Bmatrix} \tag{11.47}$$

11.6.2 Vibración transversal de vigas

Ecuación de movimiento. La ecuación (8.83) proporciona la ecuación diferencial que rige la vibración transversal de una viga uniforme:

$$\frac{d^4W}{dx^4} - \beta^4 W = 0 \tag{11.48}$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{11.49}$$

Utilizando la fórmula de diferencia central para la cuarta derivada,[3] la ecuación (11.48) se escribe en cualquier punto de malla i como

$$W_{i+2} - 4W_{i+1} + (6 - \lambda)W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2} = 0 \tag{11.50}$$

donde

$$\lambda = h^4 \beta^4 \tag{11.51}$$

Divídase la viga en $n - 1$ partes iguales con n puntos de malla y $h = l/(n - 1)$. La aplicación de la ecuación (11.50) en los puntos de malla $i = 3, 4, ..., n - 2$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & (6-\lambda) & -4 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & (6-\lambda) & -4 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & (6-\lambda) & -4 & 1 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 1 & -4 & (6-\lambda) & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.52}$$

[3] La fórmula de diferencia central para la cuarta derivada (vea el problema 11.3) está dada por

$$\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \simeq \frac{1}{h^4}(f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})$$

Condiciones límite

Extremo fijo. La deflexión W y la pendiente $(dW)/(dx)$ son cero en un extremo fijo. Si el extremo $x = 0$ está fijo, introducimos un nodo ficticio -1 en el lado izquierdo de la viga, como se muestra en la figura 11.4, y formulamos las condiciones límite, utilizando la fórmula de diferencia central para $(dW)/(dx)$, como

$$W_1 = 0$$

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_1 = \frac{1}{2h}(W_2 - W_{-1}) = 0 \qquad \text{o} \qquad W_{-1} = W_2 \tag{11.53}$$

donde W_i indica el valor de W en el nodo i. Si el extremo $x = l$ está fijo, introducimos el nodo ficticio $n + 1$ en el lado derecho de la viga, como se muestra la figura 11.4 y formulamos las condiciones límite como

$$W_n = 0$$

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_n = \frac{1}{2h}(W_{n+1} - W_{n-1}) = 0 \qquad \text{o} \qquad W_{n+1} = W_{n-1} \tag{11.54}$$

Extremo simplemente apoyado. Si el extremo $x = 0$ está simplemente apoyado (vea la figura 11.5), tenemos

$$W_1 = 0$$

$$\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_1 = \frac{1}{h^2}(W_2 - 2W_1 + W_{-1}) = 0 \qquad \text{o} \qquad W_{-1} = -W_2 \tag{11.55}$$

Se pueden escribir ecuaciones parecidas si el extremo $x = l$ está simplemente apoyado.

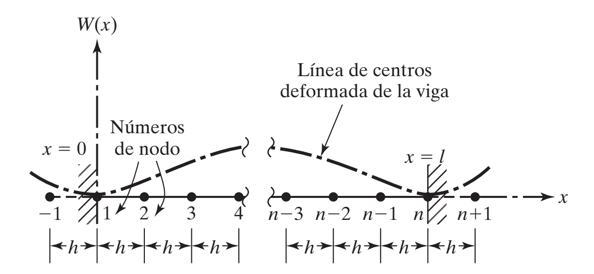


Figura 11.4 Viga con extremos fijos.

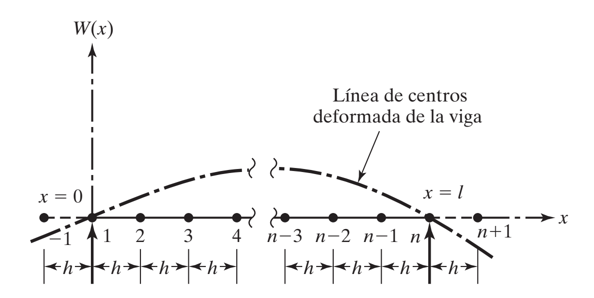


Figura 11.5 Viga con extremos simplemente apoyados.

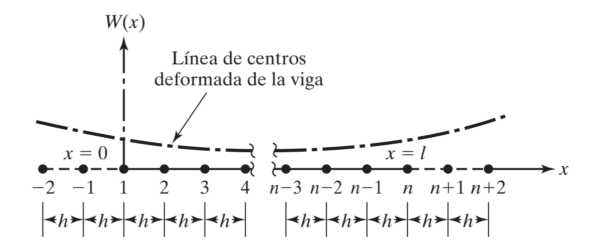


Figura 11.6 Viga con extremos libres.

Extremo libre. Como el momento de flexión y la fuerza cortante son cero en un extremo libre, introducimos dos nodos ficticios afuera de la viga, como se muestra en la figura 11.6, y utilizamos fórmulas de diferencia central para aproximar la segunda y tercera derivadas de la deflexión W. Por ejemplo, si el extremo $x = 0$ está libre, tenemos

$$\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_1 = \frac{1}{h^2}(W_2 - 2W_1 + W_{-1}) = 0$$

$$\left.\frac{d^3W}{dx^3}\right|_1 = \frac{1}{2h^3}(W_3 - 2W_2 + 2W_{-1} - W_{-2}) = 0 \tag{11.56}$$

Ejemplo 11.4 Viga con un extremo articulado y el otro fijo

Encuentre las frecuencias naturales de la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 11.7. Suponga que la sección transversal de la viga es constante a todo lo largo de ella.

Solución: Dividiremos la viga en cuatro segmentos y expresaremos la ecuación que rige

$$\frac{d^4W}{dx^4} - \beta^4 W = 0 \tag{E.1}$$

en forma de diferencia finita en cada uno de los puntos de malla interiores. Esto produce las ecuaciones

$$W_0 - 4W_1 + (6 - \lambda)W_2 - 4W_3 + W_4 = 0 \tag{E.2}$$

$$W_1 - 4W_2 + (6 - \lambda)W_3 - 4W_4 + W_5 = 0 \tag{E.3}$$

$$W_2 - 4W_3 + (6 - \lambda)W_4 - 4W_5 + W_6 = 0 \tag{E.4}$$

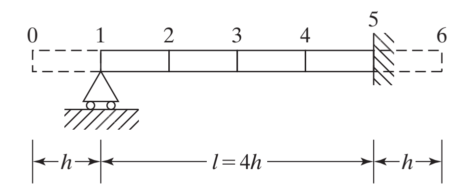


Figura 11.7 Viga con un extremo fijo o empotrado y el otro simplemente apoyado.

donde W_0 y W_6 indican los valores de W en los nodos ficticios 0 y 6, respectivamente, y

$$\lambda = h^4\beta^4 = \frac{h^4\rho A\omega^2}{EI} \tag{E.5}$$

Las condiciones límite en el extremo simplemente apoyado (punto de malla 1) son

$$W_1 = 0$$
$$W_0 = -W_2 \tag{E.6}$$

En el extremo fijo (punto de malla 5) las condiciones límite son

$$W_5 = 0$$
$$W_6 = W_4 \tag{E.7}$$

Con ayuda de las ecuaciones (E.6) y (E.7), las ecuaciones (E.2) a (E.4) se reducen a

$$(5 - \lambda)W_2 - 4W_3 + W_4 = 0 \tag{E.8}$$

$$-4W_2 + (6 - \lambda)W_3 - 4W_4 = 0 \tag{E.9}$$

$$W_2 - 4W_3 + (7 - \lambda)W_4 = 0 \tag{E.10}$$

Las ecuaciones (E.8) a (E.10) se escriben en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} (5-\lambda) & -4 & 1 \\ -4 & (6-\lambda) & -4 \\ 1 & -4 & (7-\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.11}$$

La solución del problema de valor eigen (ecuación (E.11)) presenta los siguientes resultados:

$$\lambda_1 = 0.7135, \quad \omega_1 = \frac{0.8447}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.5880 \\ 0.7215 \\ 0.3656 \end{Bmatrix} \tag{E.12}$$

$$\lambda_2 = 5.0322, \quad \omega_2 = \frac{2.2433}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.6723 \\ -0.1846 \\ -0.7169 \end{Bmatrix} \tag{E.13}$$

$$\lambda_3 = 12.2543, \quad \omega_3 = \frac{3.5006}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.4498 \\ -0.6673 \\ 0.5936 \end{Bmatrix} \tag{E.14}$$

■

11.7 Método de Runge-Kutta para sistemas de varios grados de libertad

En el método de Runge-Kutta, las ecuaciones matriciales de movimiento, ecuación (11.18), se utilizan para expresar el vector de aceleración como

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [m]^{-1}(\vec{F}(t) - [c]\dot{\vec{x}}(t) - [k]\vec{x}(t)) \tag{11.57}$$

Tratando los desplazamientos y también las velocidades como incógnitas, un nuevo vector $\vec{X}(t)$, se define como $\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} \vec{x}(t) \\ \dot{\vec{x}}(t) \end{Bmatrix}$ de modo que

$$\dot{\vec{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ [m]^{-1}(\vec{F} - [c]\dot{\vec{x}} - [k]\vec{x}) \end{Bmatrix} \tag{11.58}$$

La ecuación (11.58) se reordena para obtener

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}(t) \\ \dot{\vec{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ [m]^{-1}\vec{F}(t) \end{Bmatrix}$$

es decir,

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{f}(\vec{X}, t) \tag{11.59}$$

donde

$$\vec{f}(\vec{X}, t) = [A]\vec{X}(t) + \underset{\sim}{\vec{F}}(t) \tag{11.60}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix} \tag{11.61}$$

y

$$\underset{\sim}{\vec{F}}(t) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ [m]^{-1}\vec{F}(t) \end{Bmatrix} \tag{11.62}$$

$$\vec{X}(t)$$

Con esto, la fórmula de recurrencia para evaluar $\vec{X}(t)$ en puntos de cuadrícula diferentes t_i de acuerdo con el método de Runge-Kutta de cuarto orden se escribe como [11.10]

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \tfrac{1}{6}[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4] \tag{11.63}$$

donde

$$\vec{K}_1 = h\vec{f}(\vec{X}_i, t_i) \tag{11.64}$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \tfrac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \tfrac{1}{2}h) \tag{11.65}$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \tfrac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \tfrac{1}{2}h) \tag{11.66}$$

$$\vec{K}_4 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+1}) \tag{11.67}$$

Ejemplo 11.5 Método de Runge-Kutta para un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta del sistema de dos grados de libertad que se vio en el ejemplo 11.3 utilizando el método de Runge-Kutta.

Solución: Use el método de Runge-Kutta con $\Delta t = 0.24216$.

Utilizando las condiciones iniciales, $\vec{x}(t = 0) = \dot{\vec{x}}(t = 0) = \vec{0}$, la ecuación (11.63) se aplica en secuencia con $\Delta t = 0.24216$ para obtener los resultados que se muestran en la tabla 11.4.

Tabla 11.4

Tiempo ($t_i = i\ \Delta t$)	$\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
t_1	$\begin{Bmatrix} 0.0014 \\ 0.1437 \end{Bmatrix}$
t_2	$\begin{Bmatrix} 0.0215 \\ 0.5418 \end{Bmatrix}$
t_3	$\begin{Bmatrix} 0.0978 \\ 1.1041 \end{Bmatrix}$
t_4	$\begin{Bmatrix} 0.2668 \\ 1.7059 \end{Bmatrix}$
t_5	$\begin{Bmatrix} 0.5379 \\ 2.2187 \end{Bmatrix}$
t_6	$\begin{Bmatrix} 0.8756 \\ 2.5401 \end{Bmatrix}$
t_7	$\begin{Bmatrix} 1.2008 \\ 2.6153 \end{Bmatrix}$
t_8	$\begin{Bmatrix} 1.4109 \\ 2.4452 \end{Bmatrix}$
t_9	$\begin{Bmatrix} 1.4156 \\ 2.0805 \end{Bmatrix}$
t_{10}	$\begin{Bmatrix} 1.1727 \\ 1.6050 \end{Bmatrix}$
t_{11}	$\begin{Bmatrix} 0.7123 \\ 1.1141 \end{Bmatrix}$
t_{12}	$\begin{Bmatrix} 0.1365 \\ 0.6948 \end{Bmatrix}$

■

11.8 Método de Houbolt

Consideraremos el método de Houbolt con referencia a un sistema de varios grados de libertad. En este método se emplean las siguientes expansiones de diferencia finita:

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{6\,\Delta t}(11\vec{x}_{i+1} - 18\vec{x}_i + 9\vec{x}_{i-1} - 2\vec{x}_{i-2}) \tag{11.68}$$

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2}(2\vec{x}_{i+1} - 5\vec{x}_i + 4\vec{x}_{i-1} - \vec{x}_{i-2}) \tag{11.69}$$

Para derivar las ecuaciones (11.68) y (11.69) consideramos la función $x(t)$. Sean los valores de x en los puntos de cuadrícula equidistantes $t_{i-2} = t_i - 2\,\Delta t$, $t_{i-1} = t_i - \Delta t$, t_i y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ los dados por x_{i-2}, x_{i-1}, x_i y x_{i+1}, respectivamente, como se muestra en la figura 11.8 [11.18]. La expansión de la serie de Taylor, con intervalo hacia atrás, presenta varias posibilidades.

- Con intervalo = Δt:

$$x(t) = x(t + \Delta t) - \Delta t\,\dot{x}(t + \Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\ddot{x}(t + \Delta t) - \frac{(\Delta t)^3}{3!}\dddot{x}(t + \Delta t)$$

o

$$x_i = x_{i+1} - \Delta t\,\dot{x}_{i+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{x}_{i+1} - \frac{(\Delta t)^3}{6}\dddot{x}_{i+1} + \cdots \tag{11.70}$$

- Con intervalo = $2\,\Delta t$:

$$x(t - \Delta t) = x(t + \Delta t) - (2\,\Delta t)\dot{x}(t + \Delta t) + \frac{(2\,\Delta t)^2}{2!}\ddot{x}(t + \Delta t) - \frac{(2\,\Delta t)^3}{3!}\dddot{x}(t + \Delta t) + \cdots$$

o

$$x_{i-1} = x_{i+1} - 2\,\Delta t\dot{x}_{i+1} + 2(\Delta t)^2\ddot{x}_{i+1} - \tfrac{4}{3}(\Delta t)^3\dddot{x}_{i+1} + \cdots \tag{11.71}$$

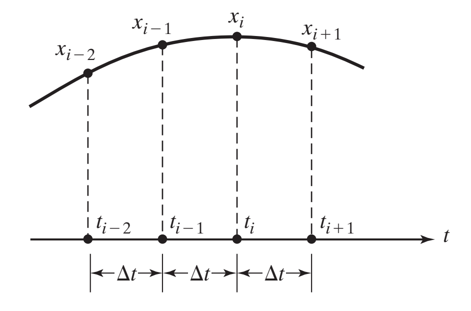


Figura 11.8 Puntos de cuadrícula equidistantes.

- Con intervalo = 3 Δt:

$$x(t - 2\,\Delta t) = x(t + \Delta t) - (3\,\Delta t)\dot{x}(t + \Delta t) + \frac{(3\,\Delta t)^2}{2!}\ddot{x}(t + \Delta t) - \frac{(3\,\Delta t)^3}{3!}\dddot{x}(t + \Delta t) + \cdots$$

o

$$x_{i-2} = x_{i+1} - 3\,\Delta t\;\dot{x}_{i+1} + \tfrac{9}{2}(\Delta t)^2\ddot{x}_{i+1} - \tfrac{9}{2}(\Delta t)^3\;\dddot{x}_{i+1} + \cdots \tag{11.72}$$

Considerando términos sólo hasta $(\Delta t)^3$, las ecuaciones (11.70) a (11.72) se resuelven para expresar $\dot{x}_{i+1}$, $\ddot{x}_{i+1}$, y $\dddot{x}_{i+1}$ en función de x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, y x_{i+1}. De este modo se obtiene $\dot{x}_{i+1}$ y $\ddot{x}_{i+1}$ como en [11.18]:

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{6(\Delta t)}(11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2}) \tag{11.73}$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2}(2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2}) \tag{11.74}$$

Las ecuaciones (11.68) y (11.69) representan la forma vectorial de estas ecuaciones.

Para hallar la solución en el intervalo $i + 1(\vec{x}_{i+1})$, consideramos la ecuación (11.18) en t_{i+1}, de modo que

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+1} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+1} + [k]\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_{i+1} \equiv \vec{F}(t = t_{i+1}) \tag{11.75}$$

Sustituyendo las ecuaciones (11.68) y (11.69) en la ecuación (11.75), obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{11}{6\,\Delta t}[c] + [k]\right)\vec{x}_{i+1} &= \vec{F}_{i+1} + \left(\frac{5}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\Delta t}[c]\right)\vec{x}_i \\ &- \left(\frac{4}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{3[c]}{2\,\Delta t}\right)\vec{x}_{i-1} + \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{[c]}{3\,\Delta t}\right)\vec{x}_{i-2}\end{aligned} \tag{11.76}$$

Observe que la ecuación de equilibrio en el tiempo t_{i+1}, ecuación (11.75), se utiliza para determinar la solución $\vec{X}_{i+1}$ por medio de la ecuación (11.76). Esto también es cierto para los métodos de Wilson y Newmark, por lo que se les llama *métodos de integración implícita.*

De la ecuación (11.76) se desprende que se requiere tener conocimiento de $\vec{x}_i$, $\vec{x}_{i-1}$, y $\vec{x}_{i-2}$ para encontrar la solución $\vec{x}_{i+1}$.. Por lo tanto se tienen que hallar los valores de $\vec{x}_{-1}$ y $\vec{x}_{-2}$ antes de tratar de encontrar el vector $\vec{x}_1$ aplicando la ecuación (11.76). Dado que no hay un método directo para hallar $\vec{x}_{-1}$ y $\vec{x}_{-2}$, no podemos utilizar la ecuación (11.76) para encontrar $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$. Esto ocasiona

que el método no sea de inicio automático. Para iniciarlo, podemos utilizar el método de diferencia central descrito en la sección 11.5 para hallar $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$. Una vez conocido $\vec{x}_0$ a partir de las condiciones iniciales dadas del problema y $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ conocidos a partir del método de diferencia central, las subsiguientes soluciones $\vec{x}_3, \vec{x}_4, \ldots$ se pueden encontrar aplicando la ecuación (11.76).

A continuación, el procedimiento paso a paso que se debe seguir en el método de Houbolt:

1. A partir de las condiciones iniciales $\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0$ y $\dot{\vec{x}}(t = 0) = \dot{\vec{x}}_0$, obtenga $\ddot{\vec{x}}_0 = \ddot{\vec{x}}(t = 0)$ utilizando la ecuación (11.26).
2. Seleccione un intervalo de tiempo Δt adecuado.
3. Determine $\vec{x}_{-1}$ aprovechando la ecuación (11.28).
4. Encuentre $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ utilizando la ecuación de diferencia central (11.29).
5. Calcule $\vec{x}_{i+1}$, comenzando con $i = 2$ y utilizando la ecuación (11.76):

$$\begin{aligned}\vec{x}_{i+1} = &\left[\frac{2}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{11}{6\,\Delta t}[c] + [k]\right]^{-1}\\ &\times\left\{\vec{F}_{i+1} + \left(\frac{5}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\Delta t}[c]\right)\vec{x}_i\right.\\ &-\left(\frac{4}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{2\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-1}\\ &\left.+\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{1}{3\,\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-2}\right\}\end{aligned} \tag{11.77}$$

Si se requiere, evalúe los vectores de velocidad y aceleración $\dot{\vec{x}}_{i+1}$ y $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$ utilizando las ecuaciones (11.68) y (11.69).

Ejemplo 11.6 Método de Houbolt para un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta del sistema de dos grados de libertad considerado en el ejemplo 11.3 siguiendo el método de Houbolt.

Solución:

Método: Use el método de Houbolt con $\Delta t = 0.24216$.

El valor de $\ddot{\vec{x}}_0$ se encuentra utilizando la ecuación (11.26):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Con un valor de $\Delta t = 0.24216$, se puede utilizar la ecuación (11.29) para obtener $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$, y en seguida se puede utilizar la ecuación (11.77) recursivamente para obtener $\vec{x}_3, \vec{x}_4, \ldots$, como se muestra en la tabla 11.5.

Tabla 11.5

Tiempo ($t_i = i\ \Delta t$)	$\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
t_1	$\begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.1466 \end{Bmatrix}$
t_2	$\begin{Bmatrix} 0.0172 \\ 0.5520 \end{Bmatrix}$
t_3	$\begin{Bmatrix} 0.0917 \\ 1.1064 \end{Bmatrix}$
t_4	$\begin{Bmatrix} 0.2501 \\ 1.6909 \end{Bmatrix}$
t_5	$\begin{Bmatrix} 0.4924 \\ 2.1941 \end{Bmatrix}$
t_6	$\begin{Bmatrix} 0.7867 \\ 2.5297 \end{Bmatrix}$
t_7	$\begin{Bmatrix} 1.0734 \\ 2.6489 \end{Bmatrix}$
t_8	$\begin{Bmatrix} 1.2803 \\ 2.5454 \end{Bmatrix}$
t_9	$\begin{Bmatrix} 1.3432 \\ 2.2525 \end{Bmatrix}$
t_{10}	$\begin{Bmatrix} 1.2258 \\ 1.8325 \end{Bmatrix}$
t_{11}	$\begin{Bmatrix} 0.9340 \\ 1.3630 \end{Bmatrix}$
t_{12}	$\begin{Bmatrix} 0.5178 \\ 0.9224 \end{Bmatrix}$

■

11.9 Método de Wilson

El método de Wilson supone que la aceleración del sistema varía linealmente entre dos instantes de tiempo. En particular, dichos instantes se consideran como se indica en la figura 11.9. Por lo tanto, se supone que la aceleración es lineal del tiempo $t_i = i\ \Delta t$ al tiempo $t_{i+\theta} = t_i + \theta\ \Delta t$, donde $\theta \geq 1.0$ [11.19], por lo que este método también se llama *método θ de Wilson*. Si $\theta = 1.0$, este método se reduce al esquema de aceleración lineal [11.20].

Un análisis de estabilidad del método de Wilson muestra que es incondicionalmente estable siempre que $\theta \geq 1.37$. En esta sección consideraremos el método de Wilson para un sistema de varios grados de libertad.

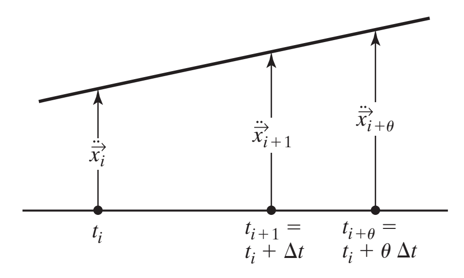


Figura 11.9 Suposición de aceleración lineal del método de Wilson.

Como se supone que $\ddot{\vec{x}}(t)$ varía linealmente entre t_i y $t_{i+\theta}$, podemos predecir el valor de $\ddot{\vec{x}}$ en cualquier instante $t_i + \tau$, $0 \le \tau \le \theta\,\Delta t$:

$$\ddot{\vec{x}}(t_i + \tau) = \ddot{\vec{x}}_i + \frac{\tau}{\theta\,\Delta t}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} - \ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.78}$$

Integrando la ecuación (11.78), obtenemos[4]

$$\dot{\vec{x}}(t_i + \tau) = \dot{\vec{x}}_i + \ddot{\vec{x}}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\,\Delta t}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} - \ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.79}$$

y

$$\vec{x}(t_i + \tau) = \vec{x}_i + \dot{\vec{x}}_i\tau + \frac{1}{2}\ddot{\vec{x}}_i\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\,\Delta t}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} - \ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.80}$$

Sustituyendo $\tau = \theta\,\Delta t$ en las ecuaciones (11.79) y (11.80), obtenemos

$$\dot{\vec{x}}_{i+\theta} = \dot{\vec{x}}(t_i + \theta\,\Delta t) = \dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta\,\Delta t}{2}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} + \ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.81}$$

$$\vec{x}_{i+\theta} = \vec{x}(t_i + \theta\,\Delta t) = \vec{x}_i + \theta\,\Delta t\,\dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta^2(\Delta t)^2}{6}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} + 2\ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.82}$$

Se resuelve la ecuación (11.82) para obtener

$$\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} = \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - \frac{6}{\theta\,\Delta t}\dot{\vec{x}}_i - 2\ddot{\vec{x}}_i \tag{11.83}$$

Sustituyendo la ecuación (11.83) en la ecuación (11.81), obtenemos

$$\dot{\vec{x}}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\,\Delta t}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - 2\dot{\vec{x}}_i - \frac{\theta\,\Delta t}{2}\ddot{\vec{x}}_i \tag{11.84}$$

[4] Se han sustituido $\dot{\vec{x}}_i$ y $\vec{x}_i$ en lugar de las constantes de integración en las ecuaciones (11.79) y (11.80), respectivamente.

Para obtener el valor de $x_{i+\theta}$, consideramos la ecuación de equilibrio (11.18) en el instante $t_{i+\theta} = t_i + \theta\,\Delta t$ y escribimos

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+\theta} + [k]\vec{x}_{i+\theta} = \underset{\sim}{F}_{i+\theta} \tag{11.85}$$

donde el vector de fuerza $\underset{\sim}{F}_{i+\theta}$ también se obtiene utilizando la suposición lineal:

$$\underset{\sim}{F}_{i+\theta} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) \tag{11.86}$$

Sustituyendo las ecuaciones (11.83), (11.84) y (11.86) para $\ddot{\vec{x}}_{i+\theta}$, $\dot{\vec{x}}_{i+\theta}$, y $\underset{\sim}{F}_{i+\theta}$, la ecuación (11.85) proporciona

$$\left\{\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\,\Delta t}[c] + [k]\right\}\vec{x}_{i+1}$$

$$= \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) + \left\{\frac{6}{\theta^2\,(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\,\Delta t}[c]\right\}\vec{x}_i$$

$$+ \left\{\frac{6}{\theta\,\Delta t}[m] + 2[c]\right\}\dot{\vec{x}}_i + \left\{2[m] + \frac{\theta\,\Delta t}{2}[c]\right\}\ddot{\vec{x}}_i \tag{11.87}$$

la cual se resuelve para $\vec{x}_{i+1}$.

El método de Wilson se puede describir por los pasos siguientes:

1. A partir de las condiciones conocidas $\vec{x}_0$ y $\dot{\vec{x}}_0$, obtenga $\ddot{\vec{x}}_0$ aplicando la ecuación (11.26).
2. Seleccione un intervalo de tiempo adecuado Δt y un valor adecuado de θ (se suele considerar a θ como 1.4).
3. Calcule el vector de carga efectivo $\underset{\approx}{F}_{i+\theta}$ comenzando con $i = 0$:

$$\underset{\approx}{\vec{F}}_{i+\theta} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) + [m]\left(\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}\vec{x}_i + \frac{6}{\theta\,\Delta t}\dot{\vec{x}}_i + 2\ddot{\vec{x}}_i\right)$$

$$+ [c]\left(\frac{3}{\theta\,\Delta t}\vec{x}_i + 2\dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta\,\Delta t}{2}\ddot{\vec{x}}_i\right) \tag{11.88}$$

4. Encuentre el vector de desplazamiento en el instante $t_{i+\theta}$:

$$\vec{x}_{i+\theta} = \left[\frac{6}{\theta^2\,(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\,\Delta t}[c] + [k]\right]^{-1}\underset{\approx}{F}_{i+\theta} \tag{11.89}$$

5. Calcule los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento en el tiempo t_{i+1}:

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{6}{\theta^3(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t}\dot{\vec{x}}_i + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right)\ddot{\vec{x}}_i \tag{11.90}$$

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\vec{x}}_{i+1} + \ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.91}$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\,\dot{\vec{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6}(\ddot{\vec{x}}_{i+1} + 2\ddot{\vec{x}}_i) \tag{11.92}$$

Ejemplo 11.7 Método de Wilson para un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta del sistema considerado en el ejemplo 11.3, siguiendo el método θ de Wilson con $\theta = 1.4$.

Solución:

Método: Use el método de Wilson con $\Delta t = 0.24216$.

El valor de $\ddot{\vec{x}}_0$ se obtiene como en el caso del ejemplo 11.3:

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Luego, utilizando las ecuaciones (11.90) a (11.92) con un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.24216$, obtenemos los resultados indicados en la tabla 11.6.

■

11.10 Método de Newmark

El método de integración también se basa en la suposición de que la aceleración varía linealmente entre dos instantes de tiempo. Las expresiones resultantes para los vectores de velocidad y desplazamiento $\dot{\vec{x}}_{i+1}$ y $\vec{x}_{i+1}$, para un sistema de varios grados de libertad [11.21], se escriben como en las ecuaciones (11.79) y (11.80):

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + [(1 - \beta)\ddot{\vec{x}}_i + \beta\ddot{\vec{x}}_{i+1}]\,\Delta t \tag{11.93}$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\,\dot{\vec{x}}_i + [(\tfrac{1}{2} - \alpha)\ddot{\vec{x}}_i + \alpha\ddot{\vec{x}}_{i+1}](\Delta t)^2 \tag{11.94}$$

Tabla 11.6

Tiempo ($t_i = i\,\Delta t$)	$\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
t_1	$\begin{Bmatrix} 0.0033 \\ 0.1392 \end{Bmatrix}$
t_2	$\begin{Bmatrix} 0.0289 \\ 0.5201 \end{Bmatrix}$
t_3	$\begin{Bmatrix} 0.1072 \\ 1.0579 \end{Bmatrix}$
t_4	$\begin{Bmatrix} 0.2649 \\ 1.6408 \end{Bmatrix}$
t_5	$\begin{Bmatrix} 0.5076 \\ 2.1529 \end{Bmatrix}$
t_6	$\begin{Bmatrix} 0.8074 \\ 2.4981 \end{Bmatrix}$
t_7	$\begin{Bmatrix} 1.1035 \\ 2.6191 \end{Bmatrix}$
t_8	$\begin{Bmatrix} 1.3158 \\ 2.5056 \end{Bmatrix}$
t_9	$\begin{Bmatrix} 1.3688 \\ 2.1929 \end{Bmatrix}$
t_{10}	$\begin{Bmatrix} 1.2183 \\ 1.7503 \end{Bmatrix}$
t_{11}	$\begin{Bmatrix} 0.8710 \\ 1.2542 \end{Bmatrix}$
t_{12}	$\begin{Bmatrix} 0.3897 \\ 0.8208 \end{Bmatrix}$

donde los parámetros α y β indican qué tanto la aceleración al final del intervalo entra en las ecuaciones de velocidad y desplazamiento al final del intervalo Δt. De hecho, α y β se pueden seleccionar para obtener las características de precisión y estabilidad deseadas [11.22]. Cuando $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{6}$, las ecuaciones (11.93) y (11.94) corresponden al método de aceleración lineal (que también se puede obtener con $\theta = 1$ en el método de Wilson). Cuando $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{4}$, las ecuaciones (11.93) y (11.94) corresponden a la suposición de aceleración constante entre t_i y t_{i+1}. Para determinar el valor de $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$, la ecuación de equilibrio (11.18) se considera en el instante $t = t_{i+1}$, de modo que

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+1} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+1} + [k]\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_{i+1} \tag{11.95}$$

La ecuación (11.94) se puede utilizar para expresar $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$ en función de $\vec{x}_{i+1}$ y la expresión resultante se puede sustituir en la ecuación (11.93) para expresar $\dot{\vec{x}}_{i+1}$ en función de $\vec{x}_{i+1}$. Sustituyendo

estas expresiones para $\dot{\vec{x}}_{i+1}$ y $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$ en la ecuación (11.95), podemos obtener una relación para encontrar $\vec{x}_{i+1}$:

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}[m] + \frac{\beta}{\alpha\,\Delta t}[c] + [k]\right]^{-1}$$

$$\times \left\{\vec{F}_{i+1} + [m]\left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}\vec{x}_i + \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\dot{\vec{x}}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\vec{x}}_i\right)\right.$$

$$+ [c]\left(\frac{\beta}{\alpha\,\Delta t}\vec{x}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\dot{\vec{x}}_i\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ddot{\vec{x}}_i\right)\right\} \tag{11.96}$$

El método de Newmark se puede resumir como sigue:

1. A partir de los valores conocidos de $\vec{x}_0$ y $\dot{\vec{x}}_0$, halle $\ddot{\vec{x}}_0$ utilizando la ecuación (11.26).
2. Seleccione valores adecuados de Δt, α y β.
3. Calcule el vector de desplazamiento $\vec{x}_{i+1}$, comenzando con $i = 0$ y utilizando la ecuación (11.96).
4. Determine los vectores de aceleración y velocidad en el tiempo t_{i+1}:

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) - \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\dot{\vec{x}}_i - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\vec{x}}_i \tag{11.97}$$

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + (1 - \beta)\,\Delta t\,\ddot{\vec{x}}_i + \beta\,\Delta t\,\ddot{\vec{x}}_{i+1} \tag{11.98}$$

Es importante observar que a menos que β se considere como $\frac{1}{2}$, hay un amortiguamiento espurio introducido, proporcional a $(\beta - \frac{1}{2})$. Si β se considera como cero, resulta un amortiguamiento negativo; esto implica una vibración autoexcitada que surge únicamente del procedimiento numérico. Asimismo, si β es mayor que $\frac{1}{2}$, se introduce un amortiguamiento positivo. Esto reduce la magnitud de la respuesta incluso sin amortiguamiento real en el problema [11.21]. El método es incondicionalmente estable para $\alpha \geq \frac{1}{4}(\beta + \frac{1}{2})^2$ y $\beta \geq \frac{1}{2}$.

Ejemplo 11.8 Método de Newmark para un sistema de dos grados de libertad

Encuentre la respuesta del sistema considerado en el ejemplo 11.3, siguiendo el método de Newmark con $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\beta = \frac{1}{2}$.

Solución:

Método: Use el método de Newmark con $\Delta t = 0.24216$.

Tabla 11.7

Tiempo ($t_i = i\, \Delta t$)	$\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
t_1	$\begin{Bmatrix} 0.0026 \\ 0.1411 \end{Bmatrix}$
t_2	$\begin{Bmatrix} 0.0246 \\ 0.5329 \end{Bmatrix}$
t_3	$\begin{Bmatrix} 0.1005 \\ 1.0884 \end{Bmatrix}$
t_4	$\begin{Bmatrix} 0.2644 \\ 1.6870 \end{Bmatrix}$
t_5	$\begin{Bmatrix} 0.5257 \\ 2.2027 \end{Bmatrix}$
t_6	$\begin{Bmatrix} 0.8530 \\ 2.5336 \end{Bmatrix}$
t_7	$\begin{Bmatrix} 1.1730 \\ 2.6229 \end{Bmatrix}$
t_8	$\begin{Bmatrix} 1.3892 \\ 2.4674 \end{Bmatrix}$
t_9	$\begin{Bmatrix} 1.4134 \\ 2.1137 \end{Bmatrix}$
t_{10}	$\begin{Bmatrix} 1.1998 \\ 1.6426 \end{Bmatrix}$
t_{11}	$\begin{Bmatrix} 0.7690 \\ 1.1485 \end{Bmatrix}$
t_{12}	$\begin{Bmatrix} 0.2111 \\ 0.7195 \end{Bmatrix}$

El valor de $\ddot{\vec{x}}_0$ se puede hallar utilizando la ecuación (11.26):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Con los valores de $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = 0.5$ y $\Delta t = 0.24216$, la ecuación (11.96) proporciona los valores de $\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$, como se muestra en la tabla 11.7.

■

11.11 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 11.9 Solución obtenida utilizando MATLAB de un sistema de un solo grado de libertad

Utilizando la función MATLAB `ode23`, resuelva el ejemplo 11.1.

Solución: Definiendo $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, la ecuación (E.1) del ejemplo 11.1 se puede expresar como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

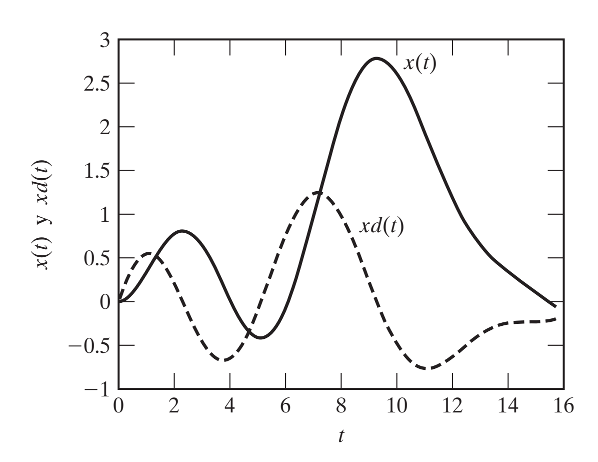
$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{E.1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left[F_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2t_0}\right) - cx_2 - kx_1\right] \tag{E.2}$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$. A continuación se presenta el programa MATLAB para resolver las ecuaciones (E.1) y (E.2).

```
% Ex11_9.m
tspan = [0: 0.1: 5*pi];
x0 = [0; 0];
[t,x] = ode23 ('dfunc11_9', tspan, x0);
plot (t,x(:,1));
xlabel ('t');
ylabel ('x(t) y xd(t)');
gtext ('x(t)');
hold on;
plot (t,x(:,2), '--');
gtext ('xd(t)')
```

```
%dfunc11_9.m
function f = dfunc11_9(t,x)
m = 1;
k = 1;
c = 0.2;
t0 = pi;
F0 = 1;
f = zeros (2,1);
f(1) = x(2);
f(2) = (F0* (1 - sin(pi*t/(2*t0))) - c*x(2) - k*x(1) )/m;
```



Ejemplo 11.10 Solución de un sistema de varios grados de libertad obtenida utilizando MATLAB

Utilizando la función MATLAB **`ode23`**, resuelva el ejemplo 11.3.

Solución: Las ecuaciones de movimiento del sistema de dos grados de libertad en la ecuación (E.1) del ejemplo 11.3 se puede expresar como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden en función de

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = \dot{x}_1, \qquad y_3 = x_2, \qquad y_4 = \dot{x}_2$$

como

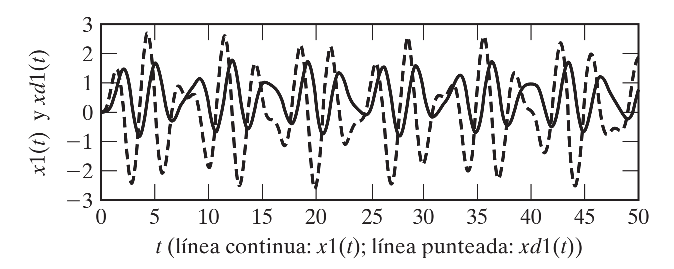
$$\dot{y}_1 = y_2 \quad \text{(E.1)}$$

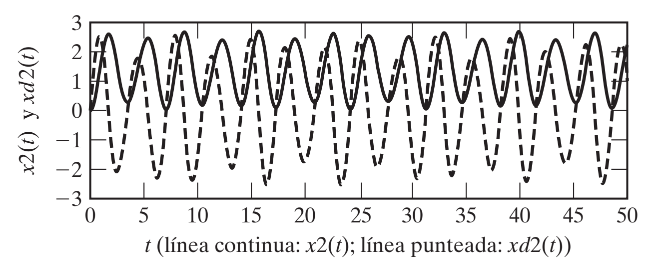
$$\dot{y}_2 = \frac{1}{m_1}\{F_1(t) - cy_2 + cy_4 - (k_1 + k)y_1 + ky_3\} = -6y_1 + y_3 \quad \text{(E.2)}$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \quad \text{(E.3)}$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{m_2}\{F_2(t) + cy_2 - cy_4 + ky_1 - (k + k_2)y_3\}$$

$$= \frac{1}{2}\{10 + 2\,y_1 - 8\,y_3\} = 5 + y_1 - 4\,y_3 \quad \text{(E.4)}$$





con las condiciones iniciales $y_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. A continuación se presenta el programa MATLAB para resolver las ecuaciones (E.1) a (E.4).

```
% Ex11_10.m
tspan = [0: 0.05: 50];
y0 = [0; 0; 0; 0];
[t,y] = ode23 ('dfunc11_10', tspan, y0);

subplot (211);
plot (t,y(:,1));
xlabel ('t (línea continua: x1 (t) Línea punteada: xd1 (t) ) ');
ylabel ('x1 (t) y xd1 (t)');
hold on;
plot (t,y(:, 2), '--');
subplot (212);
plot (t,y(:, 3));
xlabel ('t (línea continua: x2 (t) Línea punteada: xd2 (t) ) ' );
ylabel ('x2 (t) y xd2 (t)');
hold on;
plot (t,y (:,4), '--');
%dfunc11_10.m
function f = dfunc11_10 (t,y)
m1 = 1;
m2 = 2;
k1 = 4;
k2 = 6;
```

```
k = 2;
c = 0;
F1 = 0;
F2 = 10;
f = zeros (4,1);
f(1) = y(2);
f(2) = ( F1 2 c*y(2) + c*y(4) – (k1+k) *y(1) + k*y(3) )/m1;
f(3) = y(4);
f(4) = ( F2 + c*y(2) – c*y(4) + k*y(1) – (k + k2) *y(3) )/m2;
```

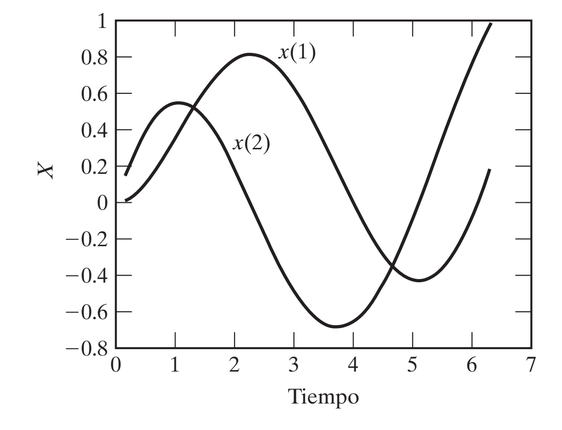
■

Ejemplo 11.11 Programa para implementar el método de Runge-Kutta de cuarto orden

Desarrolle un programa MATLAB general llamado **`Program14.m`** para resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden siguiendo el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Use el programa para resolver el ejemplo 11.2.

Solución: Se desarrolla **`Program14.m`** para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = ecuaciones diferenciales de primer orden
xx = valores iniciales $x_i(0)$, un vector de tamaño n
dt = incremento de tiempo



El programa requiere un subprograma para definir las funciones $f_i(\vec{x}, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. El programa presenta los valores de $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ a diferentes valores de tiempo t.

I	Tiempo(I)	x(1)	x(2)
1	1.570800e−001	1.186315e−002	1.479138e−001
2	3.141600e−001	4.540642e−002	2.755911e−001
3	4.712400e−001	9.725706e−002	3.806748e−001
4	6.283200e−001	1.637262e−001	4.615022e−001
5	7.854000e−001	2.409198e−001	5.171225e−001
.			
.			
.			
36	5.654880e+000	−2.868460e−001	5.040887e−001
37	5.811960e+000	−1.969950e−001	6.388500e−001
38	5.969040e+000	−8.655813e−002	7.657373e−001
39	6.126120e+000	4.301693e−002	8.821039e−001
40	6.283200e+000	1.898865e−001	9.855658e−001

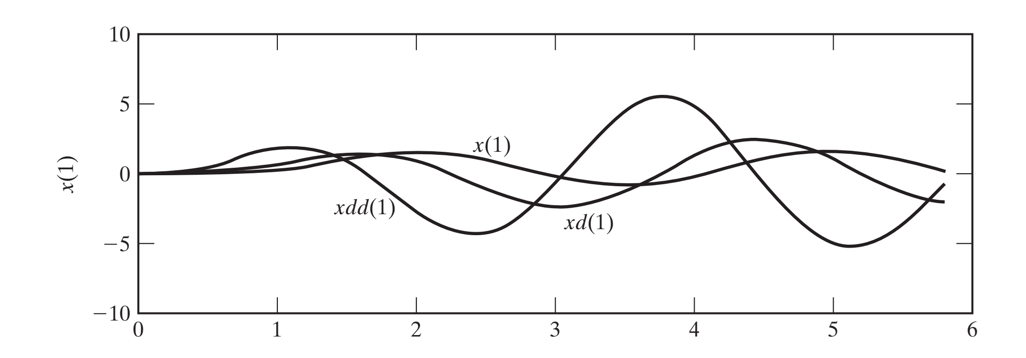
■

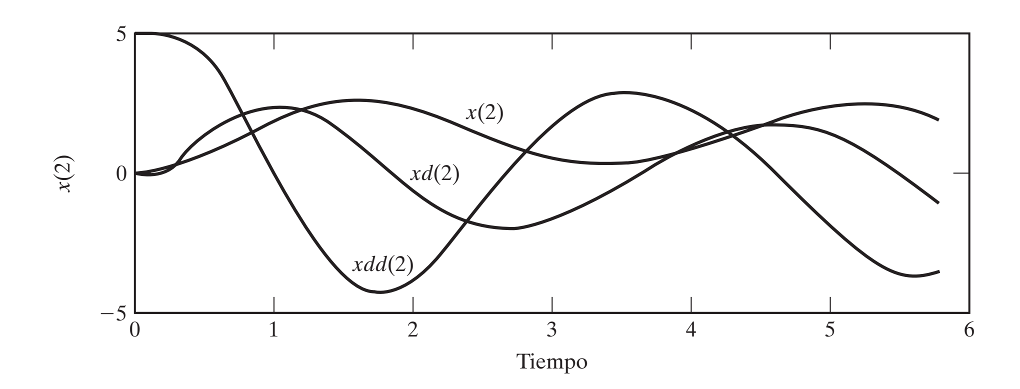
Ejemplo 11.12 Programa para el método de diferencia central

Utilizando el método de diferencia central, desarrolle un programa MATLAB general llamado **`Program15.m`** para determinar la respuesta dinámica de un sistema de varios grados de libertad. Use el programa para determinar la solución del ejemplo 11.3.

Solución: **`Program15.m`** se desarrolla para que acepte los siguientes datos de entrada:

n = grados de libertad del sistema
m = matriz de masa, de tamaño $n \times n$
c = matriz de amortiguamiento, de tamaño $n \times n$
k = matriz de rigidez, de tamaño $n \times n$
xi = valores iniciales de x_i, un vector de tamaño n
xdi = valores iniciales de $\dot{x}^i$, un vector de tamaño n
nstep (nstp) = intervalos de tiempo en los cuales se debe hallar la solución
delt = incremento entre intervalos de tiempo





El programa requiere un subprograma para definir las funciones forzadas $f_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ en cualquier instante t. Proporciona los valores de la respuesta en diferentes intervalos de tiempo i como $x_j(i)$, $\dot{x}_j(i)$ y $\ddot{x}_j(i)$, $j = 1, 2, ..., n$.

```
Solución por medio del método de diferencia central
Datos aportados:
n= 2 nstp= 24 delt=2.421627e−001
Solución:
step   time       x(i,1)        xd(i,1)       xdd(i,1)      x(i,2)        xd(i,2)       xdd(i,2)
   1   0.0000   0.0000e+000   0.0000e+000   0.0000e+000   0.0000e+000   0.0000e+000   5.0000e+000
   2   0.2422   0.0000e+000   0.0000e+000   0.0000e+000   1.4661e−001   0.0000e+000   5.0000e+000
   3   0.4843   1.7195e−002   3.5503e−002   2.9321e−001   5.5204e−001   1.1398e+000   4.4136e+000
   4   0.7265   9.3086e−002   1.9220e−001   1.0009e+000   1.1222e+000   2.0143e+000   2.8090e+000
   5   0.9687   2.6784e−001   5.1752e−001   1.6859e+000   1.7278e+000   2.4276e+000   6.0429e−001
   .
   .
   .
  21   4.8433   1.6034e+000   1.7764e+000  −4.0959e+000   2.2077e+000   1.6763e+000  −1.0350e+000
  22   5.0854   1.6083e+000   6.5025e−001  −5.2053e+000   2.4526e+000   1.2813e+000  −2.2272e+000
  23   5.3276   1.3349e+000  −5.5447e−001  −4.7444e+000   2.5098e+000   6.2384e−001  −3.2023e+000
  24   5.5697   8.8618e−001  −1.4909e+000  −2.9897e+000   2.3498e+000  −2.1242e−001  −3.7043e+000
  25   5.8119   4.0126e−001  −1.9277e+000  −6.1759e−001   1.9837e+000  −1.0863e+000  −3.5128e+000
```

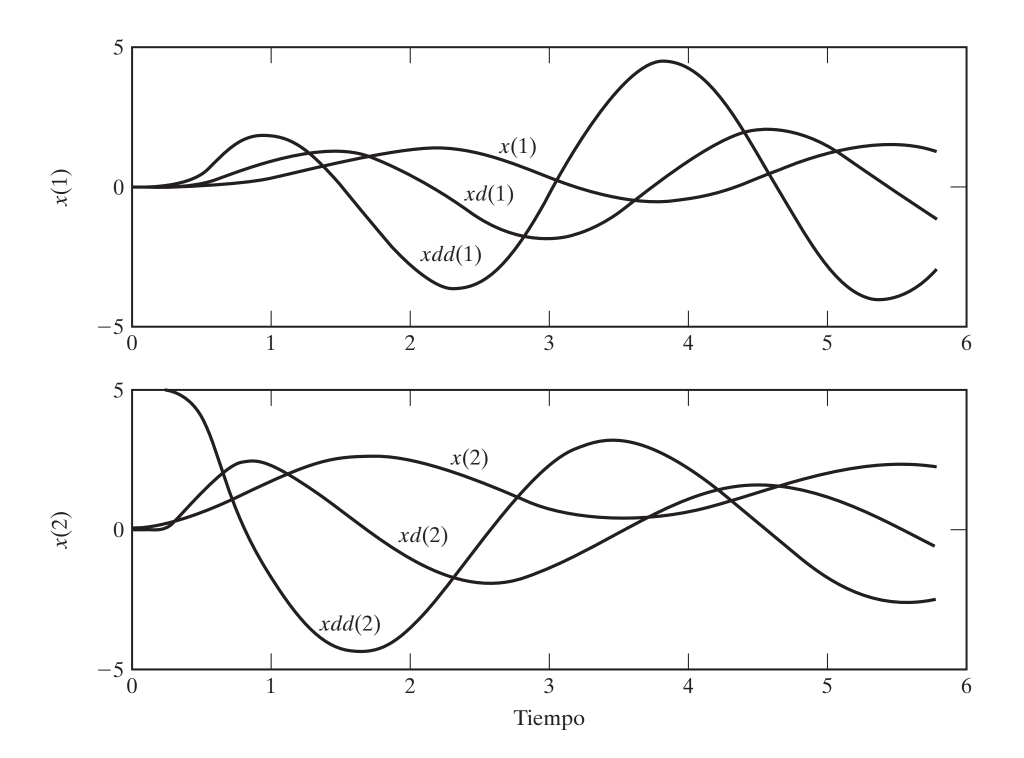
■

Ejemplo 11.13 Programa para el método de Houbolt

Utilizando el método de Houbolt, desarrolle un programa MATLAB general llamado `Program16.m` para encontrar la respuesta dinámica de un sistema de varios grados de libertad. Use el programa para hallar la solución del ejemplo 11.6.

Solución: **`Program16.m`** se desarrolla para que acepte los siguientes datos de entrada.

n = grados de libertad del sistema
m = matriz de masa, de tamaño $n \times n$



c = matriz de amortiguamiento, de tamaño $n \times n$
k = matriz de rigidez, de tamaño $n \times n$
xi = valores iniciales de x_i, un vector de tamaño n
xdi = valores iniciales de $\dot{x}_i$, un vector de tamaño n
nstep (nstp) = intervalos de tiempo en los cuales se debe hallar la solución
delt = incremento entre intervalos de tiempo

El programa requiere un subprograma para definir las funciones forzadas $f_i(t) = 1, 2, ..., n$ en cualquier instante t. Proporciona los valores de la respuesta en diferentes estaciones de tiempo i como $x_j(i)$, $\dot{x}_j(i)$, y $\ddot{x}_i(i)$, $j = 1, 2, ..., n$.

```
Solución por medio del método de Houbolt
Datos aportados:
n= 2 nstp= 24 delt=2.421627e-001
Solución:
step   time         x(i,1)        xd(i,1)       xdd(i,1)       x(i,2)        xd(i,2)       xdd(i,2)
   1   0.0000    0.0000e+000    0.0000e+000    0.0000e+000    0.0000e+000    0.0000e+000    5.0000e+000
   2   0.2422    0.0000e+000    0.0000e+000    0.0000e+000    1.4661e-001    0.0000e+000    5.0000e+000
   3   0.4843    1.7195e-002    3.5503e-002    2.9321e-001    5.5204e-001    1.1398e+000    4.4136e+000
   4   0.7265    9.1732e-002    4.8146e-001    1.6624e+000    1.1064e+000    2.4455e+000    6.6609e-001
   5   0.9687    2.5010e-001    8.6351e-001    1.8812e+000    1.6909e+000    2.3121e+000   -1.5134e+000
   .
   .
   .
  21   4.8433    8.7373e-001    1.7900e+000   -1.7158e+000    1.7633e+000    1.3850e+000   -1.1795e+000
  22   5.0854    1.2428e+000    1.1873e+000   -3.3403e+000    2.0584e+000    1.0125e+000   -1.9907e+000
  23   5.3276    1.4412e+000    3.6619e-001   -4.1553e+000    2.2460e+000    4.9549e-001   -2.5428e+000
  24   5.5697    1.4363e+000   -4.8458e-001   -4.0200e+000    2.2990e+000   -9.6748e-002   -2.7595e+000
  25   5.8119    1.2410e+000   -1.1822e+000   -3.0289e+000    2.2085e+000   -6.8133e-001   -2.5932e+000
```

■

Resumen del capítulo

Se tienen que utilizar métodos numéricos en situaciones en que las ecuaciones diferenciales que rigen la vibración libre y forzada no se pueden resolver para encontrar soluciones de forma cerrada. Presentamos el método de diferencia finita para la solución de las ecuaciones regentes de sistemas discretos y continuos. Describimos el uso de los métodos de Runge-Kutta, Houbolt, Wilson y Newmark para la solución de problemas de vibración relacionados con sistemas de varios grados de libertad. Por último, presentamos el uso de MATLAB para obtener la solución numérica de problemas de vibración.

Ahora que ya ha concluido con este capítulo, usted deberá ser capaz de contestar las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación.

Referencias

11.1 G. L. Goudreau y R. L. Taylor, "Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 2, 1973, págs.69-97.

11.2 S. W. Key, "Transient response by time integration: Review of implicit and explicit operations", en J. Donéa (ed.), *Advanced Structural Dynamics*, Applied Science Publishers, Londres, 1980.

11.3 R. E. Cornwell, R. R. Craig. Jr. y C. P. Johnson, "On the application of the mode-acceleration method to structural engineering problems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1.1, 1983, págs. 679-688.

11.4 T. Wah y L. R. Calcote, *Structural Analysis by Finite Difference Calculus*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1970.

11.5 R. Ali, "Finite difference methods in vibration analysis", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, marzo de 1993, págs. 3-7.

11.6 P. C. M. Lau, "Finite difference approximation for ordinary derivatives", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, págs. 663-678.

11.7 R. D. Krieg, "Unconditional stability in numerical time integration methods", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, 1973, págs. 417-421.

11.8 S. Levy y W. D. Kroll, "Errors introduced by finite space and time increments in dynamic response computation", *Proceedings*, *First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, 1951, págs. 1-8.

11.9 A. F. D'Souza y V. K. Garg, *Advanced Dynamics. Modeling and Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

11.10 A. Ralston y H. S. Wilf (eds.), *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, Nueva York, 1960.

11.11 S. Nakamura, *Computational Methods in Engineering and Science,* Wiley, Nueva York, 1977.

11.12 T. Belytschko, "Explicit time integration of structure-mechanical systems", en J. Donéa (ed.), *Advanced Structural Dynamics*, Applied Science Publishers, Londres, 1980, págs. 97-122.

11.13 S. Levy y J. P. D. Wilkinson, *The Component Element Method in Dynamics with Application to Earthquake and Vehicle Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York, 1976.

11.14 J. W. Leech, P. T. Hsu y E. W. Mack, "Stability of a finite-difference method for solving matrix equations", *AIAA Journal,* Vol. 3, 1965, págs. 2172-2173.

11.15 S. D. Conte y C. W. DeBoor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach* (2a. ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1972.

11.16 C. F. Gerald y P. O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis* (3a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

11.17 L. V. Atkinson y P. J. Harley, *Introduction to Numerical Methods with PASCAL*, AddisonWesley, Reading, MA, 1984.

11.18 J. C. Houbolt, "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft", *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 17, 1950, págs. 540-550, 594.

11.19 E. L. Wilson, I. Farhoomand y K. J. Bathe, "Nonlinear dynamic analysis of complex structures", *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* Vol. 1, 1973, págs. 241-252.

11.20 S. P. Timoshenko, D. H. Young y W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 1974.

11.21 N. M. Newmark, "A method of computation for structural dynamics", *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, 1959, págs. 67-94.

11.22 T. J. R. Hughes, "A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1976, págs. 383-386.

Preguntas de repaso

11.1 Responda brevemente lo siguiente:

1. Describa el procedimiento del método de diferencia finita.
2. Utilizando la expansión de la serie de Taylor, derive las fórmulas de diferencia central para la primera y segunda derivadas de una función.
3. ¿Qué es un método condicionalmente estable?
4. ¿Cuál es la diferencia principal entre el método de diferencia central y el método de Runge-Kutta?
5. ¿Por qué es necesario introducir puntos de malla ficticios en el método de diferencia finita de solución?
6. Defina una matriz de tres diagonales.
7. ¿Cuál es la suposición básica del método de Wilson?
8. ¿Qué es un método de aceleración lineal?
9. ¿Cuál es la diferencia entre métodos de integración explícitos e implícitos?
10. ¿Podemos utilizar los métodos de integración numérica abordados en este capítulo para resolver problemas de vibración no lineal?

11.2 Indique si cada uno los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Se requiere que los puntos de cuadrícula estén separados de manera uniforme.
2. El método de Runge-Kutta es estable.
3. El método de Runge-Kutta es de inicio automático.
4. El método de diferencia finita es un método de integración implícita.
5. El método de Newmark es un método de integración implícita.
6. Para una viga con puntos de cuadrícula $-1, 1, 2, 3, \ldots$, la equivalencia de diferencia central de la condición $\left.\frac{dW}{dx}\right|_1 = 0$ es $W_{-1} = W_2$.
7. Para una viga con puntos de cuadrícula $-1, 1, 2, 3, \ldots$, la aproximación de diferencia central de una condición simplemente apoyada en puntos de cuadrícula está dada por $W_{-1} = W_2$.
8. Para una viga con puntos de cuadrícula $-1, 1, 2, 3, \ldots$, la aproximación de diferencia central de $\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_1 = 0$ produce $W_2 - 2W_1 + W_{-1} = 0$.

11.3 Escriba en los espacios en blanco la palabra correcta:

1. Se tienen que utilizar métodos numéricos cuando las ecuaciones de movimiento no se pueden resolver en forma ________.
2. En métodos de diferencia finita, se utilizan aproximaciones para _______.
3. Las ecuaciones de diferencia finita se pueden derivar utilizando métodos _______ diferentes.
4. En métodos de diferencia finita, el dominio de la solución tiene que ser reemplazado por puntos ________.
5. Las aproximaciones de diferencia finita están basadas en la expansión de la serie de __________.
6. Se dice que los métodos numéricos que requieren el uso de un intervalo de tiempo (Δt) menor que un valor crítico (Δt_{cri}) son __________ estables.
7. En un método condicionalmente estable, el uso de Δt mayor que Δt_{cri} hace al método _________.
8. Una fórmula _______ permite calcular x_i a partir de los valores conocidos de x_{i+1}.

11.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones dadas:

1. La aproximación de diferencia central de dx/dt en t_i es

a. $\frac{1}{2h}(x_{i+1} - x_i)$ **b.** $\frac{1}{2h}(x_i - x_{i-1})$ **c.** $\frac{1}{2h}(x_{i+1} - x_{i-1})$

2. La aproximación de diferencia central de d^2x/dt^2 en t_i es

a. $\frac{1}{h^2}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$ **b.** $\frac{1}{h^2}(x_{i+1} - x_{i-1})$ **c.** $\frac{1}{h^2}(x_i - x_{i-1})$

3. Un método de integración en el cual el cálculo de x_{i+1} está basado en la ecuación de equilibrio t_i se conoce como

a. método explícito **b.** método implícito **c.** método regular

4. En un método de inicio no automático tenemos que generar el valor de la siguiente cantidad por medio de aproximaciones de diferencia finita de $\dot{x}_i$ y $\ddot{x}_i$:

a. $\dot{x}_{-1}$ **b.** $\ddot{x}_{-1}$ **c.** x_{-1}

5. Los métodos de Runge-Kutta determinan las aproximaciones de

a. ecuaciones algebraicas **b.** ecuaciones diferenciales **c.** ecuaciones matriciales

6. La aproximación de diferencia finita de $d^2U/dx^2 + \alpha^2U = 0$ en x_i está dada por

a. $U_{i+1} - (2 - h^2\alpha^2)U_i + U_{i-1} = 0$
b. $U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1} = 0$
c. $U_{i+1} - (2 - \alpha^2)U_i + U_{i-1} = 0$

7. El método de diferencia finita requiere el uso de aproximaciones de diferencia finita en
a. sólo la ecuación diferencial regente
b. sólo condiciones límite
c. la ecuación diferencial regente y también en condiciones límite

8. Si una barra sometida a vibración longitudinal está fija en el nodo 1, la fórmula de diferencia directa proporciona
a. $U_1 = 0$ **b.** $U_1 = U_2$ **c.** $U_1 = U_{-1}$

9. Si una barra sometida a vibración longitudinal está fija en el nodo 1, la fórmula de diferencia directa proporciona
a. $U_1 = 0$ **b.** $U_1 = U_2$ **c.** $U_1 = U_{-1}$

10. La aproximación de diferencia central de $d^4W/dx^4 - \beta^4 W = 0$ en el punto de cuadrícula i con intervalo de tiempo h es

a. $W_{i+2} - 4W_{i+1} + (6 - h^4\beta^4)W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2} = 0$

b. $W_{i+2} - 6W_{i+1} + (6 - h^4\beta^4)W_i - 6W_{i-1} + W_{i-2} = 0$

c. $W_{i+3} - 4W_{i+1} + (6 - h^4\beta^4)W_i - 4W_{i-1} + W_{i-3} = 0$

11.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes:

1. Método de Houbolt	**a.** Asume que la aceleración varía linealmente entre t_i y $t_i + \theta\,\Delta t$; $\theta \geq 1$.
2. Método de Wilson	**b.** Asume que la aceleración varía linealmente entre t_i y $t_i + 1$; puede conducir a amortiguamiento negativo.
3. Método de Newmark	**c.** Basado en la solución de un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden.
4. Método de Runge-Kutta	**d.** El mismo que el método Wilson con $\theta = 1$.
5. Método de diferencia finita	**e.** Utiliza expresiones de diferencia finita para $\dot{x}_{i+1}$ y $\ddot{x}_{i+1}$ en función de x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, y x_{i+1}.
6. Método de aceleración lineal	**f.** Condicionalmente estable.

Problemas

Sección 11.2 Método de diferencia finita

11.1 Las fórmulas de diferencia directa utilizan los valores de la función a la derecha del punto de cuadrícula base. Por lo tanto la primera derivada en el punto $i(t = t_i)$ se define como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$$

Derive las fórmulas de diferencia directa para $(d^2x)/(dt^2)$, $(d^3x)/(dt^3)$ y $(d^4x)/dt^4)$ en el tiempo t_i.

11.2 Las fórmulas de diferencia inversa utilizan los valores de la función a la izquierda del punto de la cuadrícula base. Por consiguiente, la primera derivada en el punto $i(t = t_i)$ se define como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$$

Derive las fórmulas de diferencia inversa para $(d^2x)/(dt^2)$, $(d^3x)/(dt^3)$ y $(d^4x)/dt^4)$ en el tiempo t_i.

11.3 Derive la fórmula para la cuarta derivada $(d^4x)/(dt^4)$, de acuerdo con el método de diferencia central.

Sección 11.3 Método de diferencia central para sistemas de un solo grado de libertad

11.4 Encuentre la respuesta vibratoria libre de un sistema de un solo grado de libertad no amortiguado, con $m = 1$ y $k = 1$, por medio del método de diferencia central. Suponga $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 1$. Compare los resultados obtenidos con $\Delta t = 1$ y $\Delta t = 0.5$ con la solución exacta $x(t) = \text{sen}\ t$.

11.5 Integre la ecuación diferencial

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 0.1x = 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq t \leq 10$$

utilizando la fórmula de diferencia inversa con $\Delta t = 1$. Suponga las condiciones iniciales como $x_0 = 1$ y $\dot{x}_0 = 0$.

11.6 Encuentre la respuesta de vibración libre de un sistema de un solo grado de libertad viscosamente amortiguado con $m = k = c = 1$, por medio del método de diferencia central. Suponga que $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$ y $\Delta t = 0.5$.

11.7 Resuelva el problema 11.6 cambiando c a 2.

11.8 Resuelva el problema 11.6 considerando el valor de c como 4.

11.9 Encuentre la solución de la ecuación $4\ddot{x} + 2\dot{x} + 3000x = F(t)$, donde $F(\ \ t)$ es como se muestra en la figura 11.10 para la duración $0 \leq t \leq 1$. Suponga que $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ y $\Delta t = 0.05$.

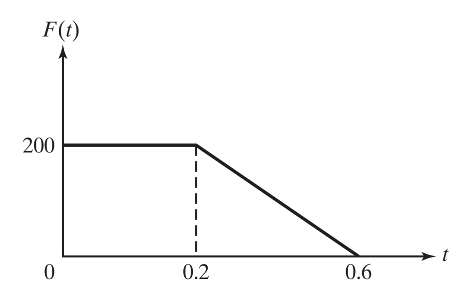


Figura 11.10

11.10 Encuentre la solución de un sistema de resorte-masa-amortiguador regido por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \delta F.\ t$ con $m = c = k = 1$ y $\delta F = 1$. Suponga que los valores iniciales de x y $\dot{x}$ son cero y $\Delta t = 0.5$.Compare la solución de diferencia central con la solución exacta dada en el ejemplo 4.9.

Sección 11.4 Método de Runge-Kutta para sistemas de un solo grado de libertad

11.11 Exprese la siguiente ecuación diferencial de orden *enésimo* como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} = g(x, t)$$

11.12 Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $\Delta t = 0.1$:

$$\dot{x} = x - 1.5e^{-0.5t};\ x_0 = 1$$
$$\dot{x} = -tx^2;\ x_0 = 1.$$

11.13 La fórmula de Runge-Kutta de segundo orden está dada por

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \tfrac{1}{2}(\vec{K}_1 + \vec{K}_2)$$

donde

$$\vec{K}_1 = h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i) \qquad \text{y} \qquad \vec{K}_2 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \vec{K}_1, t_i + h)$$

Utilizando esta fórmula, resuelva el problema considerado en el ejemplo 11.2.

11.14 La fórmula de Runge-Kutta de tercer orden está dada por

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \tfrac{1}{6}(\vec{K}_1 + 4\vec{K}_2 + \vec{K}_3)$$

donde

$$\vec{K}_1 = h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i)$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{F}(\vec{X}_i + \tfrac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \tfrac{1}{2}h)$$

y

$$\vec{K}_3 = h\vec{F}(\vec{X}_i - \vec{K}_1 + 2\vec{K}_2, t_i + h)$$

Utilizando esta fórmula, resuelva el problema considerado en el ejemplo 11.2

11.15 Utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden, resuelva la ecuación diferencial $\ddot{x} + 1000x = 0$ con las condiciones iniciales $x_0 = 5$ y $\dot{x}_0 = 0$. Use $\Delta t = 0.01$.

11.16 Utilizando el método de Runge-Kutta de tercer orden, resuelva el problema 11.15.

11.17 Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, resuelva el problema 11.15.

Sección 11.5 Método de diferencia central para sistemas de varios grados de libertad

11.18 Utilizando el método de diferencia central, determine la respuesta del sistema de dos grados de libertad que se muestra en la figura 11.2 cuando $c = 2$, $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 10$.

11.19 Utilizando el método de diferencia central, determine la respuesta del sistema que se muestra en la figura 11.2 cuando $F_1(t) = 10$ sen $5t$ y $F_2(t) = 0$.

11.20 Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad están dadas por $2\ddot{x}_1 + 6x_1 - 2x_2 = 5$ y $\ddot{x}_2 - 2x_1 + 4x_2 = 20$ sen $5t$. Suponiendo las condiciones iniciales como $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, encuentre la respuesta del sistema, por medio del método de diferencia central con $\Delta t = 0.25$.

Sección 11.6 Método de diferencia finita para sistemas continuos

11.21 Los extremos de una viga están restringidos elásticamente por resortes lineales y torsionales, como se muestra en la figura 11.11. Por medio del método de diferencia finita, exprese las condiciones límite.

11.22 Utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden, resuelva el problema 11.20.

11.23 Encuentre las frecuencias naturales de una barra con ambos extremos empotrados sometida a vibración longitudinal, utilizando tres puntos de malla en el rango $0 < x < l$.

11.24 Derive las ecuaciones de diferencia finita que rigen la vibración longitudinal forzada de una barra uniforme con un extremo fijo y el otro libre, utilizando un total de n puntos de malla. Encuentre las frecuencias naturales de la barra, utilizando $n = 4$.

11.25 Derive las ecuaciones de diferencia finita para la vibración forzada de una flecha uniforme con ambos extremos fijos sometida a torsión, utilizando un total de n puntos de malla.

11.26 Encuentre las primeras tres frecuencias naturales de una viga uniforme con ambos extremos fijos.

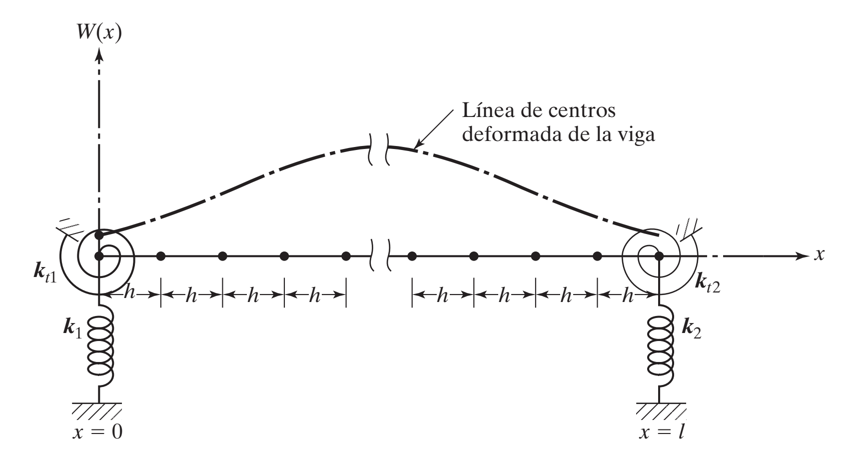


Figura 11.11

11.27 Derive las ecuaciones de diferencia finita para la vibración forzada de una viga en voladizo sometida a una fuerza transversal $f(x,t) = f_0 \cos \omega t$ en el extremo libre.

11.28 Derive las ecuaciones de diferencia finita para el análisis de vibración forzada de una membrana rectangular, utilizando m y n puntos de malla en las direcciones x y y, respectivamente. Suponga que la membrana está fija a lo largo de todos sus bordes. Use la fórmula de diferencia central.

Secciones 11.7, 11.11 Método de Runge-Kutta para sistemas de varios grados de libertad y ejemplos resueltos utilizando MATLAB

11.29 Utilizando **`Program14.m`** (método de Runge-Kutta de cuarto orden), resuelva el problema 11.18 con $c = 1$.

11.30 Utilizando **`Program14.m`** (método de Runge-Kutta de cuarto orden), resuelva el problema 11.19.

11.31 Utilizando **`Program15.m`** (método de diferencia central), resuelva el problema 11.20.

Secciones 11.8, 11.11 Método de Houbolt, y ejemplos resueltos utilizando MATLAB

11.32 Utilizando **`Program15.m`** (método de diferencia central), resuelva el problema 11.18 con $c = 1$.

11.33 Utilizando **`Program15.m`** (método de Houbolt), resuelva el problema 11.19.

11.34 Utilizando **`Program16.m`** (método de Houbolt), resuelva el problema 11.20.

Sección 11.9 Método de Wilson

11.35 Utilizando el método de Wilson con $\theta = 1.4$, resuelva el problema 11.18.

11.36 Utilizando el método de Wilson con $\theta = 1.4$, resuelva el problema 11.19.

11.37 Utilizando el método de Wilson con $\theta = 1.4$, resuelva el problema 11.20.

Sección 11.10 Método de Newmark

11.38 Utilizando el método de Newmark con $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, resuelva el problema 11.18.

11.39 Utilizando el método de Newmark con $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, resuelva el problema 11.19.

11.40 Utilizando el método de Newmark con $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, resuelva el problema 11.20.

Sección 11.11 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

11.41 Utilizando la función `ode 23` de MATLAB, resuelva la ecuación diferencial $5\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 6 \operatorname{sen} t$ con $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

11.42 Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos grados de libertad están dadas por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde $F_1(t)$ indica un pulso rectangular de magnitud 5 que actúa en el rango $0 \le t \le 2$. Encuentre la solución utilizando MATLAB.

11.43 Encuentre numéricamente la respuesta de un péndulo simple resolviendo la ecuación linealizada:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

con $\frac{g}{l} = 0.01$ y trace la respuesta, $\theta(t)$, en el rango $0 \le t \le 150$. Suponga las condiciones iniciales como $\theta(t = 0) = \theta_0 = 1$ rad y $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0 = 1.5$ rad/s. Use la función `ode23` de MATLAB para obtener la solución numérica.

11.44 Encuentre numéricamente la respuesta de un péndulo simple resolviendo la ecuación exacta:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0$$

con $\frac{g}{l} = 0.01$ y trace la respuesta, $\theta(t)$, en el rango $0 \le t \le 150$. Suponga las condiciones iniciales como $\theta(t = 0) = \theta_0 = 1$ rad y $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0 = 1.5$ rad/s. Use la función `ode23` de MATLAB para obtener la solución numérica.

11.45 Encuentre numéricamente la respuesta de un péndulo simple resolviendo la ecuación no lineal:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

con $\frac{g}{l} = 0.01$ y trace la respuesta, $\theta(t)$, en el rango $0 \le t \le 150$. Suponga las condiciones iniciales como $\theta(t = 0) = \theta_0 = 1$ rad y $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0 = 1.5$ rad/s. Use la función `ode23` de MATLAB para obtener la solución numérica.

11.46 Escriba una subrutina **`WILSON`** para implementar el método Wilson. Use este programa para hallar la solución del ejemplo 11.7.

11.47 Escriba una subrutina **`NUMARK`** para implementar el método Newmark. Use esta subrutina para determinar la solución del ejemplo 11.8.

CAPÍTULO 12

Método de los elementos finitos

Aurel Boreslav Stodola
(1859-1942)

Ingeniero suizo que en 1892 se unió al Instituto Federal Suizo de Tecnología en Zurich para ocupar la cátedra de maquinaria térmica. Trabajó en varias áreas, entre ellas las de diseño de maquinaria, controles automáticos, termodinámica, dinámica de rotores y turbinas de vapor. Publicó a fines del siglo XX uno de los libros más sobreslientes, *Die Dampfturbin*, el cual se tradujo a muchos idiomas. Esta obra aborda no sólo temas de termodinámica implicados en el diseño de turbinas, sino también trata del flujo de fluidos, vibración, análisis de esfuerzo de placas y cilindros metálicos huecos. Al método aproximado que presentó para calcular frecuencias naturales de vigas se le conoce como método de Stodola. (Fotografía cortesía de *Applied Mechanics Reviews*).

Esquema del capítulo

El método de los elementos finitos es un método numérico que se puede utilizar para obtener la solución precisa (pero aproximada) de muchos problemas de vibración complejos. Se derivan las matrices de masa y rigidez y los vectores de fuerza necesarios para el análisis de elementos finitos básicos unidimensionales como una barra en movimiento axial, una varilla en movimiento torsional y una viga en movimiento de flexión. Para el análisis de problemas que implican elementos unidimensionales en geometrías de dos y tres dimensiones (armaduras y bastidores o marcos), las matrices de elementos se tienen que transformar en un espacio relevante de mayores dimensiones. Se explican los detalles de transformación de matrices y vectores de elementos y el uso de las matrices y vectores resultantes al formular las ecuaciones de movimiento de elemento finito para sistemas complejos. También se aborda la incorporación de las condiciones límite al sistema ensamblado de matrices y ecuaciones. Se presentan ejemplos para ilustrar el método de los elementos finitos para determinar las frecuencias naturales de vibración de barras y vigas, así como el análisis de esfuerzo de una armadura de dos dimensiones. Se describe con ejemplos ilustrativos el uso de matrices de masa consistente y de masa concentrada en el análisis de elementos finitos. Por último, se proporcionan programas MATBLAB para determinar los desplazamientos nodales bajo cargas axiales especificadas, las frecuencias naturales de vibración de una barra escalonada y el análisis de valor eigen de una viga escalonada.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, usted deberá ser capaz de realizar lo siguiente:

- Identificar las matrices de rigidez y masa para la solución de diferentes tipos de problemas de vibración.
- Transformar las matrices de elementos desde un sistema de coordenadas locales hasta el sistema de coordenadas globales.
- Ensamblar las matrices de elementos y aplicar las condiciones límite.
- Realizar el análisis estático de problemas que implican barras, varillas y vigas.
- Efectuar el análisis dinámico de problemas que implican elementos de barras, varillas y vigas para hallar frecuencias naturales y modos.
- Utilizar matrices de masa consistente y masa concentrada en el análisis de vibración de elementos finitos.
- Utilizar MATLAB para resolver problemas de vibración por medio del análisis de elementos finitos.

12.1 Introducción

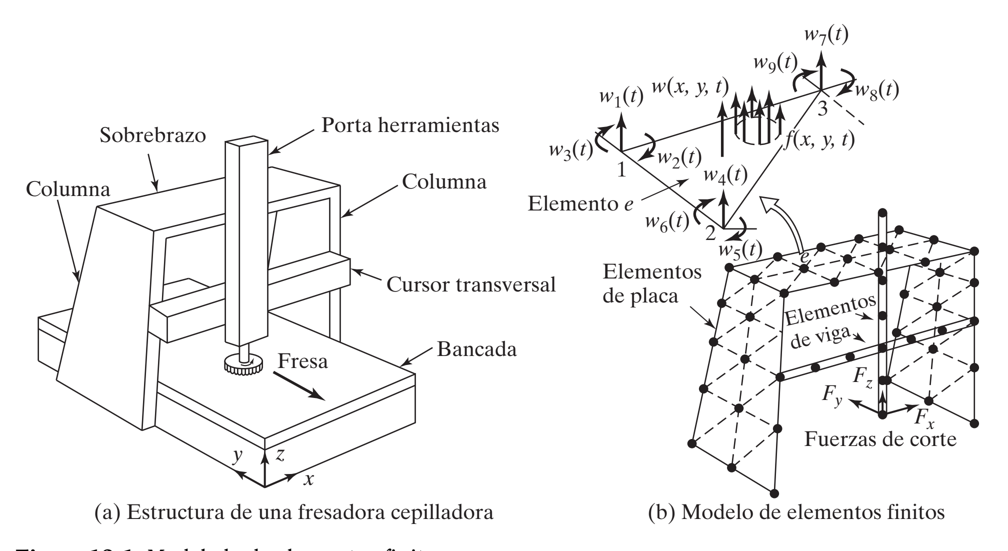
El método de los elementos finitos es un método numérico que se puede utilizar para la solución precisa de problemas de vibración estructural y mecánicos complejos [12.1, 12.2]. En este método, a la estructura original la reemplazan varias piezas o elementos, de los cuales se supone que se comportan como un miembro estructural continuo llamado *elemento finito*. Se supone que los elementos están interconectados en ciertos puntos llamados *juntas* o *nodos*. Como es muy difícil determinar la solución exacta (como en los desplazamientos) de la estructura original bajo las cargas especificadas, se supone una solución aproximada conveniente en cada elemento finito. La idea es que si las soluciones de los diversos elementos se seleccionan adecuadamente, se puede hacer

que converjan en la solución exacta de la estructura total a medida que el tamaño del elemento se reduce. Durante el proceso de solución, el equilibrio de fuerzas en las juntas y la compatibilidad de los desplazamientos entre los elementos se satisfacen, de modo que toda la estructura (ensamblaje de los elementos) se comporte como una sola entidad.

En este capítulo se presenta el procedimiento básico del método de los elementos finitos, junto con su aplicación a problemas de vibración simple. Se derivan las matrices de elementos, rigidez y masa, así como los vectores de fuerza para un elemento de barra, un elemento de torsión y un elemento de viga. Se presenta la transformación de las matrices de elementos y vectores del sistema de coordenadas local al global. Se analizan las ecuaciones de movimiento del sistema completo de elementos finitos y la incorporación de condiciones límite. Se presentan los conceptos de matrices de masa consistente y de masa concentrada junto con un ejemplo numérico. Por último, se presenta un programa de computadora para el análisis de valor eigen de vigas escalonadas. Aunque las técnicas presentadas en este capítulo se pueden aplicar a problemas más complejos que implican elementos finitos de dos y tres dimensiones, sólo se considera el uso de elementos de una dimensión en el tratamiento numérico.

12.2 Ecuaciones de movimiento de un elemento

A manera de ilustración, en la figura 12.1(b) se muestra el modelo de elementos finitos de la estructura de una fresadora cepilladora (figura 12.1(a)). En este modelo, las columnas y el sobrebrazo están representados por elementos de placa triangulares y el cursor transversal y el portaherramientas están representados por elementos de viga [12.3]. Se supone que los elementos están conectados entre sí sólo en las juntas. El desplazamiento dentro de un elemento se expresa en función de los desplazamientos en las esquinas o juntas del elemento. En la figura 12.1(b) se supone que el desplazamiento transversal dentro de un elemento típico e es $w(x, y, t)$. Los valores de w, $(\partial w/\partial x)$ y $(\partial w/\partial y)$ en las juntas 1, 2 y 3, es decir, $w(x_1, y_1, t)$, $(\partial w)/(\partial x)(x_1, y_1, t)$, $(\partial w)/(\partial y)(x_1, y_1, t)$, ..., $(\partial w)/(\partial y)$ (x_3, y_3, t), se tratan como incógnitas y se indican como $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, ..., $w_9(t)$. El desplazamiento



(a) Estructura de una fresadora cepilladora

(b) Modelo de elementos finitos

Figura 12.1 Modelado de elementos finitos.

$w(x, y, t)$ se puede expresar en función de los desplazamientos de las juntas desconocidos $w_i(t)$ en la forma

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x, y)\, w_i(t) \tag{12.1}$$

donde $N_i(x, y)$ se conoce como *función de forma* correspondiente a los desplazamientos en las juntas $w_i(t)$ y n es la cantidad de desplazamientos desconocidos en las juntas ($n = 9$ en la figura 12.1(b)). Si en el elemento actúa una carga distribuida $f(x, y, t)$, se puede convertir en fuerzas equivalentes que actúan en las juntas $f_i(t)$ ($i = 1, 2,...,9$). Si en las juntas actúan fuerzas concentradas, también se pueden sumar a la fuerza apropiada que actúa en la junta $f_i(t)$. Ahora derivaremos las ecuaciones de movimiento para determinar los desplazamientos en las juntas $w_i(t)$ bajo la acción de las fuerzas prescritas en las juntas $f_i(t)$. Utilizando la ecuación (12.1), la energía cinética T y la energía de deformación V del elemento se pueden expresar como

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{W}}^T [m] \dot{\vec{W}} \tag{12.2}$$

$$V = \frac{1}{2}\vec{W}^T [k] \vec{W} \tag{12.3}$$

donde

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{w}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dw_n/dt \end{Bmatrix}$$

y $[m]$ y $[k]$son las matrices de masa y rigidez del elemento. Sustituyendo las ecuaciones (12.2) y (12.3) en las ecuaciones de Lagrange, ecuación (6.44), las ecuaciones de movimiento del elemento finito se obtienen como

$$[m]\ddot{\vec{W}} + [k]\vec{W} = \vec{f} \tag{12.4}$$

donde $\vec{f}$ es el vector de las fuerzas que actúan en las juntas y $\ddot{\vec{W}}$ es el vector de las aceleraciones en las juntas dado por

$$\ddot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{w}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d^2w_1/dt^2 \\ d^2w_2/dt^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d^2w_n/dt^2 \end{Bmatrix}$$

Observe que la forma de los elementos finitos y el número de desplazamientos en las juntas desconocidos pueden diferir según la aplicación. Aunque las ecuaciones de movimiento de un solo elemento, ecuación (12.4), no son útiles de forma directa (ya que nuestro interés radica en la respuesta

dinámica del ensamblaje de elementos), la matriz de masa $[m]$, la matriz de rigidez $[k]$ y el vector de las fuerzas que actúan en la junta $\vec{f}$ de los elementos individuales se requieren para la solución final. En la siguiente sección derivaremos las matrices de rigidez y masa de los elementos y los vectores de las fuerzas que actúan en las juntas para algunos elementos unidimensionales simples.

12.3 Matriz de masa, matriz de rigidez y vector de fuerza

12.3.1 Elemento de una barra

Considere el elemento de la barra uniforme que se muestra en la figura 12.2. Para este elemento unidimensional, los dos puntos extremos forman las juntas (nodos). Cuando el elemento se somete a las cargas axiales $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se supone que el desplazamiento axial dentro del elemento es lineal en x como

$$u(x,t) = a(t) + b(t)x \tag{12.5}$$

Cuando los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se tratan como incógnitas, la ecuación (12.5) deberá satisfacer las condiciones

$$u(0,t) = u_1(t), \qquad u(l,t) = u_2(t) \tag{12.6}$$

Las ecuaciones (12.5) y (12.6) conducen a

$$a(t) = u_1(t)$$

y

$$a(t) + b(t)l = u_2(t) \qquad \text{o} \qquad b(t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l} \tag{12.7}$$

La sustitución de $a(t)$ y $b(t)$ de la ecuación (12.7) en la ecuación (12.5) resulta

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1(t) + \frac{x}{l}u_2(t) \tag{12.8}$$

o

$$u(x,t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) \tag{12.9}$$

donde

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right), \qquad N_2(x) = \frac{x}{l} \tag{12.10}$$

son las funciones de forma.

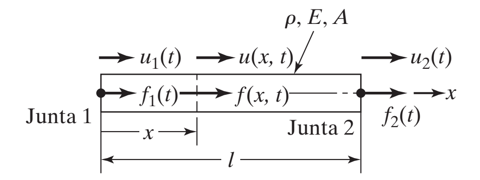


Figura 12.2 Elemento de una barra uniforme.

La energía cinética del elemento de la barra se expresa como

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{du_1(t)}{dt} + \left(\frac{x}{l}\right)\frac{du_2(t)}{dt} \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\rho A l}{3}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1\dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) \end{aligned} \tag{12.11}$$

donde

$$\dot{u}_1 = \frac{du_1(t)}{dt}, \qquad \dot{u}_2 = \frac{du_2(t)}{dt}$$

ρ es la densidad del material y A es el área de sección transversal del elemento.

Expresando la ecuación (12.11) en forma matricial,

$$T(t) = \frac{1}{2}\dot{\vec{u}}(t)^T[m]\dot{\vec{u}}(t) \tag{12.12}$$

donde

$$\dot{\vec{u}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}$$

y el superíndice T indica la traspuesta, la matriz de masa $[m]$ se puede identificar como

$$[m] = \frac{\rho A l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.13}$$

La energía de deformación del elemento se escribe como

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2}\int_0^l EA \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l EA \left\{ -\frac{1}{l}u_1(t) + \frac{1}{l}u_2(t) \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \end{aligned} \tag{12.14}$$

donde $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ y E es el módulo de Young. Expresando la ecuación (12.14) en forma matricial como

$$V(t) = \frac{1}{2}\vec{u}(t)^T[k]\vec{u}(t) \tag{12.15}$$

donde

$$\vec{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{u}(t)^T = \{u_1(t) u_2(t)\}$$

la matriz de rigidez $[k]$ se puede identificar como

$$[k] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.16}$$

El vector de fuerzas

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

se puede derivar a partir de la expresión de trabajo virtual. Si la barra se somete a la fuerza distribuida $f(x,t)$, el trabajo virtual δW se expresa como

$$\begin{aligned} \delta W(t) &= \int_0^l f(x,t)\,\delta u(x,t)\,dx \\ &= \int_0^l f(x,t)\left\{\left(1-\frac{x}{l}\right)\delta u_1(t) + \left(\frac{x}{l}\right)\delta u_2(t)\right\}dx \\ &= \left(\int_0^l f(x,t)\left(1-\frac{x}{l}\right)dx\right)\delta u_1(t) \\ &\quad + \left(\int_0^l f(x,t)\left(\frac{x}{l}\right)dx\right)\delta u_2(t) \end{aligned} \tag{12.17}$$

Expresando la ecuación (12.17) en forma matricial como

$$\delta W(t) = \delta\vec{u}(t)^T \vec{f}(t) \equiv f_1(t)\,\delta u_1(t) + f_2(t)\,\delta u_2(t) \tag{12.18}$$

las fuerzas equivalentes en las juntas se pueden identificar como

$$\left.\begin{aligned} f_1(t) &= \int_0^l f(x,t)\left(1-\frac{x}{l}\right)dx \\ f_2(t) &= \int_0^l f(x,t)\left(\frac{x}{l}\right)dx \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

12.3.2 Elemento de torsión

Considere un elemento de torsión uniforme con el eje x a lo largo del eje centroidal, como se muestra en la figura 12.3. Sea I_p el momento polar de inercia con respecto al eje centroidal y GJ la rigidez torsional ($J = I_p$ para una sección transversal circular). Cuando se supone que el desplazamiento torsional (rotación) dentro del elemento es lineal en x como

$$\theta(x,t) = a(t) + b(t)x \tag{12.20}$$

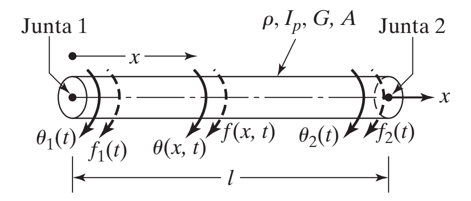


Figura 12.3 Elemento de torsión uniforme.

y las rotaciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en las juntas se tratan como incógnitas, la ecuación (12.20) se expresa, procediendo como el caso del elemento de una barra, como

$$\theta(x, t) = N_1(x)\theta_1(t) + N_2(x)\theta_2(t) \tag{12.21}$$

donde $N_1(x)$ y $N_2(x)$ son las mismas que en la ecuación (12.10). La energía cinética, la energía de deformación y el trabajo virtual para torsión pura están dados por

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho I_p \left\{\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t}\right\}^2 dx \tag{12.22}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l GJ \left\{\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x}\right\}^2 dx \tag{12.23}$$

$$\delta W(t) = \int_0^l f(x, t)\, \delta\theta(x, t)\, dx \tag{12.24}$$

donde ρ es la densidad de masa y $f(x,t)$ es el par de torsión distribuido por unidad de longitud. Utilizando los procedimientos empleados en la sección 12.3.1, podemos derivar las matrices de masa y rigidez y el vector de fuerzas del elemento:

$$[m] = \frac{\rho I_p l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.25}$$

$$[k] = \frac{GJ}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.26}$$

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \displaystyle\int_0^l f(x, t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx \\ \displaystyle\int_0^l f(x, t)\left(\frac{x}{l}\right) dx \end{Bmatrix} \tag{12.27}$$

12.3.3 Elemento de una viga

Ahora consideraremos el elemento de una viga de acuerdo con la teoría de Euler-Bernoulli.[1] La figura 12.4 muestra un elemento de una viga uniforme sometida a una distribución de fuerzas

[1] El elemento de una viga, según la teoría de Timoshenko, se consideró en las referencias [12.4-12.7].

transversales $f(x, t)$. En este caso, las juntas experimentan tanto desplazamientos traslacionales como rotacionales, así que los desplazamientos desconocidos en las juntas se designan como $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ y $w_4(t)$. Por lo tanto, habrá fuerzas lineales en las juntas $f_1(t)$ y $f_3(t)$ correspondientes a los desplazamientos lineales $w_1(t)$ y $w_3(t)$ y fuerzas rotacionales de uniones (momentos de flexión) $f_2(t)$ y $f_4(t)$ correspondientes a los desplazamientos rotacionales $w_2(t)$ y $w_4(t)$, respectivamente. Se supone que el desplazamiento transversal dentro del elemento es una ecuación cúbica en x (como en el caso de deflexión estática de una viga):

$$w(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3 \tag{12.28}$$

Los desplazamientos desconocidos en las juntas deben satisfacer las condiciones

$$\left.\begin{aligned} w(0, t) &= w_1(t), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = w_2(t) \\ w(l, t) &= w_3(t), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = w_4(t) \end{aligned}\right\} \tag{12.29}$$

Las ecuaciones (12.28) y (12.29) proporcionan

$$\begin{aligned} a(t) &= w_1(t) \\ b(t) &= w_2(t) \\ c(t) &= \frac{1}{l^2}[-3w_1(t) - 2w_2(t)l + 3w_3(t) - w_4(t)l] \\ d(t) &= \frac{1}{l^3}[2w_1(t) + w_2(t)l - 2w_3(t) + w_4(t)l] \end{aligned} \tag{12.30}$$

Sustituyendo las ecuaciones (12.30) en la ecuación (12.28), podemos expresar $w(x, t)$ como

$$\begin{aligned} w(x, t) = {} & \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_1(t) + \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)lw_2(t) \\ & + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)lw_4(t) \end{aligned} \tag{12.31}$$

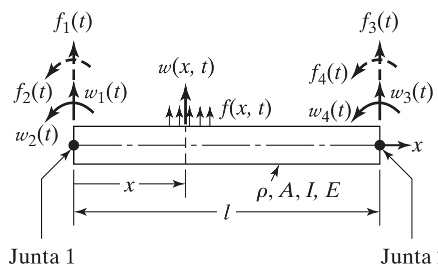


Figura 12.4 Elemento de una viga uniforme.

Esta ecuación se puede volver a escribir como

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x) w_i(t) \tag{12.32}$$

donde $N_i(x)$ son las funciones de forma dadas por

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \tag{12.33}$$

$$N_2(x) = x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \tag{12.34}$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \tag{12.35}$$

$$N_4(x) = -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \tag{12.36}$$

La energía cinética, la energía de deformación a flexión y el trabajo virtual del elemento se pueden expresar como

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \left\{\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right\}^2 dx \equiv \frac{1}{2}\dot{\vec{w}}(t)^T [m] \dot{\vec{w}}(t) \tag{12.37}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l EI \left\{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\}^2 dx \equiv \frac{1}{2}\vec{w}(t)^T [k] \vec{w}(t) \tag{12.38}$$

$$\delta W(t) = \int_0^l f(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx \equiv \delta \vec{w}(t)^T \vec{f}(t) \tag{12.39}$$

donde ρ es la densidad de la viga, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal, A es el área de sección transversal, y

$$\vec{w}(t) = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{w}}(t) = \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \\ dw_4/dt \end{Bmatrix}$$

$$\delta\vec{w}(t) = \begin{Bmatrix} \delta w_1(t) \\ \delta w_2(t) \\ \delta w_3(t) \\ \delta w_4(t) \end{Bmatrix}, \qquad \vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo la ecuación (12.31) en las ecuaciones (12.37) a (12.39) y realizando las integraciones necesarias, obtenemos

$$[m] = \frac{\rho A l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -31^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{12.40}$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{12.41}$$

$$f_i(t) = \int_0^l f(x,t) N_i(x)\, dx, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{12.42}$$

12.4 Transformación de matrices y vectores de un elemento

Como se planteó antes, el método de los elementos finitos considera el sistema dinámico dado como un ensamble de elementos. Los desplazamientos en las juntas de un elemento individual se seleccionan en una dirección conveniente, según la naturaleza del elemento. Por ejemplo, para el elemento de la barra de la figura 12.2, se seleccionan los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ a lo largo de la dirección axial del elemento. Sin embargo, otros elementos de la barra pueden tener orientaciones diferentes en un ensamble, como se muestra en la figura 12.5. Aquí x indica la dirección axial de un elemento individual y se llama *eje de coordenadas local*. Si utilizamos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ para indicar los desplazamientos de diferentes elementos de la barra, habrá un desplazamiento en la junta 1, tres en la junta 2, dos en la junta 3 y dos en la junta 4. No obstante, los desplazamientos de las juntas se pueden especificar de manera más conveniente por medio de ejes de coordenadas de referencia o globales X y Y. Entonces se pueden utilizar los componentes de desplazamiento de las juntas paralelos a los ejes X y Y como los desplazamientos en el sistema de coordenadas global. Éstos se muestran como $U_i(t)$, $i = 1, 2, ..., 8$ en la figura 12.5. Los desplazamientos de las juntas

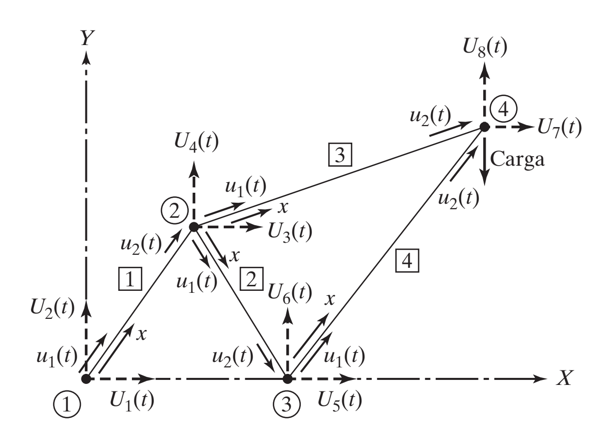


Figura 12.5 Sistema dinámico (armadura) idealizado como un ensamble de cuatro elementos de barra.

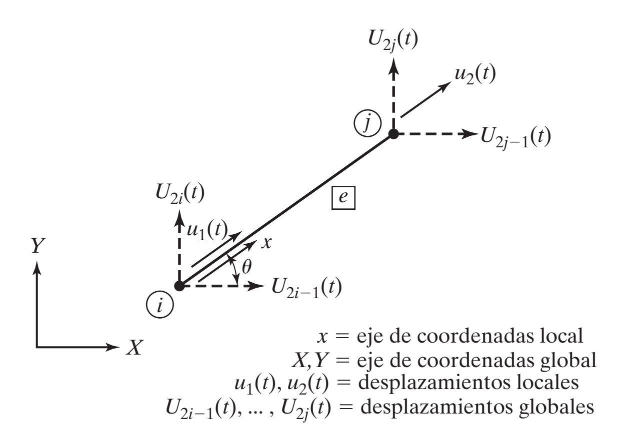


Figura 12.6 Desplazamientos locales y globales en las juntas del elemento *e*.

en los sistemas de coordenadas local y global para un elemento de barra típico *e* se muestran en la figura 12.6. Los dos conjuntos de desplazamientos están relacionados como sigue:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_{2i-1}(t)\cos\theta + U_{2i}(t)\,\text{sen}\,\theta \\ u_2(t) &= U_{2j-1}(t)\cos\theta + U_{2j}(t)\,\text{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{12.43}$$

Éstas se reescriben como

$$\vec{u}(t) = [\lambda]\overline{U}(t) \tag{12.44}$$

donde $[\lambda]$ es la matriz de transformación de coordenadas dada por

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \end{bmatrix} \tag{12.45}$$

y $\vec{u}(t)$ y $\vec{U}(t)$ son los vectores de los desplazamientos de las juntas en el sistema de coordenadas local y global, dados por

$$\vec{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \qquad \vec{U}(t) = \begin{Bmatrix} U_{2i-1}(t) \\ U_{2i}(t) \\ U_{2j-1}(t) \\ U_{2j}(t) \end{Bmatrix}$$

Es útil expresar la matriz de masa, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas en las juntas de un elemento en función del sistema de coordenadas global mientras se determina la respuesta dinámica del sistema completo. Como las energías cinética y de deformación del elemento deben ser independientes del sistema de coordenadas, tenemos

$$T(t) = \frac{1}{2}\dot{\vec{u}}(t)^T[m]\dot{\vec{u}}(t) = \frac{1}{2}\dot{\vec{U}}(t)^T[\,\overline{m}\,]\dot{\vec{U}}(t) \tag{12.46}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\vec{u}(t)^T[k]\vec{u}(t) = \frac{1}{2}\vec{U}(t)^T[\overline{k}]\vec{U}(t) \tag{12.47}$$

donde $[\overline{m}]$ y $[\overline{k}]$ indican las matrices de masa y rigidez del elemento, respectivamente, en el sistema de coordenadas global y $\dot{\vec{U}}(t)$ es el vector de velocidades en las juntas en el sistema de coordenadas global, relacionado con $\dot{\vec{u}}(t)$ como en la ecuación (12.44):

$$\dot{\vec{u}}(t) = [\lambda]\dot{\vec{U}}(t) \tag{12.48}$$

Insertando las ecuaciones (12.44) y (12.48) en las ecuaciones (12.46) y (12.47) obtenemos

$$T(t) = \frac{1}{2}\dot{\vec{U}}(t)^T[\lambda]^T[m][\lambda]\dot{\vec{U}}(t) \equiv \frac{1}{2}\dot{\vec{U}}(t)^T[\overline{m}]\dot{\vec{U}}(t) \tag{12.49}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\vec{U}(t)^T[\lambda]^T[k][\lambda]\vec{U}(t) \equiv \frac{1}{2}\vec{U}(t)^T[\overline{k}]\vec{U}(t) \tag{12.50}$$

Las ecuaciones (12.49) y 12.50) generan

$$[\overline{m}] = [\lambda]^T[m][\lambda] \tag{12.51}$$

$$[\overline{k}] = [\lambda]^T[k][\lambda] \tag{12.52}$$

Asimismo, igualando el trabajo virtual en los dos sistemas de coordenadas,

$$\delta W(t) = \delta\vec{u}(t)^T\,\vec{f}(t) = \delta\vec{U}(t)^T\,\vec{\overline{f}}(t) \tag{12.53}$$

encontramos el vector de las fuerzas que actúan en las juntas del elemento en el sistema de coordenadas global $\vec{\overline{f}}(t)$:

$$\vec{\overline{f}}(t) = [\lambda]^T\vec{f}(t) \tag{12.54}$$

Las ecuaciones (12.51), (12.52) y (12.54) se pueden utilizar para obtener las ecuaciones de movimiento de un solo elemento finito en el sistema de coordenadas global:

$$[\overline{m}]\ddot{\vec{U}}(t) + [\overline{k}]\vec{U}(t) = \vec{\overline{f}}(t) \tag{12.55}$$

Aunque esta ecuación no se utiliza mucho, ya que nuestro interés radica en las ecuaciones de movimiento de un ensamble de elementos $[\overline{m}]$ y $[\overline{k}]$ y el vector $\vec{\overline{f}}$ son útiles al derivar las ecuaciones de movimiento del sistema completo, como se indica en la siguiente sección.

12.5 Ecuaciones de movimiento del sistema completo de elementos finitos

Como la estructura completa se considera un ensamble de varios elementos finitos, ahora extenderemos las ecuaciones de movimiento obtenidas para elementos finitos únicos en el sistema global a la estructura completa. Debemos indicar los desplazamientos de las juntas de la estructura

completa en el sistema de coordenadas global como $U_1(t)$, $U_2(t)$, ..., $U_M(t)$ o, de manera equivalente, como un vector columna:

$$\vec{\underset{\sim}{U}}(t) = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_M(t) \end{Bmatrix}$$

Por comodidad, debemos indicar las cantidades que pertenecen a un elemento *e* en el ensamble por medio del superíndice *e*. Como el desplazamiento de las juntas de cualquier elemento *e* se pueden identificar en el vector de desplazamientos de las juntas de la estructura completa, los vectores $\vec{U}^{(e)}(t)$ y $\vec{\underset{\sim}{U}}(t)$ están relacionados:

$$\vec{U}^{(e)}(t) = [A^{(e)}]\vec{\underset{\sim}{U}}(t) \tag{12.56}$$

donde $[A^{(e)}]$ es una matriz rectangular compuesta de ceros y unos. Por ejemplo, para el elemento 1 que se muestra en la figura 12.5, la ecuación (12.56) se escribe como

$$\vec{U}^{(1)}(t) \equiv \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ U_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_8(t) \end{Bmatrix} \tag{12.57}$$

La energía cinética de la estructura completa se obtiene sumando las energías cinéticas de los elementos individuales

$$T = \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{2} \dot{\vec{U}}^{(e)T} [\,\overline{m}\,] \dot{\vec{U}}^{(e)} \tag{12.58}$$

donde *E* indica cuántos elementos finitos hay en el ensamble. Diferenciando la ecuación (12.56) se puede derivar la relación entre los vectores de velocidad:

$$\dot{\vec{U}}^{(e)}(t) = [A^{(e)}]\dot{\vec{\underset{\sim}{U}}}(t) \tag{12.59}$$

La sustitución de la ecuación (12.59) en la ecuación (12.58) conduce a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{E} \dot{\vec{\underset{\sim}{U}}}^{T} [A^{(e)}]^{T} [\,\overline{m}^{(e)}] \, [A^{(e)}] \dot{\vec{\underset{\sim}{U}}} \tag{12.60}$$

La energía cinética de la estructura completa también se puede expresar en función de las velocidades en las juntas de la estructura completa $\dot{\vec{\underset{\sim}{U}}}$:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\underset{\sim}{U}}}^{T} [\underset{\sim}{M}] \dot{\vec{\underset{\sim}{U}}} \tag{12.61}$$

donde $[\underset{\sim}{M}]$ es la matriz de masa de la estructura completa. Una comparación de las ecuaciones (12.60) y (12.61) da la relación[2]

$$[\underset{\sim}{M}] = \sum_{e=1}^{E} [A^{(e)}]^T [\overline{m}^{(e)}][A^{(e)}] \tag{12.62}$$

Asimismo, considerando la energía de deformación, la matriz de rigidez de estructura completa $[\underset{\sim}{K}]$, se expresa como

$$[\underset{\sim}{K}] = \sum_{e=1}^{E} [A^{(e)}]^T [\overline{k}^{(e)}] [A^{(e)}] \tag{12.63}$$

Por último, considerando el trabajo virtual se obtiene el vector de las fuerzas que actúan en las juntas de la estructura completa, $\underset{\sim}{\vec{F}}$:

$$\underset{\sim}{\vec{F}} = \sum_{e=1}^{E} [A^{(e)}]^T \vec{\overline{f}}^{(e)} \tag{12.64}$$

Una vez que se determinan las matrices de masa y rigidez y el vector de fuerzas, las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la estructura completa se expresan como

$$[\underset{\sim}{M}]\ddot{\underset{\sim}{\vec{U}}} + [\underset{\sim}{K}]\underset{\sim}{\vec{U}} = \underset{\sim}{\vec{F}} \tag{12.65}$$

donde $[\underset{\sim}{K}]$ es la matriz de rigidez de toda la estructura.

Observe que el vector de fuerzas que actúan en las juntas $\underset{\sim}{\vec{F}}$ en la ecuación (12.65) se generó considerando sólo las cargas distribuidas que actúan en los diversos elementos. Si alguna carga concentrada está actuando a lo largo del desplazamiento de una junta $U_i(t)$, se debe sumar al componente i-ésimo de $\underset{\sim}{\vec{F}}$.

12.6 Incorporación de condiciones límite

En la derivación anterior se suponía que ninguna junta estaba fija. Por lo tanto, la estructura completa es capaz de experimentar movimiento de cuerpo rígido bajo las fuerzas que actúan en las juntas. Esto significa que $[\underset{\sim}{K}]$ es una matriz singular (vea la sección 6.12). La estructura suele estar soportada de modo que los desplazamientos sean cero en varias juntas, para evitar el movimiento de cuerpo rígido de la estructura. Un método simple de incorporar las condiciones de desplazamiento cero es eliminar las filas y columnas correspondientes de las matrices $[\underset{\sim}{M}]$ y $[\underset{\sim}{K}]$ y el vector $\underset{\sim}{\vec{F}}$. Las

---

[2] Se puede utilizar un procedimiento alternativo para el ensamble de matrices de elementos. En este procedimiento, cada una de las filas y columnas de la matriz de los elementos (de masa o rigidez) se identifica por medio del grado de libertad correspondiente en la estructura ensamblada. Luego se pueden colocar las diversas entradas de la matriz de elementos en sus ubicaciones apropiadas en la matriz total (de masa o rigidez) del sistema ensamblado. Por ejemplo, la entrada perteneciente a la fila i-ésima (identificada por el grado de libertad p) y la columna j-ésima (identificada por el grado de libertad q) de la matriz de elementos se tiene que colocar en la fila p-ésima y en la columna q-ésima de la matriz total. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 12.3.

ecuaciones de movimiento finales de la estructura restringida se expresan como

$$\underset{N\times N}{[M]}\ \underset{N\times 1}{\ddot{\vec{U}}} + \underset{N\times N}{[K]}\ \underset{N\times 1}{\vec{U}} = \underset{N\times 1}{\vec{F}} \tag{12.66}$$

donde N indica cuántos desplazamientos de juntas libres de la estructura hay.

Tome nota de los siguientes puntos con respecto al análisis de elementos finitos.

1. El método utilizado en la presentación anterior se llama *método de desplazamiento* de análisis de elementos porque son los desplazamientos de los elementos los que se aproximan de forma directa. Hay otros métodos disponibles también, por ejemplo el de fuerzas, el método combinado y los métodos híbridos, [12.8, 12.9].
2. La matriz de rigidez, la matriz de masa y el vector de fuerzas para otros elementos finitos, incluyendo los elementos bidimensionales y tridimensionales, se pueden derivar de manera parecida, siempre que se conozcan las funciones de forma [12.1, 12,2].
3. En el método de Rayleigh-Ritz que se estudió en la sección 8.8, el desplazamiento del sistema continuo se representa por medio de una suma de funciones supuestas, donde cada función indica una deflexión de forma de toda la estructura. En el método de elementos finitos también se utiliza una representación mediante funciones de forma (parecidas a las funciones supuestas) para un elemento finito en lugar de toda la estructura. Por lo tanto, el procedimiento de elementos finitos también se puede considerar como un método de Rayleigh-Ritz.
4. Incluso se puede realizar el análisis de errores del método de elementos finitos [12.10].

Ejemplo 12.1 Análisis de una barra

Considere una barra uniforme, de longitud 0.5 m, área de sección transversal 5×10^{-4} m^2, módulo de Young 200 GPa y densidad 7850 kg/m^3, la cual tiene su extremo izquierdo empotrado, como se muestra en la figura 12.7.

a. Encuentre el esfuerzo inducido en la barra sometida a una carga axial estática de 1000 N aplicada en la junta 2 a lo largo de u_2.
b. Encuentre la frecuencia natural de vibración de la barra.

Utilice una idealización de un elemento.

Solución:

a. Utilizando la matriz de rigidez de un elemento de la barra, ecuación (12.16), las ecuaciones de equilibrio se escriben como

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{E.1}$$

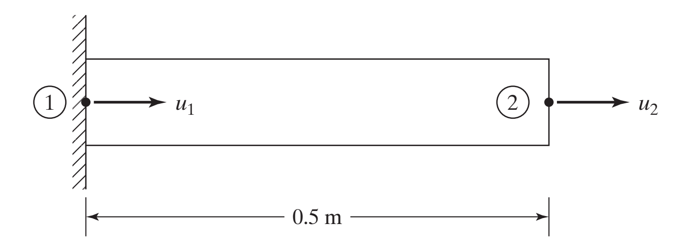


Figura 12.7 Barra uniforme con dos grados de libertad.

Con $A = 5 \times 10^{-4}$, $E = 2 \times 10^{11}$, $l = 0.5, f_2 = 1000$, la ecuación (E.1) se escribe como

$$2 \times 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 1000 \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

donde u_1 es el desplazamiento y f_1 es la reacción desconocida en la junta 1. Para incorporar la condición límite $u_1 = 0$, eliminamos la primera ecuación escalar (primera fila) y sustituimos $u_1 = 0$ en la ecuación resultante (E.2). Esto ofrece

$$2 \times 10^8 u_2 = 1000 \qquad \text{o} \qquad u_2 = 500 \times 10^{-8} \text{ m} \tag{E.3}$$

La relación de esfuerzo (σ) contra deformación (ε) presenta

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l} = E\left(\frac{u_2 - u_1}{l}\right) \tag{E.4}$$

donde $\Delta l = u_2 - u_1$ indica el cambio de longitud del elemento y $\frac{\Delta l}{l}$ indica la deformación. La ecuación (E.4) produce

$$\sigma = 2 \times 10^{11}\left(\frac{500 \times 10^{-8} - 0}{0.5}\right) = 2 \times 10^6 \text{ Pa} \tag{E.5}$$

b. Utilizando las matrices de rigidez y masa del elemento de la barra, las ecuaciones (12.16) y (12.13), el problema de valor eigen se expresa como

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \frac{\rho\, Al}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

donde ω es la frecuencia natural y U_1 y U_2 son las amplitudes de vibración de la barra en las juntas 1 y 2, respectivamente. Para incorporar la condición límite $U_1 = 0$, eliminamos la primera fila y la primera columna en cada una de las matrices y vectores y escribimos la ecuación resultante como

$$\frac{AE}{l}U_2 = \omega^2 \frac{\rho\, Al}{6}(2)U_2$$

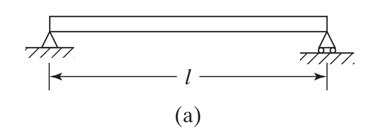
o

$$\omega = \sqrt{\frac{3E}{\rho l^2}} = \sqrt{\frac{3(2 \times 10^{11})}{7850\,(0.5)^2}} = 17{,}485.2076 \text{ rad/s} \tag{E.7}$$

■

Ejemplo 12.2 Frecuencias naturales de una viga simplemente apoyada

Encuentre las frecuencias naturales de la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 12.8(a) utilizando un elemento finito.



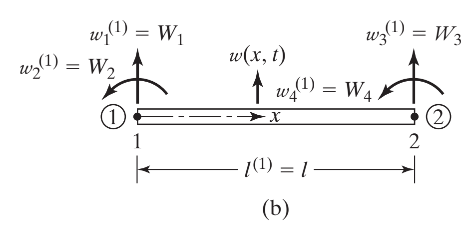


Figura 12.8 Viga simplemente apoyada.

Solución: Como la viga se idealiza utilizando sólo un elemento, los desplazamientos en las juntas del elemento son los mismos tanto en el sistema local como en el global, como se indica en la figura 12.8(b). Las matrices de rigidez y masa de la viga están dadas por

$$[\underset{\sim}{K}] = [K^{(1)}] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

$$[\underset{\sim}{M}] = [M^{(1)}] = \frac{\rho A l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

y el vector de desplazamientos en las juntas es

$$\vec{\underset{\sim}{W}} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \\ w_4^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{E.3}$$

Se pueden incorporar las condiciones límite correspondientes a los extremos simplemente apoyados ($W_1 = 0$ y $W_3 = 0$)[3] eliminando las filas y columnas correspondientes a W_1 y W_3 en las ecuaciones (E.1) y (E.2). Esto conduce a las matrices totales

$$[K] = \frac{2EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

$$[M] = \frac{\rho A l^3}{420}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \tag{E.5}$$

y el problema de valor eigen se puede escribir como

$$\left[\frac{2EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho A l^3 \omega^2}{420}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.6}$$

[3] El momento de flexión no puede igualarse a cero explícitamente en los extremos simplemente apoyados, puesto que no hay ningún grado de libertad (desplazamiento en las juntas) que implique la segunda derivada del desplazamiento w.

Multiplicándola por $l/(2EI)$, la ecuación (E.6) se expresa como

$$\begin{bmatrix} 2 - 4\lambda & 1 + 3\lambda \\ 1 + 3\lambda & 2 - 4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{E.7}$$

donde

$$\lambda = \frac{\rho A l^4 \omega^2}{840EI} \tag{E.8}$$

Si igualamos a cero el determinante de la matriz de coeficientes en la ecuación (E.7), obtenemos la ecuación de frecuencia

$$\begin{vmatrix} 2 - 4\lambda & 1 + 3\lambda \\ 1 + 3\lambda & 2 - 4\lambda \end{vmatrix} = (2 - 4\lambda)^2 - (1 + 3\lambda)^2 = 0 \tag{E.9}$$

Las raíces de la ecuación (E.9) generan las frecuencias naturales de la viga como

$$\lambda_1 = \frac{1}{7} \qquad \text{o} \qquad \omega_1 = \left(\frac{120EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \tag{E.10}$$

$$\lambda_2 = 3 \qquad \text{o} \qquad \omega_2 = \left(\frac{2520EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \tag{E.11}$$

Estos resultados se comparan con los valores exactos (vea la figura 8.15):

$$\omega_1 = \left(\frac{97.41EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2}, \qquad \omega_2 = \left(\frac{1558.56EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \tag{E.12}$$

■

Ejemplo 12.3 Esfuerzos en una armadura de dos barras

Encuentre los esfuerzos desarrollados en los miembros de la armadura que se muestra en la figura 12.9(a), sometida a una carga vertical de 200 lb en la junta 3. Las áreas de sección transversal son 1 pulg^2, para el miembro 1; 2 pulg^2 para el miembro 2, y el módulo de Young es 30×10^6 lb/pulg^2.

Solución

Método: Derive las ecuaciones de equilibrio estático y resuélvalas para encontrar los desplazamientos en las juntas. Use las relaciones de elasticidad para determinar los esfuerzos en los elementos. Cada miembro se tiene que tratar como un elemento. De acuerdo con la figura 12.9(a), las coordenadas de las juntas se pueden hallar como

$$(X_1, Y_1) = (0, 10) \text{ pulg}; \quad (X_2, Y_2) = (0, 0) \text{ pulg}; \quad (X_3, Y_3) = (10, 5) \text{ pulg}$$

El modelado de la armadura como un ensamble de dos elementos de barra y los grados de libertad de desplazamiento de las juntas se muestran en la figura 12.9(b). Las longitudes de los elementos se pueden calcular a partir de las coordenadas de los extremos (juntas) como

$$\begin{aligned} l^{(1)} &= \{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2\}^{1/2} = \{(10 - 0)^2 + (5 - 10)^2\}^{1/2} \\ &= 11.1803 \text{ pulg} \\ l^{(2)} &= \{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2\}^{1/2} = \{(10 - 0)^2 + (5 - 0)^2\}^{1/2} \\ &= 11.1803 \text{ pulg} \end{aligned} \tag{E.1}$$

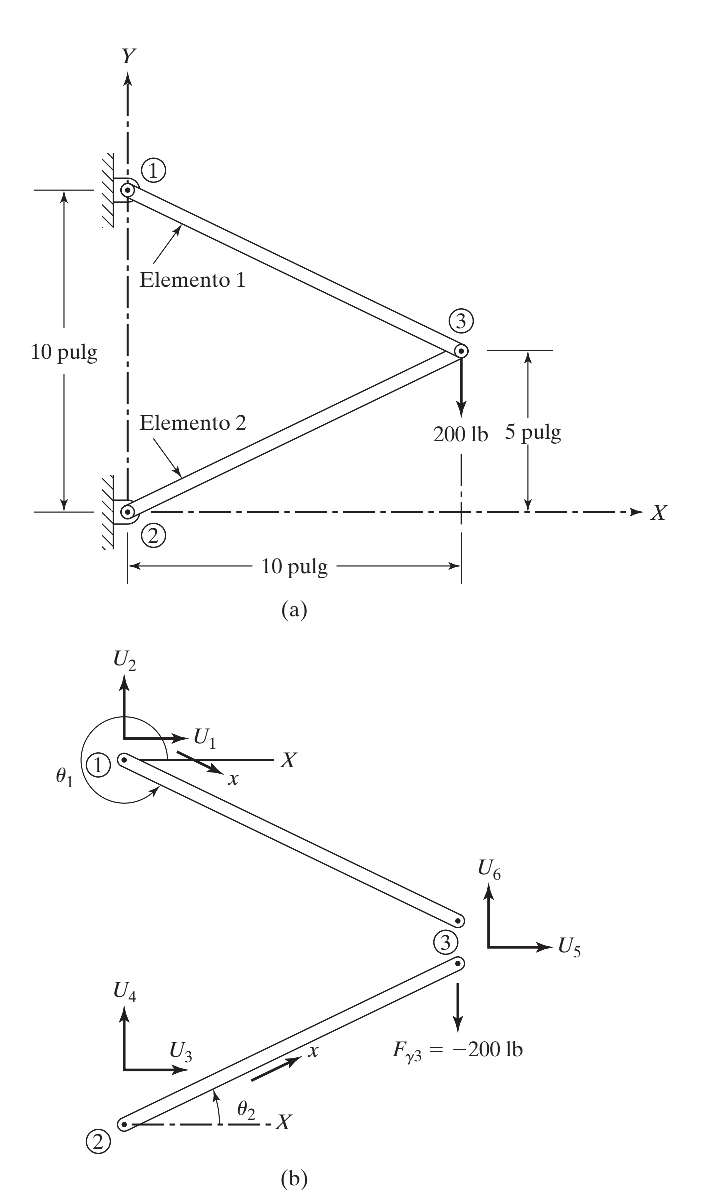


Figura 12.9 Armadura de dos barras.

Las matrices de rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas local se obtienen como

$$[k^{(1)}] = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(1)(30 \times 10^6)}{11.1803}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2.6833 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(2)(30 \times 10^6)}{11.1803}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 5.3666 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

El ángulo entre la coordenada x local y la coordenada X global es

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{X_3 - X_1}{l^{(1)}} = \frac{10 - 0}{11.1803} = 0.8944 \\ \operatorname{sen}\theta_1 &= \frac{Y_3 - Y_1}{l^{(1)}} = \frac{5 - 10}{11.1803} = -0.4472 \end{aligned}\right\}\text{para el elemento 1} \tag{E.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{X_3 - X_2}{l^{(2)}} = \frac{10 - 0}{11.1803} = 0.8944 \\ \operatorname{sen}\theta_2 &= \frac{Y_3 - Y_2}{l^{(2)}} = \frac{5 - 0}{11.1803} = 0.4472 \end{aligned}\right\}\text{para el elemento 2} \tag{E.4}$$

Las matrices de rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas (X,Y) global se derivan como

$$[\bar{k}^{(1)}] = [\lambda^{(1)}]^T[k^{(1)}][\lambda^{(1)}]$$

$$= 2.6833 \times 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.8 & 0.4 \\ -0.4 & 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.8 & 0.4 & 0.8 & -0.4 \\ 0.4 & -0.2 & -0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \tag{E.5}$$

$$[\bar{k}^{(2)}] = [\lambda^{(2)}]^T[k^{(2)}][\lambda^{(2)}]$$

$$= 5.3666 \times 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.8 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 & 0.8 & 0.4 \\ -0.4 & -0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \tag{E.6}$$

donde

$$[\lambda^{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8944 & -0.4472 \end{bmatrix} \tag{E.7}$$

$$[\lambda^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix} \tag{E.8}$$

Observe que los lados superior y derecho de las ecuaciones (E.5) y (E.6) indican los grados globales de libertad correspondientes a las filas y columnas de las matrices de rigidez respectivas. La matriz de rigidez

ensamblada del sistema $[\underset{\sim}{K}]$ se obtiene colocando los elementos de $[\bar{k}^{(1)}]$ y $[\bar{k}^{(2)}]$ en sus lugares apropiados en $[\underset{\sim}{K}]$, como

$$[\underset{\sim}{K}] = 2.6833 \times 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & & & -0.8 & 0.4 \\ -0.4 & 0.2 & & & 0.4 & -0.2 \\ & & 1.6 & 0.8 & -1.6 & -0.8 \\ & & 0.8 & 0.4 & -0.8 & -0.4 \\ -0.8 & 0.4 & -1.6 & -0.8 & (0.8+1.6) & (-0.4+0.8) \\ 0.4 & -0.2 & -0.8 & -0.4 & (-0.4+0.8) & (0.2+0.4) \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \tag{E.9}$$

El vector de fuerzas ensamblado se escribe como

$$\underset{\sim}{\vec{F}} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{Bmatrix} \tag{E.10}$$

donde, por lo general, (F_{Xi} y F_{Yi}) indican las fuerzas aplicadas en la junta i a lo largo de las direcciones (X, Y). Específicamente, (F_{X1}, F_{Y1}) y (F_{X2}, F_{Y2}) representan las reacciones en las juntas 1 y 2, mientras que (F_{X3}, F_{Y3}) = (0, −200) lb son las fuerzas externas aplicadas en la junta 3. Aplicando las condiciones límite $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$ (es decir, eliminando las filas y columnas 1, 2, 3 y 4 en las ecuaciones (E.9) y (E.10)), obtenemos la matriz de rigidez ensamblada final y el vector de fuerzas como

$$[K] = 2.6833 \times 10^6 \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \tag{E.11}$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \tag{E.12}$$

Las ecuaciones de equilibrio del sistema se escriben como

$$[K]\vec{U} = \vec{F} \tag{E.13}$$

donde $\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$. La solución de la ecuación (E.13) se puede hallar como

$$U_5 = 23.2922 \times 10^{-6} \text{ pulg}, \quad U_6 = -139.7532 \times 10^{-6} \text{ pulg} \tag{E.14}$$

Los desplazamientos axiales de los elementos 1 y 2 se pueden hallar como

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = [\lambda^{(1)}] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8944 & -0.4472 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 23.2922 \times 10^{-6} \\ -139.7532 \times 10^{-6} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 83.3301 \times 10^{-6} \end{Bmatrix} \text{pulg} \tag{E.15}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = [\lambda^{(2)}] \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 23.2922 \times 10^{-6} \\ -139.7532 \times 10^{-6} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -41.6651 \times 10^{-6} \end{Bmatrix} \text{pulg} \tag{E.16}$$

Los esfuerzos en los elementos 1 y 2 se determinan como

$$\sigma^{(1)} = E^{(1)}\epsilon^{(1)} = E^{(1)}\frac{\Delta l^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{E^{(1)}(u_2 - u_1)^{(1)}}{l^{(1)}}$$

$$= \frac{(30 \times 10^6)(83.3301 \times 10^{-6})}{11.1803} = 223.5989 \text{ lb/pulg}^2 \tag{E.17}$$

$$\sigma^{(2)} = E^{(2)}\epsilon^{(2)} = \frac{E^{(2)}\Delta l^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{E^{(2)}(u_2 - u_1)^{(2)}}{l^{(2)}}$$

$$= \frac{(30 \times 10^6)(-41.6651 \times 10^{-6})}{11.1803} = -111.7996 \text{ lb/pulg}^2 \tag{E.18}$$

donde $\sigma^{(i)}$ indica el esfuerzo, $\varepsilon^{(i)}$ representa la deformación, y $\Delta l^{(i)}$ indica el cambio de longitud del elemento i ($i = 1, 2$).

■

12.7 Matrices de masa consistente y de masa concentrada

Las matrices de masa derivadas en la sección 12.3 se conocen como *matrices de masa consistente*. Son consistentes porque el mismo modelo de desplazamiento que se utiliza para derivar la matriz de rigidez de un elemento se utiliza para derivar la matriz de masa. Es interesante señalar que varios problemas dinámicos se han resuelto con formas más simples de las matrices de masa. La forma más simple de la matriz de masa, conocida como matriz de masa concentrada se obtiene colocando masas puntuales (concentradas) m_i en puntos de nodo i en las direcciones de los grados de desplazamiento de libertad supuestos. Las masas concentradas se refieren a la inercia traslacional y rotacional del elemento y se calculan suponiendo que el material dentro de las ubicaciones medias a ambos lado del desplazamiento se comporta como un cuerpo rígido mientras que el resto del elemento no participa en el movimiento. Por lo tanto, esta suposición excluye el acoplamiento dinámico que existe entre los desplazamientos del elemento, de ahí que la matriz de masa del elemento resultante sea puramente diagonal [12.11].

12.7.1 Matriz de masa concentrada para un elemento de una barra

Dividiendo la masa total del elemento por igual entre los dos nodos, la matriz de masa concentrada de un elemento de una barra uniforme se obtiene como

$$[m] = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.67}$$

12.7.2 Matriz de masa concentrada para un elemento de una viga

En la figura 12.4, al concentrar la mitad de la masa total de la viga en cada uno de los nodos, a lo largo de los grados de libertad traslacionales, obtenemos la matriz de masa concentrada del elemento de la viga como

$$[m] = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.68}$$

Observe que en la ecuación (12.68) se supuso que el efecto de inercia asociado con los grados de libertad rotacionales es cero en la ecuación (12.68). Si se debe incluir el efecto de inercia, calculamos el momento de inercia de masa de la mitad del segmento de viga con respecto a cada extremo, y lo incluimos en las ubicaciones diagonales correspondientes a los grados de libertad rotacionales. Por lo tanto, para una viga uniforme tenemos

$$I = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho A l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\rho A l^3}{24} \tag{12.69}$$

y por consiguiente la matriz de masa concentrada del elemento de viga se escribe como

$$[m] = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{l^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{l^2}{12}\right) \end{bmatrix} \tag{12.70}$$

12.7.3 Matrices de masa concentrada en comparación con matrices de masa consistente

No está claro si las matrices de masa concentrada o las de masa consistente proporcionan resultados más precisos para un problema general de respuesta dinámica. Las matrices de masa concentrada son aproximadas en el sentido de que no consideran el acoplamiento dinámico que existe entre los diversos grados de desplazamiento de libertad del elemento. Sin embargo, dado que las matrices de masa concentrada son diagonales, requieren menos espacio de almacenamiento durante su manejo computacional. Por otra parte, las matrices de masa consistente no son diagonales, por lo que requieren más espacio para almacenamiento. Por lo tanto, son aproximadas en el sentido de que las funciones, de las cuales derivan aplicando patrones de desplazamiento estáticos, se usan inclusive para solucionar problemas dinámicos. El ejemplo siguiente ilustra la aplicación de matrices de masa concentrada y de masa consistente en la solución de un problema sencillo de vibración.

Ejemplo 12.4 Matrices de masa consistente y de masa concentrada de una barra

Encuentre las frecuencias naturales de la barra uniforme doblemente empotrada que se muestra en la figura 12.10 por medio de matrices de masa consistente y de masa concentrada. Use dos elementos de la barra para el modelado.

Solución: Las matrices de rigidez y masa de un elemento de una barra son

$$[k] = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

$$[m]_c = \frac{\rho A l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

$$[m]_l = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

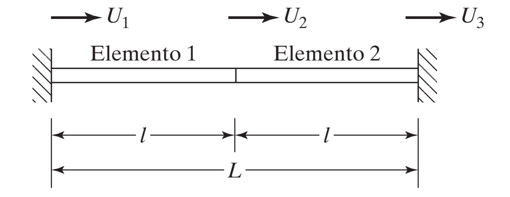


Figura 12.10 Barra uniforme doblemente empotrada.

donde los subíndices c y l para las matrices de masa indican las matrices de masa consistente y de masa concentrada, respectivamente. Como la barra se modela por medio de dos elementos, las matrices de rigidez y masa ensamblada son

$$[\underset{\sim}{K}] = \frac{AE}{l}\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 \quad +1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

$$[\underset{\sim}{M}]_c = \frac{\rho Al}{6}\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 \quad +2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} = \frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{E.5}$$

$$[\underset{\sim}{M}]_l = \frac{\rho Al}{2}\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \quad +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} = \frac{\rho Al}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.6}$$

Los rectángulos de línea punteada en las ecuaciones (E.4) a (E.6) encierran las contribuciones de los elementos 1 y 2. Los grados de libertad correspondientes a las columnas y filas de las matrices se indican en los lados superior y derecho de las matrices. El problema de valor eigen, después de aplicar las condiciones límite $U_1 = U_3 = 0$, es

$$[[K] - \omega^2[M]]\,\{U_2\} = \{0\} \tag{E.7}$$

El valor eigen ω^2 se determina resolviendo la ecuación

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \tag{E.8}$$

La cual, en este caso, se escribe como

$$\left|\frac{AE}{l}[2] - \omega^2\frac{\rho Al}{6}[4]\right| = 0 \qquad \text{con matrices de masa consistente} \tag{E.9}$$

y

$$\left|\frac{AE}{l}[2] - \omega^2\frac{\rho Al}{2}[2]\right| = 0 \qquad \text{con matrices de masa concentrada} \tag{E.10}$$

Las ecuaciones (E.9) y (E.10) se resuelven para obtener

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3E}{\rho l^2}} = 3.4641\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \tag{E.11}$$

$$\omega_l = \sqrt{\frac{2E}{\rho l^2}} = 2.8284\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \tag{E.12}$$

Estos valores se comparan con los valores exactos (vea la figura 8.7)

$$\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \tag{E.13}$$

■

12.8 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

Ejemplo 12.5 Análisis de elementos finitos de una barra escalonada

Considere la barra escalonada que se muestra en la figura 12.11 con los siguientes datos: $A_1 = 16 \times 10^{-4}$ m^2, $A_2 = 9 \times 10^{-4}$ m^2, $A_3 = 4 \times 10^{-4}$ m^2, $E_i = 20 \times 10^{10}$ Pa, $i = 1, 2, 3$, $\rho_i = 7.8 \times 10\ 10^3$ kg/m^3, $i = 1, 2, 3$, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 0.5$ m, $l_3 = 0.25$ m. Escriba un programa MATLAB para determinar lo siguiente:

a. Los desplazamientos u_1, u_2 y u_3 bajo la carga $p_3 = 1000$ N
b. Las frecuencias naturales y modos de barra

Solución: Las matrices de rigidez y masa ensambladas de la barra escalonada están dadas por

$$[\underset{\sim}{K}] = \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & \frac{-A_1E_1}{l_1} & 0 & 0 \\ \frac{-A_1E_1}{l_1} & \frac{A_1E_1}{l_1} + \frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{-A_2E_2}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{-A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} + \frac{A_3E_3}{l_3} & \frac{-A_3E_3}{l_3} \\ 0 & 0 & \frac{-A_3E_3}{l_3} & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

$$[\underset{\sim}{M}] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2\rho_1A_1l_1 & \rho_1A_1l_1 & 0 & 0 \\ \rho_1A_1l_1 & 2\rho_1A_1l_1 + 2\rho_2A_2l_2 & \rho_2A_2l_2 & 0 \\ 0 & \rho_2A_2l_2 & 2\rho_2A_2l_2 + 2\rho_3A_3l_3 & \rho_3A_3l_3 \\ 0 & 0 & \rho_3A_3l_3 & 2\rho_3A_3l_3 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Las matrices de sistema [K] y [M] se obtienen incorporando la condición límite $u_0 = 0$; es decir, eliminando la primera fila y la primera columna en las ecuaciones (E.1) y (E.2).

a. Las ecuaciones de equilibrio bajo la carga $p_3 = 1000$ N están dadas por

$$[K]\vec{U} = \vec{P} \tag{E.3}$$

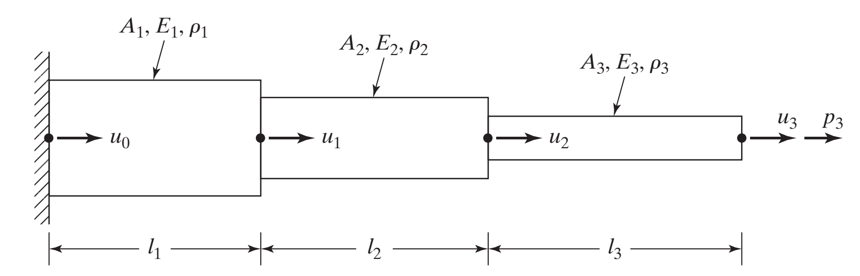


Figura 12.11 Barra uniforme doblemente empotrada.

donde

$$[K] = \begin{bmatrix} \dfrac{A_1E_1}{l_1} + \dfrac{A_2E_2}{l_2} & \dfrac{-A_2E_2}{l_2} & 0 \\ \dfrac{-A_2E_2}{l_2} & \dfrac{A_2E_2}{l_2} + \dfrac{A_3E_3}{l_3} & \dfrac{-A_3E_3}{l_3} \\ 0 & \dfrac{-A_3E_3}{l_3} & \dfrac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

b. El problema de valor eigen se expresa como

$$\left[[K] - \omega^2[M]\right]\vec{U} = \vec{0} \tag{E.5}$$

donde $[K]$ está dada por la ecuación (E.4) y $[M]$ por

$$[M] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2\rho_1A_1l_1 + 2\rho_2A_2l_2 & \rho_2A_2l_2 & 0 \\ \rho_2A_2l_2 & 2\rho_2A_2l_2 + 2\rho_3A_3l_3 & \rho_3A_3l_3 \\ 0 & \rho_3A_3l_3 & 2\rho_3A_3l_3 \end{bmatrix} \tag{E.6}$$

A continuación se presenta la solución de las ecuaciones (E.3) y (E.5) utilizando MATLAB.

```
%--- Program Ex12_5.m
%---Inicialización de los valores-------------
A1 = 16e-4 ;
A2 = 9e-4 ;
A3 = 4e-4 ;

E1 = 20e10 ;
E2 = E1 ;
E3 = E1 ;

R1 = 7.8e3 ;
R2 = R1 ;
R3 = R1 ;
L1 = 1 ;
L2 = 0.5 ;
L3 = 0.25 ;

%---Definición de [K]-----------------

K11 = A1*E1/L1+A2*E2/L2 ;
K12 = -A2*E2/L2 ;
K13 = 0 ;

K21 = K12 ;
K22 = A2*E2/L2+A3*E3/L3 ;
K23 = -A3*E3/L3 ;

K31 = K13 ;
K32 = K23 ;
K33 = A3*E3/L3 ;

K = [ K11 K12 K13; K21 K22 K23; K31 K32 K33 ]

%---- Cálculo de la matriz

P = [ 0 0 1000]'
```

```
U = inv(K)*P

%---- Definición de [M] -------------

M11 = (2*R1*A1*L1+2*R2*A2*L2) / 6;
M12 = (R2*A2*L2) / 6;
M13 = 0;

M21 = M12;
M22 = (2*R2*A2*L2+2*R3*A3*L3) / 6;
M23 = R3*A3*L3;

M31 = M13;
M32 = M23;
M33 = 2*M23;

M= [M11 M12 M13; M21 M22 M23; M31 M32 M33 ]

MI = inv (M)

KM = MI*K

%-------Cálculo del vector eigen y del valor eigen-------

[L, V] = eig (KM)

>> Ex12_5
K =

   680000000   -360000000            0
  -360000000    680000000   -320000000
           0   -320000000    320000000
P =
           0
           0
        1000

U =
    1.0e-005 *
    0.3125
    0.5903
    0.9028
M =

     5.3300       0.5850          0
     0.5850       1.4300     0.7800
          0       0.7800     1.5600
MI =

     0.2000      -0.1125     0.0562
    -0.1125       1.0248    -0.5124
     0.0562      -0.5124     0.8972

KM =

     1.0e+008*
     1.7647      -1.6647     0.5399
    -4.4542       9.0133    -4.9191
     2.2271      -6.5579     4.5108

L =

    -0.1384       0.6016     0.3946
     0.7858      -0.1561     0.5929
    -0.6028      -0.7834     0.7020

V =
     1.0e+009*
     1.3571            0          0
          0       0.1494          0
          0            0     0.0224
>>
```

■

Ejemplo 12.6 Programa para el análisis de valor eigen de una viga escalonada

Desarrolle un programa MATLAB llamado **`Program17.m`** para el análisis de valor eigen de una viga escalonada doblemente empotrada del tipo que se muestra en la figura 12.12.

Solución: Se desarrolla **`Program17.m`** para que acepte los siguientes datos de entrada:

$xl(i)$ = longitud del elemento (escalón) i
$xi(i)$ = momento de inercia del elemento i
$a(i)$ = área de sección transversal del elemento i
$bj(i, j)$ = grados de libertad global correspondientes al grado j-ésimo de libertad local del elemento i
e = Módulo de Young
rho = densidad de masa

El programa proporciona las frecuencias naturales y modos de la viga como resultados de salida.

```
 Frecuencias naturales de la viga escalonada
 1.6008e+002  6.1746e+002  2.2520e+003  7.1266e+003
Modos
1     1.0333e-002       1.8915e-004     1.4163e-002     4.4518e-005
2    -3.7660e-003       2.0297e-004     4.7109e-003     2.5950e-004
3     1.6816e-004      -1.8168e-004     1.3570e-003     2.0758e-004
4     1.8324e-004       6.0740e-005     3.7453e-004     1.6386e-004
```

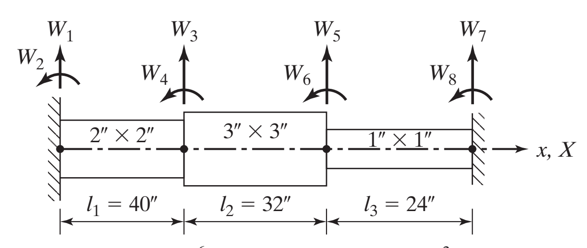


Figura 12.12 Viga escalonada.

■

Resumen del capítulo

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico muy común para determinar soluciones precisas de sistemas prácticos complejos. Hicimos una introducción al método tal como se aplica a problemas de vibración. Delineamos el método de derivar matrices de rigidez y masa de elementos estructurales simples como barras, varillas y vigas, la transformación de las matrices al sistema de coordenadas global, el ensamble de matrices de elementos, y la solución de ecuaciones de elemento finito. Presentamos la aplicación del método con varios ejemplos estáticos y dinámicos (vibración). También se consideró la solución de elemento finito basada en problemas de vibración por medio de MATLAB.

Ahora que ya terminó este capítulo, usted deberá ser capaz de responder las preguntas de repaso y resolver los problemas que se presentan a continuación.

Referencias

12.1 O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method* (4a. ed.), McGraw-Hill, Londres, 1987.

12.2 S. S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering* (3a. ed.), Butterworth-Heinemann, Boston, 1999.

12.3 G. V. Ramana y S. S. Rao, "Optimum design of plano-milling machine structure using finite element analysis", *Computers and Structures*, Vol. 18, 1984, págs. 247-253.

12.4 R. Davis, R. D. Henshell y G. B. Warburton, "A Timoshenko beam element", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 22, 1972, págs. 475-487.

12.5 D. L. Thomas, J. M. Wilson y R. R. Wilson, "Timoshenko beam finite elements", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 31, 1973, págs. 315-330.

12.6 J. Thomas y B. A. H. Abbas, "Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 41, 1975, págs. 291-299.

12.7 R. S. Gupta y S. S. Rao, "Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, 1978, págs. 187-200.

12.8 T. H. H. Pian, "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution", *AIAA Journal*, Vol. 2, 1964, págs. 1333-1336.

12.9 H. Alaylioglu y R. Ali, "Analysis of an automotive structure using hybrid stress finite elements", *Computers and Structures*, Vol. 8, 1978, págs. 237-242.

12.10 I. Fried, "Accuracy of finite element eigenproblems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, págs. 289-295.

12.11 P. Tong, T. H. H. Pian y L. L. Bucciarelli, "Mode shapes and frequencies by the finite element method using consistent and lumped matrices", *Computers and Structures*, Vol. 1, 1971, págs. 623-638.

Preguntas de repaso

12.1 Proporcione respuestas breves a lo siguiente:

1. ¿Cuál es la idea básica detrás del método de elemento finito?
2. ¿Qué es la función de forma?
3. ¿Cuál es el rol de la transformación de matrices en el método de elemento finito?
4. ¿Cuál es la base para la derivación de matrices de transformación?
5. ¿Cómo se incorporan las condiciones límite en las ecuaciones de elemento finito?
6. ¿Cómo se resuelve un problema de elemento finito simétrico en cuanto a geometría y carga modelando sólo la mitad del problema?
7. ¿Por qué el método de elementos finitos presentado en este capítulo se llama método de desplazamientos?
8. ¿Qué es una matriz de masa consistente?
9. ¿Qué es una matriz de masa concentrada?
10. ¿Cuál es la diferencia entre el método de elementos finitos y el método de Rayleigh-Ritz?
11. ¿Cómo se convierte la carga distribuida en un vector de fuerzas equivalentes que actúan juntas en el método de elementos finitos?

12.2 Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Para un elemento de barra de longitud l con dos nodos, la función de forma correspondiente al nodo 2 está dada por x/l.
2. Las matrices de rigidez de elementos siempre son singulares.

3. Las matrices de masa de elementos siempre son singulares.
4. La matriz de rigidez del sistema siempre es singular a menos que se incorporen las condiciones límite.
5. La matriz de masa del sistema siempre es singular a menos que se incorporen las condiciones límite.
6. Las matrices de masa concentrada siempre son diagonales.
7. La transformación de coordenadas de matrices de elementos se requiere para todos los sistemas.
8. La matriz de rigidez de elementos en el sistema de coordenadas global $[\overline{k}]$, se puede expresar en función de la matriz local $[k]$ y la matriz de transformación de coordenadas $[\lambda]$ como$[\lambda]^T[k][\lambda]$.
9. La derivación de matrices de sistema implica el ensamble de matrices de elementos.
10. Se tienen que imponer condiciones límite para evitar el movimiento de cuerpo rígido del sistema.

12.3 Escriba en los siguientes espacios en blanco la palabra correcta:

1. En el método de elementos finitos, el dominio de la solución es reemplazado por varios ________.
2. En el método de elementos finitos, se supone que los elementos están interconectados en ciertos puntos conocidos como ________.
3. En el método de elementos finitos, se supone una solución _______ dentro de cada elemento.
4. El desplazamiento dentro de un elemento finito se expresa en función de funciones _________.
5. Para un elemento de viga delgada se consideran _______ grados de libertad en cada nodo.
6. Para un elemento de viga delgada, se supone que las funciones de forma son polinomios de ________ grado.
7. En el método de desplazamientos, el __________ de los elementos se representa de forma directa.
8. Si el modelo de desplazamientos utilizado en la derivación de las matrices de rigidez de elementos también se utiliza para derivar matrices de masa de elementos, la matriz de masa resultante se llama matriz de masa ________.
9. Si la matriz de masa se deriva suponiendo masas puntuales en puntos de nodo, la matriz de masa resultante se llama matriz de masa ________.
10. Las matrices de masa concentrada no consideran el acoplamiento _________ entre los diversos grados de libertad de desplazamiento del elemento.
11. Las diferentes orientaciones de elementos finitos requieren _________ de matrices de elementos.

12.4 Seleccione la respuesta más apropiada de entre las opciones dadas.

1. Para una barra de longitud l con dos nodos, la función de forma correspondiente al nodo 1 está dada por

   a. $\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ **b.** $\frac{x}{l}$ **c.** $\left(1 + \frac{x}{l}\right)$

2. La forma más simple de la matriz de masa se conoce como
   a. matriz de masa concentrada
   b. matriz de masa consistente
   c. matriz de masa global
3. El método de elementos finitos es
   a. un método analítico aproximado
   b. un método numérico
   c. un método analítico exacto

4. La matriz de rigidez de un elemento de barra está dada por

a. $\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ **b.** $\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ **c.** $\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

5. La matriz de masa consistente de un elemento de barra está dada por

a. $\frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ **b.** $\frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ **c.** $\frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

6. El método de elementos finitos es semejante al
   a. método de Rayleigh
   b. método de Rayleigh-Ritz
   c. método de Lagrange
7. La matriz de masa concentrada de un elemento de barra está dada por

a. $\rho Al\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ **b.** $\frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ **c.** $\frac{\rho Al}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

8. La matriz de masa de elementos en el sistema de coordenadas global $[\overline{m}]$ se puede expresar en función de la matriz de masa de elementos en el sistema de coordenadas local $[m]$ y la matriz de transformación de coordenadas $[\lambda]$ como

a. $[\overline{m}] = [\lambda]^T[m]$ **b.** $[\overline{m}] = [m][\lambda]$ **c.** $[\overline{m}] = [\lambda]^T[m][\lambda]$

12.5 Correlacione los elementos en las dos columnas siguientes. Suponga una barra doblemente empotrada con un nodo a la mitad.

Matrices de elementos: $[k] = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}, [m]_c = \frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, [m]_l = \frac{\rho Al}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Barra de acero: $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg^2, $\rho = 0.0007298$ lb/seg^2/pulg^4, $L = 12$ pulg

Barra de aluminio: $E = 10.3 \times 10^6$ lb/pulg^2, $\rho = 0.0002536$ lb-seg^2/pulg^4, $L = 12$ pulg

1. Frecuencia natural de una barra de acero dada por matrices de masa concentrada	**a.** 58,528.5606 rad/seg
2. Frecuencia natural de una barra de aluminio dada por matrices de masa consistente	**b.** 47,501.0898 rad/seg
3. Frecuencia natural de una barra de acero dada por matrices de masa consistente	**c.** 58,177.2469 rad/seg
4. Frecuencia natural de una barra de aluminio dada por matrices de masa concentrada	**d.** 47,787.9336 rad/seg

Problemas

Sección 12.3 Matriz de masa, matriz de rigidez y vector de fuerza

12.1 Derive la matriz de rigidez del elemento de barra ahusada (el cual se deforma en la dirección axial) que se muestra en la figura 12.13. El diámetro de la barra disminuye de D a d a lo largo de su longitud.

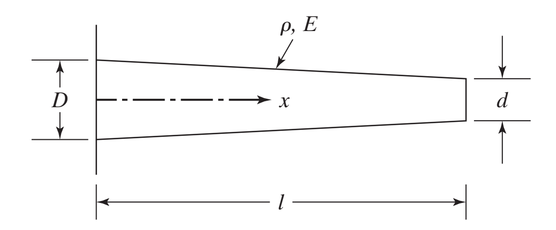


Figura 12.13

12.2 Derive la matriz de rigidez del elemento de barra sometido a vibración longitudinal cuya área de sección transversal varía como $A(x) = A_0 e^{-(x/l)}$, donde A_0 es el área en la raíz (vea la figura 12.14).

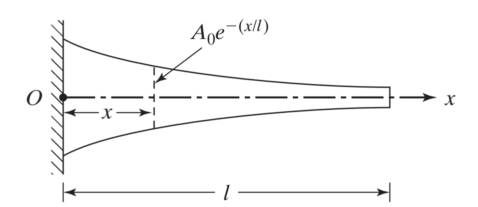


Figura 12.14

12.3 La viga en voladizo ahusada que se muestra en la figura 12.15 se utiliza como una muelle para soportar una carga P. Derive la matriz de rigidez de la viga por medio de una idealización de un elemento. Suponga $B = 25$ cm, $b = 10$ cm, $t = 2.5$ cm, $l = 2$ m, $E = 2.07 \times 10^{11}$ N/m^2 y $P = 1000$ N.

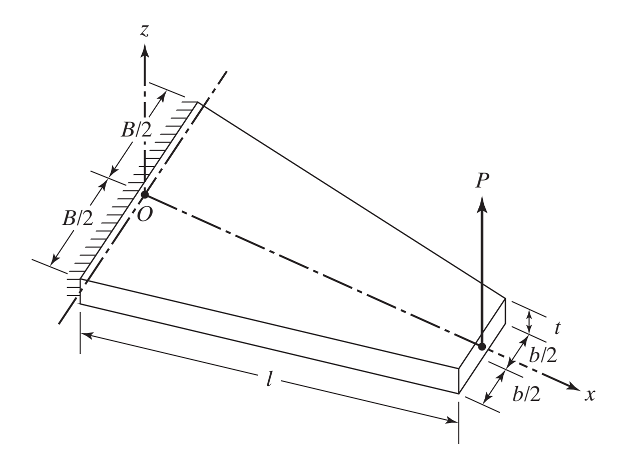


Figura 12.15

12.4 Derive las matrices de rigidez y masa del elemento de armazón plano (elemento de viga general) que se muestra en la figura 12.16 en el sistema de coordenadas XY global.

12.5 En la figura 12.17 se muestra una muelle de hojas múltiples del tipo que se utiliza en automóviles. Se compone de cinco hojas, cada una de espesor $t = 0.25$ pulg. Considere sólo la mitad de la muelle para modelarla por medio de cinco elementos de viga de longitud igual y derive las matrices de rigidez y masa de cada uno de los cinco elementos de viga. El módulo de Young es 30×10^6 lb/pulg^2 y el peso específico es 0.283 lb/pulg^3 para el material.

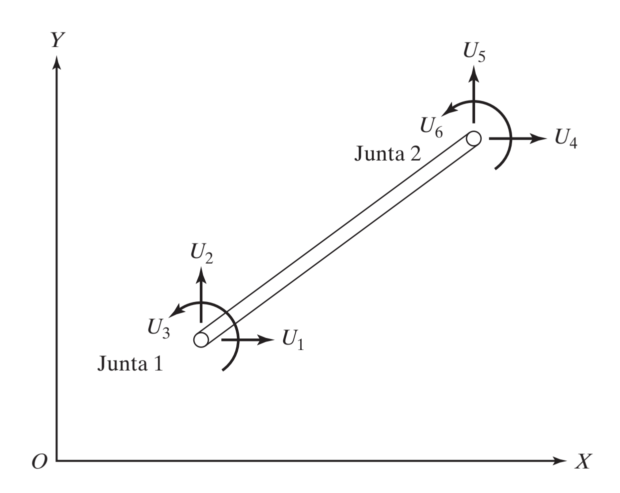


Figura 12.16 Elemento de una estructura en el sistema global.

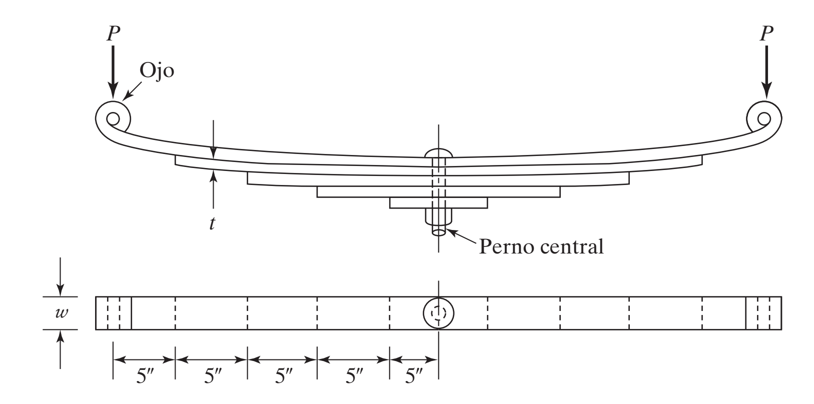


Figura 12.17 Muelle de hojas múltiples.

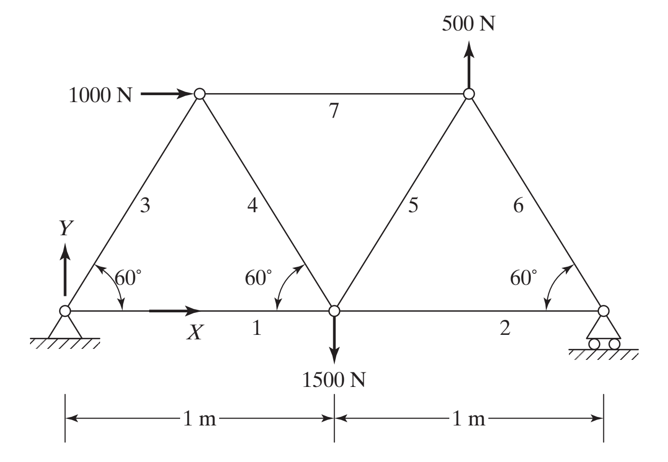


Figura 12.18

12.6 En la figura 12.18 se muestra una armadura plana de siete miembros (con juntas de pasador). Cada uno de los siete miembros tiene un área de sección transversal de 4 cm^2 y un módulo de Young de 207 GPa.

(a) Rotule el conjunto completo de grados de libertad de desplazamiento nodales locales y globales de la armadura. Suponga las coordenadas *X* y *Y* que se muestran en la figura 12.18 como coordenadas globales.

(b) Encuentre la matriz de transformación de coordenadas de cada miembro.

(c) Encuentre las matrices de rigidez local y global de cada miembro.

12.7 Encuentre las matrices de rigidez y masa de la viga soportada por resortes como se muestra en la figura 12.19. Modele la viga mediante un elemento finito. Suponga que el material de la viga es acero con un módulo de Young de 207 GPa y densidad de peso de 7650 N/m³. Ignore los pesos de los resortes.

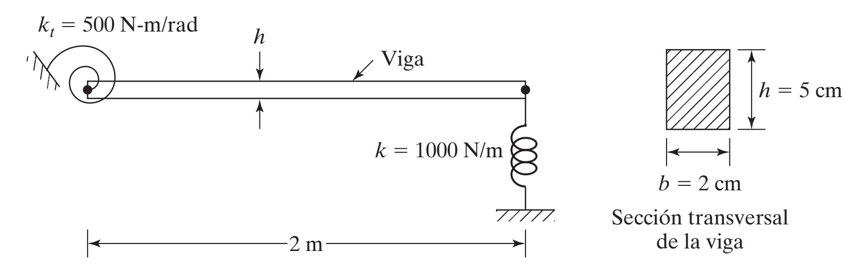


Figura 12.19

12.8 Un extremo (punto A) de la viga que se muestra en la figura 12.20 está fijo y el otro extremo (punto B) está conectado a un sistema de resorte-masa. Suponga que la sección transversal de la viga es circular con radio de 2 cm y que su material es acero con módulo de Young de 207 GPa y densidad de peso de 7650 N/m³. Con dos elementos de longitud igual, derive la matriz de rigidez y masa de los dos elementos.

Sección 12.4 Transformación de matrices y vectores de un elemento

12.9 Determine la matriz de rigidez global de cada uno de los cuatro elementos de la armadura que se muestra en la figura 12.5 utilizando los siguientes datos:

Coordenadas nodales: $(X_1, Y_1) = (0, 0)$, $(X_2, Y_2) = (50, 100)$ pulg, $(X_3, Y_3) = (100, 0)$ pulg, $(X_4, Y_4) = (200, 150)$ pulg.
Áreas de sección transversal: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 2$ pulg².
Módulo de Young de todos los miembros: 30×10^6 pulg².

12.10 Para la armadura plana de siete miembros considerada en el problema 12.6 (figura 12.18), determine la matriz de rigidez ensamblada del sistema antes de aplicar las condiciones límite.

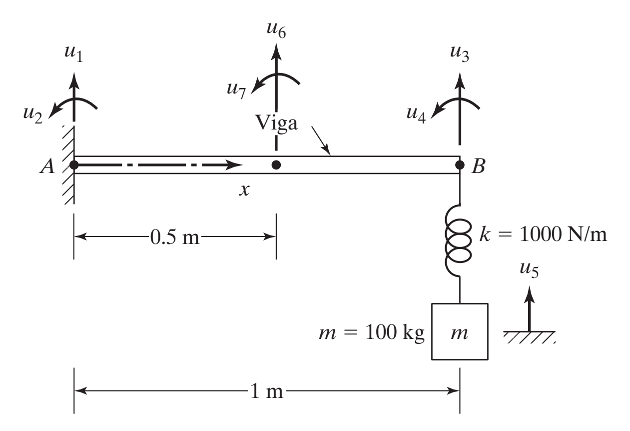


Figura 12.20

Sección 12.5 Ecuaciones de movimiento del sistema completo de elementos finitos

12.11 Con el resultado del problema 12.9, determine la matriz de masa ensamblada de la armadura y formule las ecuaciones de equilibrio si la carga vertical dirigida hacia abajo aplicada en el nodo 4 es de 100 lb.

12.12 Para la viga considerada en el problema 12.8 (figura 12.20), derive las matrices de masa y rigidez ensambladas del sistema.

Sección 12.6 Incorporación de condiciones límite

12.13 Para la viga ahusada considerada en el problema 12.3 (figura 12.15), halle el esfuerzo inducido en la viga mediante una idealización de un elemento.

12.14 Para la muelle de hojas múltiples descrita en el problema 12.5 (figura 12.17), derive las matrices de masa y rigidez ensambladas. Considere sólo la mitad de la muelle para modelarla con cinco elementos de viga de longitud igual.

12.15 Encuentre los desplazamientos nodales de la grúa que se muestra en la figura 12.21, cuando se aplica una carga de 1000 lb verticalmente dirigida hacia abajo en el nodo 4. El módulo de Young es 30×10^6 lb/pulg^2 y el área de sección transversal es de 2 pulg^2 para los elementos 1 y 2 y de 1 pulg^2 para los elementos 3 y 4.

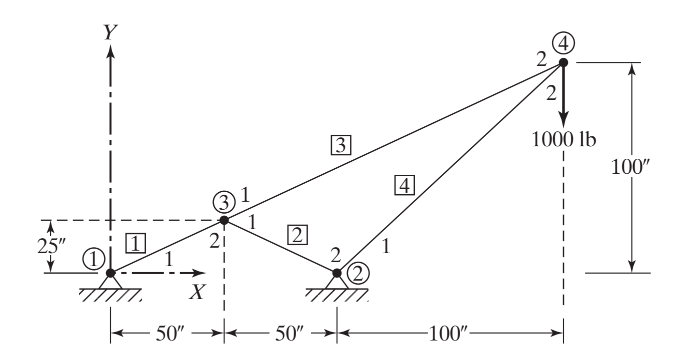


Figura 12.21

12.16 Encuentre la deflexión de la punta de la viga en voladizo que se muestra en la figura 12.22 cuando se aplica una carga vertical $P = 500$ N en el punto Q mediante (a) una aproximación de un elemento, y (b) una aproximación de dos elementos. Suponga $l = 0.25$ m, $h = 25$ mm, $b = 50$ mm, $E = 2.07 \times 10^{11}$ Pa y $k = 10^5$ N/m.

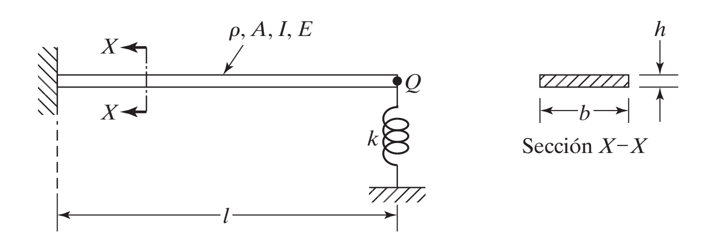


Figura 12.22

12.17 Halle los esfuerzos en la viga escalonada que se muestra en la figura 12.23 cuando se aplica un momento de 1000 N-m en el nodo 2 utilizando una idealización de dos elementos. La viga tiene una sección transversal cuadrada de 50×50 mm entre los nodos 1 y 2, y de 25×25 mm entre los nodos 2 y 3. Suponga el módulo de Young como 2.1×10^{11} Pa.

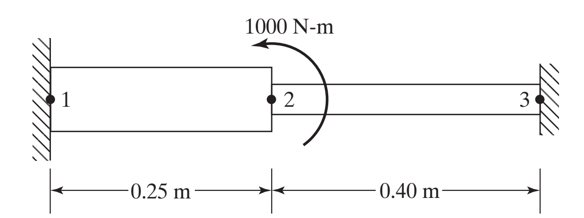


Figura 12.23

12.18 Encuentre la deflexión transversal y pendiente del nodo 2 de la viga que se muestra en la figura 12.24 utilizando una idealización de dos elementos. Compare la solución con la de la teoría de vigas simples.

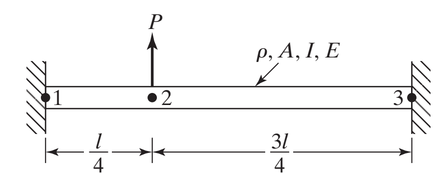


Figura 12.24

12.19 Encuentre el desplazamiento del nodo 3 y los esfuerzos en los dos miembros de la armadura mostrada en la figura 12.25. Suponga que el módulo de Young y las áreas de sección transversal de los dos miembros son los mismos con $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg^2 y $A = 1$ pulg^2.

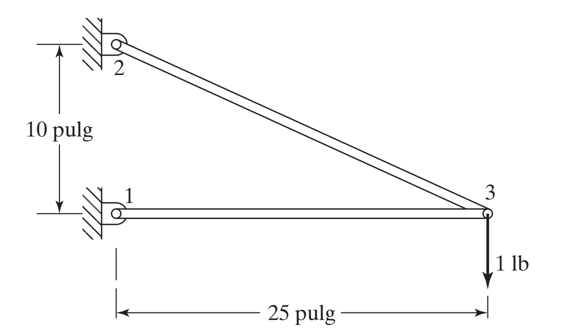


Figura 12.25

12.20 En la figura 12.26 se muestra un modelo simplificado de una máquina perforadora radial. Si una fuerza vertical de 5 000 N a lo largo de la dirección z y un momento de flexión de 500 N-m en el plano xz se desarrollan en el punto A durante una operación de corte de metal, determine los esfuerzos desarrollados en la máquina. Use dos elementos de viga para la columna y un elemento de viga para el brazo. Suponga que el material de la máquina es acero.

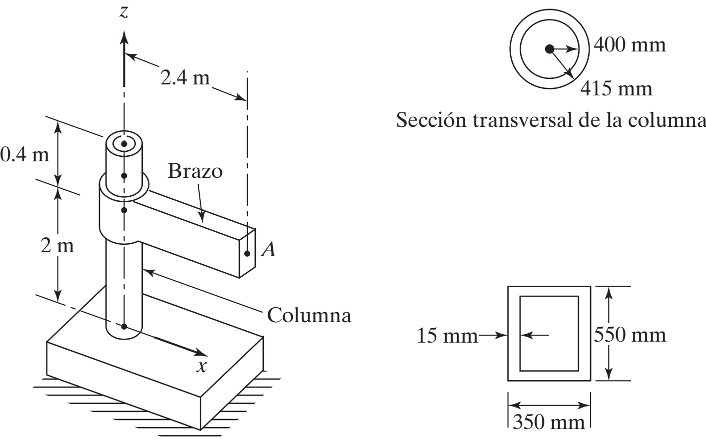


Figura 12.26 Estructura de una máquina perforadora radial.

12.21 La manivela de un mecanismo de corredera y manivela que se muestra en la figura 12.27 gira en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular constante de 1000 rpm. Encuentre los esfuerzos en la biela y manivela cuando la presión que actúa en el pistón es de 200 lb/pulg^2 y $\theta = 30^\circ$. El diámetro del pistón es de 12 pulg y el material del mecanismo es acero. Modele la biela y la manivela mediante un elemento de viga cada uno. La longitud de la manivela y biela son de 12 pulg y 48 pulg, respectivamente.

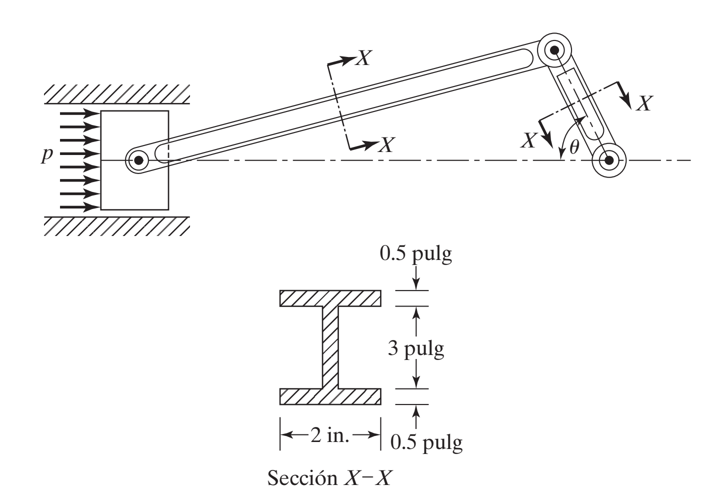


Figura 12.27 Mecanismo de corredera y manivela.

12.22 Un tanque de agua de peso W está sostenido por una columna de acero circular hueca de diámetro interno d, espesor t y altura l. Se puede suponer que la presión del viento que actúa en la columna varía linealmente de 0 a $P_{máx}$ como se muestra en la figura 12.28. Halle el esfuerzo de flexión inducido en la columna por las cargas utilizando una idealización de un elemento de viga. Datos: $W = 10000$ lb, $l = 40$ pies, $d = 2$ pies, $t = 1$ pulg y $P_{máx} = 100$ lb/pulg^2.

12.23 Para la armadura plana de siete miembros considerada en el problema 12.6 (figura 12.18), determine lo siguiente:

(a) La matriz de rigidez del sistema después de aplicar las condiciones límite.

(b) Los desplazamientos nodales de la armadura bajo las cargas indicadas en la figura 12.18.

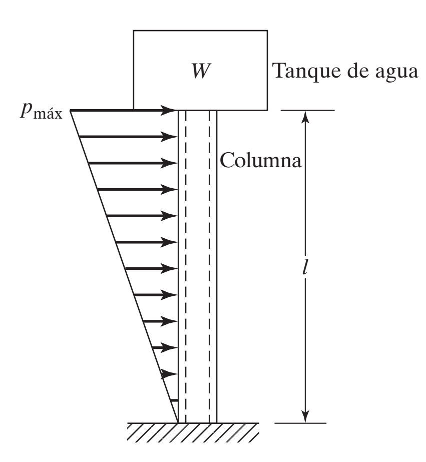


Figura 12.28

12.24 Utilizando un elemento de viga, encuentre las frecuencias naturales de la viga uniforme, que se muestra en la figura 12.29, con un extremo articulado y el otro libre.

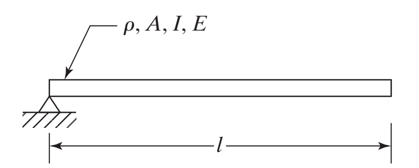


Figura 12.29

12.25 Utilizando un elemento de viga y un elemento de resorte, encuentre las frecuencias naturales de viga en voladizo que se muestra en la figura 12.22, soportada por un resorte.

12.26 Utilizando un elemento de viga y un elemento de resorte, halle las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 12.30.

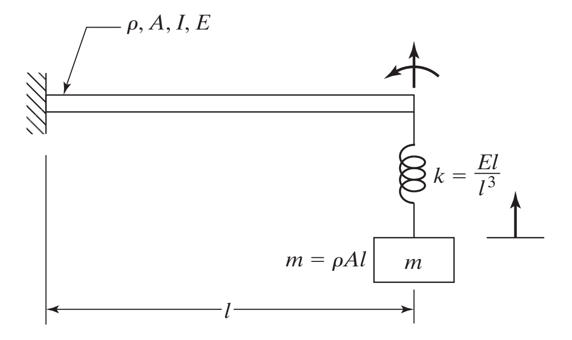


Figura 12.30

12.27 Utilizando dos elementos de viga, encuentre las frecuencias naturales y modos de la viga uniforme con ambos extremos empotrados que se muestra en la figura 12.31.

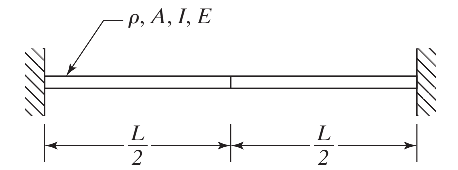


Figura 12.31

12.28*Un motor eléctrico de masa $m = 100$ kg y velocidad de operación = 1800 rpm, está fijo a la mitad de una viga de acero con ambos extremos empotrados de sección transversal rectangular, como se muestra en la figura 12.32. Diseñe la viga de tal modo que la frecuencia natural del sistema exceda la velocidad de operación del motor.

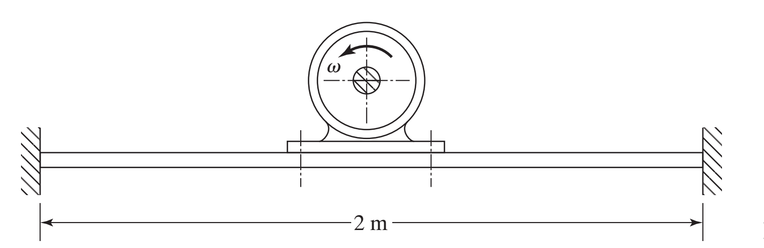


Figura 12.32

12.29 Encuentre las frecuencias naturales de la viga que se muestra en la figura 12.33, utilizando tres elementos finitos de longitud l cada uno.

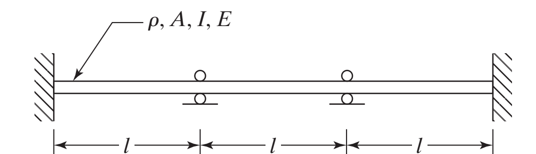


Figura 12.33

12.30 Encuentre las frecuencias naturales de la viga en voladizo que soporta una masa M que se muestra en la figura 12.34, utilizando una idealización de un elemento de viga.

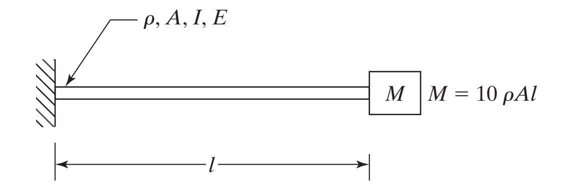


Figura 12.34

12.31 Encuentre las frecuencias naturales de vibración de la viga que se muestra en la figura 12.35, utilizando dos elementos de viga. Halle también el vector de carga si se aplica al elemento 1 una carga p transversal uniformemente distribuida.

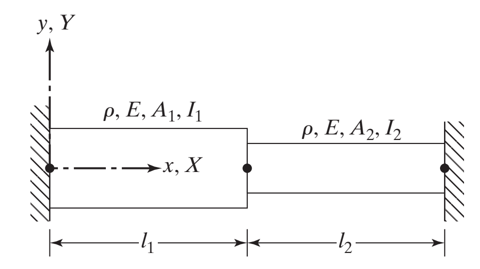


Figura 12.35

* Un asterisco indica un problema sin respuesta única.

12.32 Encuentre las frecuencias naturales de una viga de longitud l, cuyo extremo articulado está conectado en $x = 0$ y el otro extremo fijo en $x = $ l, utilizando un elemento de viga.

12.33 Encuentre las frecuencias naturales de vibración torsional de la flecha escalonada que se muestra en la figura 12.36. Suponga que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $G_1 = G_2 = G$, $I_{p1} = 2I_{p2} = 2I_p$, $J_1 = 2J_2 = 2J$, y $l_1 = l_2 = l$.

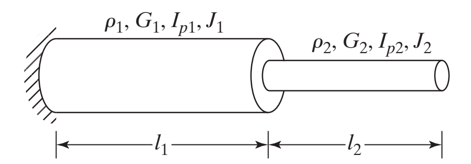


Figura 12.36

12.34 Encuentre la respuesta dinámica de la barra escalonada que se muestra en la figura 12.37(a) cuando el extremo libre se somete a la carga dada en la figura 12.37(b).

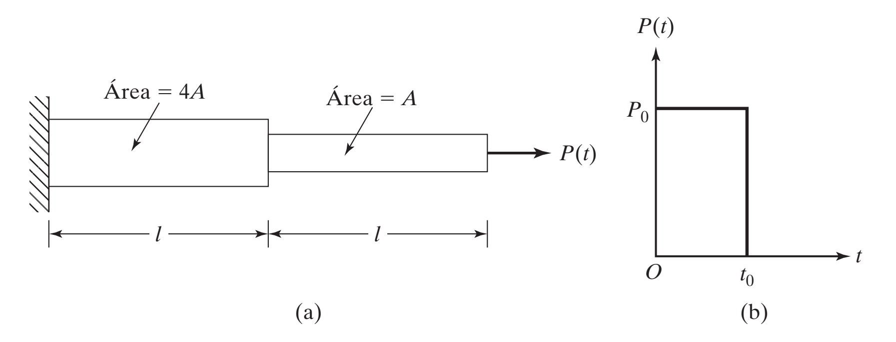


Figura 12.37

12.35 Encuentre las frecuencias naturales de una viga en voladizo de longitud l, área de sección transversal A, momento de inercia I, módulo de Young E y densidad ρ, utilizando un elemento finito.

12.36 Encuentre las frecuencias naturales de la máquina perforadora radial considerada en el problema 12.20 (figura 12.26).

12.37 Encuentre las frecuencias naturales del tanque de agua considerado en el problema 12.22 (figura 12.28) utilizando una idealización de un elemento de viga.

12.38 Encuentre las frecuencias naturales de vibración de la viga considerada en el problema 12.7 utilizando un elemento finito (figura 12.19).

Sección 12.7 Matrices de masa consistente y de masa concentrada

12.39 Derive las matrices de masa consistente y de masa concentrada del elemento de barra ahusada (el cual se deforma en la dirección axial) que se muestra en la figura 12.13. El diámetro de la barra se reduce de D a d a lo largo de su longitud.

12.40 Encuentre las frecuencias de la barra escalonada que se muestra en la figura 12.38 con los siguientes datos y matrices de masa consistente y concentrada: $A_1 = 2$ pulg², $A_2 = 1$ pulg², $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg², $\rho_w = 0.283$ lb/pulg³ y $l_1 = l_2 = 50$ pulg.

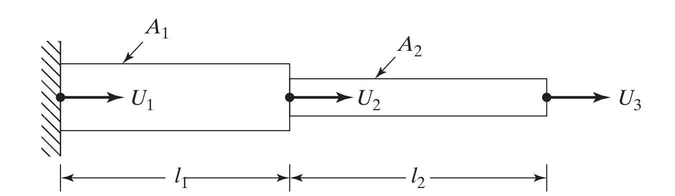


Figura 12.38

12.41 Encuentre las frecuencias naturales no amortiguadas de vibración longitudinal de la barra escalonada que se muestra en la figura 12.39 con los siguientes datos y matrices de masa consistente y concentrada: $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$ m, $A_1 = 2A_2 = 4A_3 = 0.4 \times 10^{-3}$ m^2, $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m^2 y $\rho = 7.8 \times 10^3$ kg/m^3.

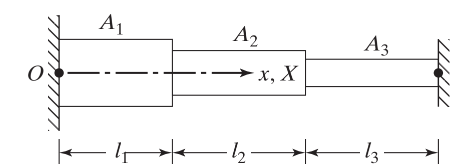


Figura 12.39

Sección 12.8 Ejemplos resueltos utilizando MATLAB

12.42 Considere la barra escalonada que se muestra en la figura 12.11 con los siguientes datos: $A_1 = 25 \times 10^{-4}$ m^2, $A_2 = 16 \times 10^{-4}$ m^2, $A_3 = 9 \times 10^{-4}$ m^2, $E_i = 2 \times 10^{11}$ Pa, $i = 1, 2, 3$, $\rho_i = 7.8 \times 10^3$ kg/m^3, $i = 1, 2, 3$, $l_1 = 3$ m, $l_2 = 2$ m, $l_3 = 1$ m. Utilizando MATLAB, encuentre los desplazamientos axiales u_1, u_2 y u_3 bajo la carga axial $p_3 = 500$ N.

12.43 Utilizando MATLAB, determine las frecuencias naturales y modos de la barra escalonada descrita en el problema 12.42.

12.44 Use **Program17.m** para hallar las frecuencias naturales de una viga escalonada con ambos extremos empotrados, semejante a la que se muestra en la figura 12.12, con los datos siguientes:

Secciones transversales de los elementos: 1, 2, 3: 4″ × 4″, 3″ × 3″, 2″ × 2″

Longitudes de los elementos: 1, 2, 3: 30″, 20″, 10″

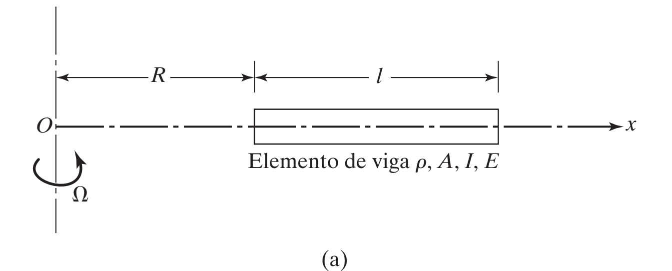
Módulo de Young de todos los elementos: 10^7 lb/pulg^2

Densidad de peso de todos los elementos: 0.1 lb/pulg^3

12.45 Escriba un programa de computadora para encontrar la matriz de rigidez ensamblada de una armadura plana general.

Proyectos de diseño

12.46 Derive las matrices de rigidez y masa de un elemento de viga uniforme en vibración transversal que gira a una velocidad angular de Ω rad/seg con respecto a un eje vertical como se muestra en la figura 12.40(a). Utilizando estas matrices, encuentre las frecuencias naturales de vibración transversal del aspa del rotor de un helicóptero (vea la figura 12.40(b)) que gira a una velocidad de 300 rpm. Suponga una sección rectangular uniforme de 1″ × 12″ y longitud de 48″ para el aspa. El material del aspa es aluminio.



(a)

Aspa del rotor

(b)

Figura 12.40

12.47. Un motor eléctrico que pesa 1000 lb opera en el primer piso de la estructura de un edificio que puede ser modelada por una trabe de acero soportada por dos columnas de concreto reforzado, como se muestra en la figura 12.41. Si la velocidad de operación del motor es de 1500 rpm, diseñe la viga y las columnas de modo que la frecuencia fundamental de vibración de la estructura del edificio sea mayor que la velocidad de operación del motor. Use dos elementos de viga y dos elementos de barra para la idealización. Suponga los datos siguientes:

Trabe: $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg^2	$\rho = 8.8 \times 10^{-3}$ lbm/pulg^3	$h/b = 2$
Columnas: $e = 4 \times 10^6$ lb/pulg^2	$\rho = 2.7 \times 10^{-3}$ lbm/pulg^3	

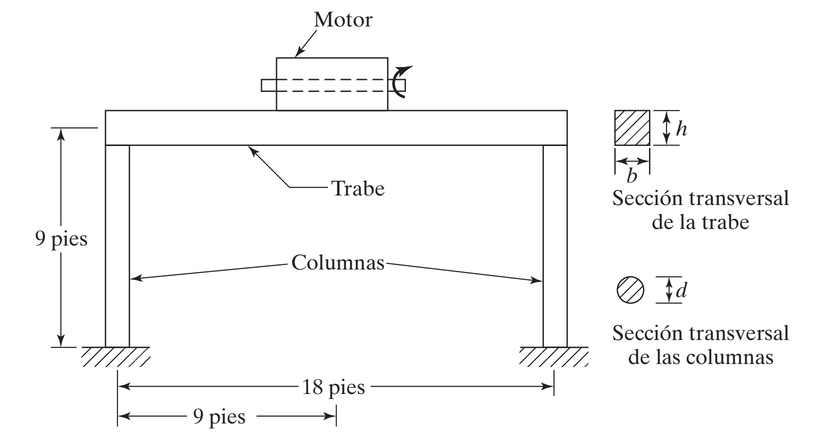


Figura 12.41

APÉNDICE A

Relaciones matemáticas y propiedades de materiales

Jean Le Rond D'Alembert
(1717-1783)

Matemático y físico francés, recién nacido fue abandonado por su madre cerca de la iglesia de Saint Jean Le Rond en París, de ahí su nombre. En 1741 publicó su famosa obra *Traite de Dynamique*, la cual contiene el método que se ha llegado a conocer como principio de D'Alembert. Fue el primero en utilizar ecuaciones diferenciales parciales para la solución de problemas de cuerdas vibratorias. Por su temprana brillantez fue nombrado *secretaire perpetuel* (secretario vitalicio) de la Academia Francesa, puesto que aseguró su lugar como el científico más influyente en Francia. (Ilustración de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

A continuación se presentan algunas relaciones de trigonometría, álgebra y cálculo, cuyo uso es frecuente en el análisis de vibración.

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$A\operatorname{sen}\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\phi_1)$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(\alpha+\phi_2)$$

donde $$\phi_1 = \tan^{-1}\frac{A}{B}, \quad \phi_2 = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Ley de los cosenos para triángulos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$\pi = 3.14159265\ \text{rad}, \quad 1\ \text{rad} = 57.29577951°, \quad 1° = 0.017453292\ \text{rad}$$

$$e = 2.71828183$$

$$\log a^b = b\log a, \quad \log_{10}x = 0.4343\log_e x, \quad \log_e x = 2.3026\log_{10}x$$

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen}x$$

$$\operatorname{sen}x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{senh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx$$

Álgebra compleja:

$$z = x + iy \equiv Ae^{i\theta} \quad \text{con} \quad A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{Si} \quad z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\text{Si} \quad z_1 = A_1 e^{i\theta_1} \quad \text{y} \quad z_2 = A_2 e^{i\theta_2},$$

$$z_1 + z_2 = Ae^{i\theta}$$

$$\text{con } A = \left[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\left[\frac{A_1 \operatorname{sen}\theta_1 + A_2 \operatorname{sen}\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2}\right]$$

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Propiedades de materiales

Material	**Módulo de Young (*E*)**	**Módulo de rigidez (*G*)**	**Relación de Poisson (ν)**	**Peso específico (ρ_w)**
Acero (acero al carbón)	30×10^6 lb/pulg^2; 207 GPa	11.5×10^6 lb/pulg^2; 79.3 GPa	0.292	0.282 lb$_f$/pulg.^{3}; 76.5 kN/m^3
Aluminio (aleaciones de aluminio)	10.3×10^6 lb/pulg^2; 71 GPa	3.8×10^6 lb/pulg^2; 26.2 GPa	0.334	0.098 lb$_f$/pulg.^{3}; 26.6 kN/m^3
Latón	15.4×10^6 lb/pulg^2; 106 GPa	5.8×10^6 lb/pulg^2; 40 GPa	0.324	0.309 lb$_f$/pulg.^{3}; 83.8 kN/m^3
Cobre	17.2×10^6 lb/pulg^2; 119 GPa	6.5×10^6 lb/pulg^2; 44.7 GPa	0.326	0.322 lb$_f$/pulg.^{3}; 87.3 kN/m^3

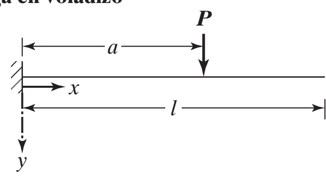
APÉNDICE B

Deflexión de vigas y placas

Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851)

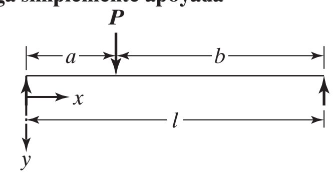
Matemático alemán, se educó en la Universidad de Berlín y fue profesor de tiempo completo en la Universidad de Konigsberg en 1832. El método que desarrolló para determinar la solución eigen de matrices simétricas reales se conoce como método de Jacobi. Hizo contribuciones significativas a los campos de funciones elípticas, teoría de los números, ecuaciones diferenciales y mecánicas e introdujo la definición de jacobiano en la teoría de determinantes. (Cortesía de Dirk. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

Viga en voladizo



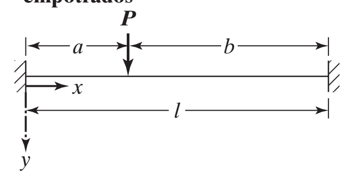
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x); & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pa^2}{6EI}(3x - a); & a \le x \le l \end{cases}$$

Viga simplemente apoyada



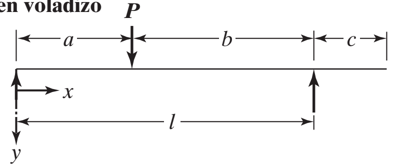
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{Pbx}{6EIl}(l^2 - x^2 - b^2); & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pa(l - x)}{6EIl}(2lx - x^2 - a^2); & a \le x \le l \end{cases}$$

Vigas con ambos extremos empotrados



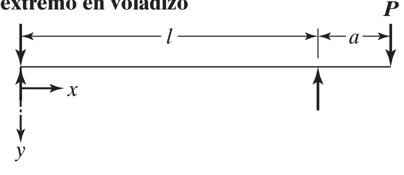
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2x^2}{6EIl^3}[3al - x(3a + b)]; & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pa^2(l - x)^2}{6EIl^3}[3bl - (l - x)(3b + a)]; & a \le x \le l \end{cases}$$

Viga simplemente apoyada con un extremo en voladizo



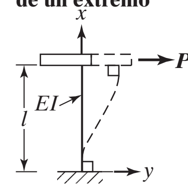
$$y(x) = \begin{cases} \text{Igual que en el caso de una viga simplemente apoyada} \\ \text{para } 0 \le x \le a \;\; \text{y} \;\; a \le x \le l \\ \dfrac{Pa}{6EIl}(l^2 - a^2)(x - l); \quad l \le x \le l + c \end{cases}$$

Viga simplemente apoyada con carga en el extremo en voladizo



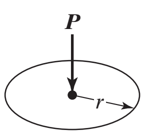
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{Pax}{6EIl}(x^2 - l^2); \quad 0 \le x \le l \\ \dfrac{P(x - l)}{6EIl}[a(3x - l) - (x - l)^2]; \quad l \le x \le l + a \end{cases}$$

Viga doblemente empotrada con desplazamiento de un extremo



$$y(x) = \frac{P}{12EI}(3lx^2 - 2x^3)$$

Placa circular simplemente apoyada

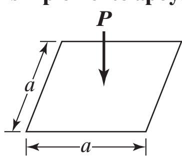


$$y_{\text{central}} = \frac{Pr^2\,(3 + v)}{16\pi D\,(1 + v)}$$

donde $D = \dfrac{Et^3}{12(1 - v^2)}$, t = espesor de la placa

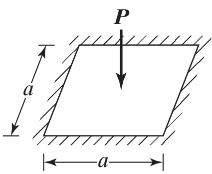
y v = Relación de Poisson

Placa circular fija



$$y_{\text{central}} = \frac{Pr^2}{16\pi D}$$

Placa cuadrada con todos sus lados simplemente apoyados



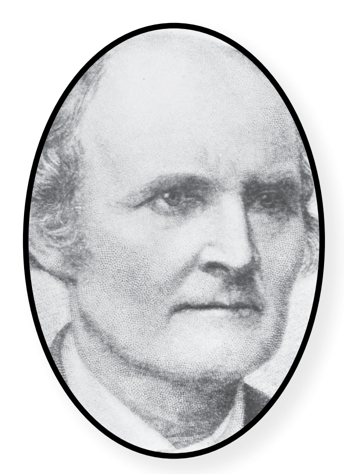
$$y_{\text{central}} = \frac{\alpha Pa^2}{Et^3} \text{ con } \alpha = 0.1267 \text{ para } v = 0.3$$

Placa cuadrada con todos sus lados fijos

$$y_{\text{central}} = \frac{\alpha Pa^2}{Et^3} \text{ con } \alpha = 0.0611 \text{ para } v = 0.3$$

APÉNDICE C

Matrices



Arthur Cayley
(1821-1895)

Matemático británico y profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge. Su obra más importante, producida junto con James Joseph Sylvester fue el desarrollo de la teoría de los invariantes, la cual tuvo un rol crucial en la teoría de la relatividad. Realizó importantes contribuciones a la geometría de n dimensiones e inventó y desarrolló la teoría de matrices. (Fotografía cortesía de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

C.1 Definiciones

Matriz. Conjunto rectangular de números. Un conjunto de m filas y n columnas encerrado entre paréntesis rectangulares se conoce como matriz de m por n. Si $[A]$ es una matriz de $m \times n$, se indica como

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

donde los números a_{ij} se denominan *elementos* de la matriz. El primer subíndice i indica la fila y el segundo subíndice j especifica la columna en las cuales aparece el elemento a_{ij}.

Matriz cuadrada. Cuando la cantidad de filas (m) es igual a la de columnas (n), la matriz se llama *matriz cuadrada de orden n*.

Matriz columna. Matriz constituida por una sola columna, es decir, una matriz $m \times 1$, se llama *matriz columna* o más comúnmente *vector columna*. Por lo tanto, si $\vec{a}$ es un vector columna de m elementos, se puede representar como

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{Bmatrix} \tag{C.2}$$

Matriz fila. Matriz compuesta de sólo una fila, es decir, una matriz de $1 \times n$, se llama *matriz fila* o *vector fila*. Si [*b*] es un vector fila, se puede indicar como

$$\lfloor b \rfloor = [b_1 \;\; b_2 \;\; \cdot \;\cdot \;\cdot \;\; b_n] \tag{C.3}$$

Matriz diagonal. Una matriz cuadrada en la cual todos los elementos son cero excepto los que están situados en la diagonal principal se llama *matriz diagonal*. Por ejemplo, si [*A*] es una matriz diagonal de orden *n*, se representa como

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{C.4}$$

Matriz identidad. Si todos los elementos de una matriz diagonal tienen un valor de 1, entonces la matriz se llama *matriz identidad* y por lo común se indica como [*I*].

Matriz cero. Si todos los elementos de una matriz son cero, se llama *matriz cero* o *nula* y se indica como [0]. Si [0] es de orden 2×4, se expresa como

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

Matriz simétrica. Si el elemento en la fila *i*-ésima y la columna *j*-ésima es el mismo que en la fila *j*-ésima y la columna *i*-ésima en una matriz cuadrada, se llama *matriz simétrica*. Esto significa que si [*A*] es una matriz simétrica tenemos que $a_{ji} = a_{ij}$. Por ejemplo,

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

es una matriz simétrica de orden 3.

Transpuesta de una matriz. La transpuesta de una matriz $m \times n$ $[A]$ es la matriz $n \times m$ que se obtuvo al intercambiar las filas y columnas de $[A]$ y se indica como $[A]^T$. Por lo tanto si

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

entonces $[A]^T$ está dada por

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

Observe que la transpuesta de la matriz columna (vector) es una matriz fila (vector), y viceversa.

Traza. La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada $[A] = [a_{ij}]$ se llama la *traza* de $[A]$ y resulta de

$$\text{Traza}[A] = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{C.9}$$

Determinante. Si $[A]$ indica una matriz cuadrada de orden n, entonces el determinante de $[A]$ se indica como $|[A]|$. Por lo tanto

$$|[A]| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{C.10}$$

El valor de un determinante se puede hallar al obtener los menores y cofactores del determinante.

El *menor* del elemento a_{ij} del determinante $|[A]|$ de orden n es un determinante de orden $(n - 1)$ obtenido eliminando la fila i y la columna j del determinante original. El menor de a_{ij} se indica como M_{ij}.

El *cofactor* del elemento a_{ij} del determinante $|[A]|$ de orden n es el menor del elemento a_{ij} con un signo más o un signo menos adjunto; se define como

$$\text{cofactor de } a_{ij} = \beta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{C.11}$$

donde M_{ij} es el menor de a_{ij}. Por ejemplo, el cofactor del elemento a_{32} de

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{C.12}$$

está dado por

$$\beta_{32} = (-1)^5 M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{C.13}$$

El valor de un determinante $|[A]|$ de segundo orden se define como

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{C.14}$$

El valor de un determinante $|[A]|$ de orden *enésimo* se define como

$$\det[A] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij} \text{ para cualquier fila específica } i$$

o

$$\det[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij} \text{ para cualquier columna específica } j \tag{C.15}$$

Por ejemplo, si

$$\det[A] = |[A]| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \tag{C.16}$$

entonces, al seleccionar la primera columna para expansión, obtenemos

$$\begin{aligned} \det[A] &= 2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2(45 - 48) - 4(18 - 24) + 7(12 - 15) = -3 \end{aligned} \tag{C.17}$$

Propiedades de los determinantes

1. El valor de un determinante no se ve afectado si las filas (o columnas) se escriben como columnas (o filas) en el mismo orden.
2. Si todos los elementos de una fila (o una columna) son cero, el valor del determinante es cero.
3. Si dos filas (o dos columnas) se intercambian, el valor del determinante se multiplica por -1.
4. Si todos los elementos de una fila (o una columna) se multiplican por la misma constante a, el valor del nuevo determinante es a veces el valor del determinante original.
5. Si los elementos correspondientes de dos filas (o dos columnas) de un determinante son proporcionales, el valor del determinante es cero. Por ejemplo,

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \tag{C.18}$$

Matriz adjunta. La matriz adjunta de una matriz cuadrada $[A] = [a_{ij}]$ se define como la matriz obtenida al reemplazar cada elemento a_{ij} por su cofactor β_{ij} y luego transponerla. Por lo tanto

$$\text{adjunta de } [A] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(C.19)}$$

Matriz inversa. La inversa de una matriz cuadrada $[A]$ se escribe como $[A]^{-1}$ y se define por la siguiente relación:

$$[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [I] \quad \text{(C.20)}$$

donde $[A]^{-1}[A]$, por ejemplo, indica el producto de la matriz $[A]^{-1}$ y $[A]$. La matriz inversa de $[A]$ se determina como sigue (vea la referencia [A.1]):

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adjunta de } [A]}{\det[A]} \quad \text{(C.21)}$$

cuando $\det[A]$ no es igual a cero. Por ejemplo, si

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(C.22)}$$

su determinante tiene un valor $\det[A] = -3$. El cofactor de a_{11} es

$$\beta_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad \text{(C.23)}$$

De una manera semejante, podemos hallar los otros cofactores y determinar

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adjunta de } [A]}{\det[A]} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad \text{(C.24)}$$

Matriz singular. Se dice que una matriz cuadrada es singular si su determinante es cero.

C.2 Operaciones básicas con matrices

Igualdad de matrices. Dos matrices $[A]$ y $[B]$ del mismo orden, son iguales si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todas las i y j.

Suma y resta de matrices. La suma de dos matrices $[A]$ y $[B]$ del mismo orden se obtiene sumando los elementos correspondientes. Por lo tanto si $[C] = [A] + [B] = [B] + [A]$, tenemos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

para todas las i y j. Asimismo, la diferencia entre dos matrices [A] y [B] del mismo orden, [D], se expresa como [D] = [A] − [B] con $d_{ij} = a_{ij} - b_{\text{ij}}$ para todas las i y j.

Multiplicación de matrices. El producto de dos matrices [A] y [B] se define sólo si son conformables, es decir, si la cantidad de columnas de [A] es igual al número de filas de [B]. Si [A] es de orden $m \times n$ y [B] es de orden $n \times p$, entonces el producto [C] = [A] [B] es de orden $m \times p$ y está definido por [C] = [c_{ij}], con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{C.25}$$

Esto significa que c_{ij} es la cantidad que se obtiene al multiplicar la fila i-ésima de [A] por la columna j-ésima de [B] y sumando estos productos. Por ejemplo, si

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{C.26}$$

entonces

$$\begin{aligned} [C] = [A][B] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 8 + 3 \times 2 + 4 \times (-1) & 2 \times 0 + 3 \times 7 + 4 \times 4 \\ 1 \times 8 + (-5) \times 2 + 6 \times (-1) & 1 \times 0 + (-5) \times 7 + 6 \times 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & 37 \\ -8 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.27}$$

Si las matrices son conformables, el proceso de multiplicación es asociativo

$$([A][B])[C] = [A]([B][C]) \tag{C.28}$$

y es distributivo

$$([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C] \tag{C.29}$$

El producto [A][B] indica la premultiplicación de [B] por [A] o la premultiplicación de[A] por [B]. Es de notar que el producto [A][B] no es necesariamente igual a [B][A].

La transpuesta de un producto de matrices es el producto de la transpuesta de las matrices en orden inverso. Por lo tanto, si [C] = [A][B].

$$[C]^T = ([A][B])^T = [B]^T[A]^T \tag{C.30}$$

El inverso del producto de matrices se determina a partir del producto de la inversa de las matrices en orden inverso. Por lo tanto, si $[C] = [A][B]$,

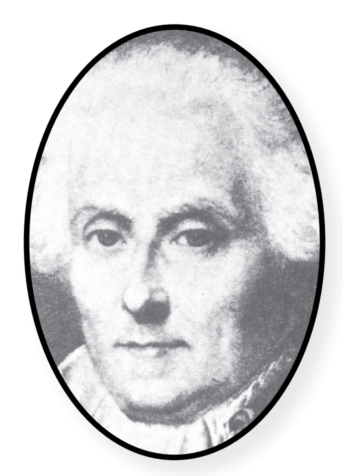
$$[C]^{-1} = ([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} \tag{C.31}$$

Referencia

C.1 Barnett, *Matrix Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, Nueva York, 1982

APÉNDICE D

Transformada de Laplace



Pierre Simon Laplace
(1749-1827)

Matemático francés recordado por sus contribuciones fundamentales a la teoría de probabilidad, física matemática y mecánica celeste. El nombre Laplace aparece tanto en ingeniería mecánica como en ingeniería eléctrica. Las transformadas de Laplace se utilizan mucho en vibraciones y en la mecánica aplicada, y la ecuación de Laplace se aplica extensamente en el estudio de campos eléctricos y magnéticos. (Cortesía de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 2a. ed., Dover Publications, Nueva York, 1948).

El método de la transformada de Laplace es un método poderoso para resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes, en particular cuando la función forzada aparece en la forma de funciones discontinuas (las cuales no son fáciles de resolver mediante otros métodos). Este apéndice presenta una breve descripción del método de la transformada de Laplace. La idea básica es transformar una ecuación diferencial en una ecuación de tipo polinomial y luego utilizar la transformada de Laplace para obtener la solución del problema original.

D.1 Definición

Si una función $f(t)$ está definida para todos los valores de tiempo positivos, $t \geq 0$, la transformada de Laplace $f(t)$ indicada, $\mathscr{L}[f(t)]$, se define como

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-est} f(t)\, dt \tag{D.1}$$

donde e^{-est} se conoce como núcleo de la transformada y s es una variable subsidiaria, llamada variable de Laplace, que en general es una cantidad compleja.

Notación: Las funciones originales dependen de t y sus transformadas de Laplace dependen de s. Las funciones originales se indican por medio de letras minúsculas en tanto que sus transformadas de Laplace se indican por medio de las mismas letras mayúsculas. Por ejemplo, las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $y(t)$ se indican como $F(s)$ y $Y(s)$, respectivamente. La transformada de Laplace de $\alpha f(t)$ donde α es una constante está dada por $\alpha F(s)$. Asimismo, la transformada de Laplace de una suma lineal de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$, está dada por

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s) \tag{D.2}$$

Transformada inversa de Laplace:

Para encontrar la función original $f(t)$ de la función transformada $F(s)$, tenemos que utilizar la transformada inversa de Laplace que se define como

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{est}\, ds = f(t)u(t) \tag{D.3}$$

donde $u(t)$ es la función escalonada unitaria definida como

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \tag{D.4}$$

y σ es un valor seleccionado a la derecha de todas las singularidades de $F(s)$ en el plano s. En la práctica, rara vez se utiliza la ecuación (D.3). En cambio, las transformadas de Laplace de expresiones complejas se descomponen en expresiones más simples, para las cuales las transformadas inversas de Laplace se encuentran en tablas de transformadas de Laplace.

D.2 Transformada de derivadas

Mientras se aplican las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, tenemos que utilizar las transformadas de Laplace de derivadas de varios órdenes de una función. La transformada de Laplace de la primera derivada de $f(t)$ se define como

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-est} \frac{df(t)}{dt} dt \tag{D.5}$$

Si utilizamos integración por partes, la ecuación (D.5) se expresa como

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = e^{-est} f(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-se^{-est}) f(t)\, dt = -f(0) + sF(s) \tag{D.6}$$

donde $f(0)$ es el valor inicial de $f(t)$, es decir, el valor de $f(t = 0)$. Utilizando un método parecido, la transformada de Laplace de la segunda derivada de $f(t)$ se define como

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \int_0^\infty e^{-est}\frac{d^2f(t)}{dt^2}dt \tag{D.7}$$

La ecuación (D.7) se puede simplificar para obtener

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2F(s) \tag{D.8}$$

donde $\dot{f}(0)$ es el valor de $\dfrac{df}{dt}$ en el instante $t = 0$. Utilizando un método semejante, la transformada de Laplace de la derivada *enésim*a de $f(t)$ se puede hallar como

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] \equiv \mathcal{L}[f^{(n)}] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \ldots - sf^{(n-1)}(0) \tag{D.9}$$

donde $f^{(n)}$ se utiliza para denotar la derivada *enésima* de $f, \dfrac{d^nf}{dt^n}$.

D.3 Teoremas de desplazamiento o traslación

En algunas aplicaciones, la función $f(t)$ aparece junto con el término e^{at} como $f(t)\,e^{at}$, donde a es un número real o complejo. La transformada de Laplace de este producto, $F_1(s)$, está dada por

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f(t)e^{at}] = \int_0^\infty \{f(t)e^{at}\}e^{-est}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)}\,dt \equiv F(s-a) \tag{D.10}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = F(s-a) \tag{D.11}$$

Esto muestra que el efecto de multiplicar la función $f(t)$ por e^{at} es desplazar la transformada de Laplace de $f(t)$ por la cantidad a en el dominio s. El resultado indicado por la ecuación (D.11) se conoce como *teorema de desplazamiento*.

D.4 Método de fracciones parciales

En algunos problemas, la función $F(s)$ es de la forma

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{D.12}$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios en s y el grado de $A(s)$ suele ser mayor que el de $B(s)$. La transformada inversa de $F(s)$ se puede simplificar si el lado derecho de la ecuación (D.12) se expande en fracciones parciales. Para aplicar la técnica de expansión en fracciones parciales, primero tenemos que conocer las raíces del denominador, $A(s)$.

Cuando todas las raíces de $A(s)$ son distintas: Sean $-p_1$, $-p_2$, ..., $-p_n$ las raíces, también llamadas polos, de $A(s)$. En ese caso la ecuación (D.12) se puede expresar como

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{D.13}$$

donde a_k es una constante desconocida, llamada *residuo*, en el polo $s = -p_k$, $k = 1, 2, ..., n$. El valor de a_k se determina multiplicando ambos lados de la ecuación (D.13) por $(s + p_k)$ y si hacemos $s = -p_k$ de modo que

$$a_k = \left\{(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right\}_{s=-p_k} \tag{D.14}$$

Observe que $f(t)$ es una función de tiempo t; si las raíces p_1 y p_2 de $A(s)$ son conjugados complejos, entonces los residuos o constantes correspondientes a_1 y a_2 también serán conjugados complejos. Una vez que la expansión en fracciones parciales de $F(s)$, ecuación (D.13), se conoce, se puede determinar la transformada de Laplace de $F(s)$ por medio de relaciones del tipo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t} \tag{D.15}$$

Por lo tanto, $f(t)$ se puede hallar como

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \tag{D.16}$$

Cuando $A(s)$ implica múltiples raíces: Si el polinomio $A(s)$ tiene múltiples raíces de orden k en $s = -p_1$, lo que implica que $F(s)$ tiene un polo de orden k en $-p_1$ además de las raíces simples en $-p_2$, $-p_3$, ..., $-p_n$ antes consideradas. Por lo tanto, $A(s)$ se puede expresar como

$$A(s) = (s + p_1)^k (s + p_2)(s + p_3)\ldots(s + p_n) \tag{D.17}$$

La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ se escribe en la forma

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} &= \frac{a_{11}}{(s + p_1)^k} + \frac{a_{12}}{(s + p_1)^{k-1}} + \cdots \\ &+ \frac{a_{1k}}{(s + p_1)} + \frac{a_2}{s + p_2} + \frac{a_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \end{aligned} \tag{D.18}$$

Se puede comprobar que las constantes a_{11}, a_{12}, ..., a_{1k} se pueden determinar como

$$a_{1r} = \frac{1}{(1 - r)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s + p_1)^k F(s)]_{s=-p_1}; \qquad r = 1, 2, \ldots, k \tag{D.19}$$

Observando que

$$\mathcal{L}[t^{r-1}] = \frac{(r-1)!}{s^r} \tag{D.20}$$

la transformada inversa de Laplace de los términos debido al polo de mayor orden se puede obtener, utilizando el teorema de desplazamiento, como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+p_1)^r}\right] = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-p_1 t} \tag{D.21}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ dada por la ecuación (D.18) se escribe como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[a_{11}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + a_{12}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + a_{1k}\right]e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \tag{D.22}$$

D.5 Integral de convolución

Si dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, definidas para $t > 0$, poseen las transformadas de Laplace $F_1(s)$ y $F_2(s)$, respectivamente. Entonces consideremos la función $f(t)$ definida de varias maneras como

$$f(t) = f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{D.23}$$

Esta función $f(t)$ se llama *convolución* de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ durante el intervalo $0 < t < \infty$. Observe que los límites superiores de las integrales en la ecuación (D.23) son intercambiables porque $f_2(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$, lo que es lo mismo que $t - \tau < 0$. La transformada de Laplace de la ecuación (D.23) se puede expresar como

$$F(s) = \mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \tag{D.24}$$

donde

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f_1(\tau)\,d\tau, \qquad F_2(s) = \int_0^\infty e^{-s\sigma}f_2(\sigma)\,d\sigma \tag{D.25}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (D.24) está dada por

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \tag{D.26}$$
$$= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Ejemplo D.1

Expanda la función $F(s) = \dfrac{4s+7}{(s+3)(s+4)^2}$ mediante fracciones parciales.

Solución: La expansión en fracciones parciales de la función $F(s)$ se puede expresar como

$$F(s) = \frac{4s+7}{(s+3)(s+4)^2} = \frac{C_1}{(s+3)} + \frac{C_2}{(s+4)} + \frac{C_3}{(s+4)^2} \tag{E.1}$$

donde las constantes C_i, $i = 1, 2, 3$, se evalúan como

$$C_1 = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \frac{4s+7}{(s+4)^2}\Big|_{s=-3} = -5 \tag{E.2}$$

$$C_2 = \frac{d}{dx}[(s+4)^2F(s)]\Big|_{s=-4} = \frac{d}{dx}\left[\frac{4s+7}{s+3}\right]\Big|_{s=-4} = \frac{(s+3)4-(4s+7)1}{(s+3)}\Big|_{s=-4} = 5 \tag{E.3}$$

$$C_3 = [(s+4)^2F(s)]\Big|_{s=-4} = \left[\frac{4s+7}{s+3}\right]\Big|_{s=-4} = 9 \tag{E.4}$$

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{4s+7}{(s+3)(s+4)^4} = -\frac{5}{(s+3)} + \frac{5}{(s+4)} - \frac{9}{(s+4)^2} \tag{E.5}$$

La expansión en fracciones parciales también se puede realizar con la función "residue" (residuo) de MATLAB como sigue

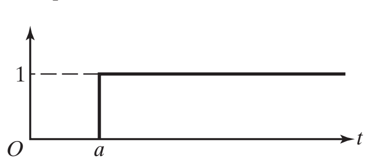
```
num = [4 7];                      % coeficientes del polinomio en el numerador
den = conv[1 3],[1 8 8];          % coeficientes de los dos polinomios en el denominador
[r, p, k] = residue(num, den)     % calcular residuo e imprimir el resultado
R = [−5 5 9]', p = [−3 −4 −4] y k = [].
```

Se ve que este resultado es igual al calculado antes.

A continuación se da una pequeña tabla de pares de transformada de Laplace.

■

Pares de transformada de Laplace	
Dominio de Laplace	**Dominio del tiempo**
$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$	$f(t)$
1. $c_1F(s) + c_2G(s)$	$c_1f(t) + c_2g(t)$
2. $F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(a \cdot t)a$
3. $F(s)G(s)$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$
4. $s^nF(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\frac{d^{j-1}f}{dt^{j-1}}(0)$	$\frac{d^nf}{dt^n}(t)$
5. $\frac{1}{s^n}F(s)$	$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n} f(\tau)\,d\tau \cdots d\tau$
6. $F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$
7. $\frac{1}{s^{n+1}}$	$t^n;\ n = 1, 2, \ldots, t$
8. $\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
9. $\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
10. $\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
11. $\frac{s+a}{s^2}$	$1 + at$
12. $\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{-at})$
13. $\frac{s+b}{s(s+a)}$	$\frac{b}{a}\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)e^{-at}\right\}$
14. $\frac{a}{s^2+a^2}$	sen at
15. $\frac{s}{s^2+a^2}$	cos at
16. $\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$	$1 -$ cos at
17. $\frac{s}{s^2-a^2}$	cosh at
18. $\frac{a}{s^2-a^2}$	senh at
19. $\frac{a(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	at cos at

Pares de transformada de Laplace	
Dominio de Laplace	**Dominio del tiempo**
$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	$f(t)$
20. $\dfrac{2sa^2}{(s^2 + a^2)^2}$	at sen at
21. $\dfrac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
22. $\dfrac{b}{(s + a)^2 + b^2}$	e^{-at} sen bt
23. $\dfrac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{(b - a)}$
24. $\dfrac{s + w}{(s + a)(s + b)}$	$\dfrac{\{(w - a)e^{-at} - (w - b)e^{-bt}}{(b - a)}$
25. $\dfrac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \dfrac{e^{-bt}}{(a - b)(c - b)} + \dfrac{e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
26. $\dfrac{s + w}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\dfrac{(w - a)e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \dfrac{(w - b)e^{-bt}}{(a - b)(c - b)} + \dfrac{(w - c)e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
27.* $\dfrac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}$ sen $\omega_d t$
28. $\dfrac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\dfrac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}$ sen$(\omega_d t - \phi_1)$
29.* $\dfrac{s + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\dfrac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}$ sen$(\omega_d t + \phi_1)$
30.* $\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \dfrac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}$ sen$(\omega_d t + \phi_1)$
31.* $\dfrac{s + \zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$e^{-\zeta\omega_n t}$ sen$(\omega_d t + \phi_1)$
32. 1	Impulso unitario en el instante $t = 0$
33. $\dfrac{e^{-as}}{s}$	 Función escalón unitaria en el instante $t = a$

$^*\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2};\ \zeta < 1$
$\phi_1 = \cos^{-1}\zeta;\ \zeta < 1$

APÉNDICE E

Unidades

Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

Físico alemán y profesor de física en el Instituto Politécnico en Karlsruhe y después en la Universidad de Bonn, se hizo famoso por sus experimentos con ondas de radio. Sus investigaciones en el campo de la elasticidad son una parte relativamente muy pequeña de sus logros aunque son de vital importancia para los ingenieros. Su trabajo sobre el análisis de cuerpos elásticos en contacto se conoce como "Esfuerzos hertzianos", y es muy importante en el diseño de rodamientos de bolas y rodillos. La unidad de frecuencia de fenómenos periódicos, medidos en ciclos por segundo, recibe el nombre de hertz en unidades SI. (Fotografía cortesía de *Applied Mechanics Reviews*).

Actualmente, el sistema inglés de unidades está siendo reemplazado por el Sistema Internacional de unidades (SI). El sistema SI es la versión modernizada del sistema métrico de unidades. Su nombre en francés es Système International; de ahí la abreviatura *SI*. El sistema SI tiene siete unidades básicas. Todas las demás unidades se pueden derivar de estas siete (E.1-E.2]. Las tres unidades básicas de interés en el estudio de vibraciones son el metro para longitud, el kilogramo para masa y el segundo para tiempo.

Los prefijos comunes para múltiplos y submúltiplos de unidades SI se dan en la tabla E.1. En el sistema SI, las unidades deben abreviarse con cuidado. Por ejemplo, un par de torsión de 4 N × 2 m se debe expresar como 8 N m u 8 N • m con un espacio o un punto entre N y m. No se debe escribir Nm. Otro ejemplo es 8 m × 5 s = 40 m s o 40 m • s o 40 metros-segundos. Si se escribe como 40 ms, significa 40 milisegundos.

Conversión de unidades

Para convertir las unidades de cualquier cantidad dada de un sistema a otro, utilizamos la equivalencia de unidades de la tabla E.2. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento.

Tabla E.1 Prefijos para múltiplos y submúltiplos de unidades SI

Múltiplo	Prefijo	Símbolo	Submúltiplo	Prefijo	Símbolo
10	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p

Tabla E.2 Conversión de unidades

Cantidad	Equivalencia en el sistema SI	Equivalencia en el sistema inglés
Masa	$1\ lb_f\text{-}seg^2/pie\,(slug) = 14.5939$ kg	$1\ kg = 2.204623\ lb_m$
	$= 32.174\ lb_m$	
	$1\ lb_m = 0.45359237$ kg	$= 0.06852178$ slug
		$(lb_f\text{-}sec^2/pie)$
Longitud	1 pulg = 0.0254 m	1 m = 39.37008 pulg.
	1 pie = 0.3048 m	= 3.28084 pie
	1 milla = 5280 pie = 1.609344 km	1 km = 3280.84 pie = 0.621371 milla
Área	$1\ pulg^2 = 0.00064516\ m^2$	$1\ m^2 = 1550.0031\ pulg^2$
	$1\ pie^2 = 0.0929030\ m^2$	$= 10.76391\ pie^2$
Volumen	$1\ pulg^3 = 16.3871 \times 10^{-6}\ m^3$	$1\ m^3 = 61.0237 \times 10^3\ pulg^3$
	$1\ pie^3 = 28.3168 \times 10^{-3}\ m^3$	$= 35.3147\ pie^3$
	1 US gallon = 3.7853 litros	$= 10^3$ litros = 0.26418 US gallon
	$= 3.7853 \times 10^{-3}\ m^3$	
Fuerza o peso	$1\ lb_f = 4.448222$ N	$1\ N = 0.2248089\ lb_f$
Par de torsión o momento	$1\ lb_f\text{-}pulg = 0.1129848$ Nm	$1\ N \cdot m = 8.850744\ lb_f\text{-}pulg$
	$1\ lb_f\text{-}pie = 1.355818\ N \cdot m$	$= 0.737562\ lb_f\text{-}pie$
Esfuerzo, presión o	$1\ lb_f/pulg^2\,(psi) = 6894.757$ Pa	$1\ Pa = 1.450377 \times 10^{-4}\ lb_f/pulg^2\,(psi)$
módulo elástico	$1\ lb_f/pie^2 = 47.88026$ Pa	$= 208.8543 \times 10^{-4}\ lb_f/pie^2$
Densidad de masa	$1\ lb_m/pulg^3 = 27.6799 \times 10^3\ kg/m^3$	$1\ kg/m^3 = 36.127 \times 10^{-6}\ lb_m/pulg^3$
	$1\ lb_m/pie^3 = 16.0185\ kg/m^3$	$= 62.428 \times 10^{-3}\ lb_m/pie^3$

Ejemplo E.1 Momento de inercia de masa:

$$\begin{pmatrix}\text{Momento de inercia}\\ \text{de masa en unidades}\\ \text{SI}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Momento de inercia}\\ \text{de masa en unidades}\\ \text{inglesas}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Factor}\\ \text{de}\\ \text{multiplicación}\end{pmatrix}$$

$$(\text{kg}\cdot\text{m}^2) \equiv (\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2) = \left(\frac{\text{N}}{\text{lb}_\text{f}}\cdot\text{lb}_\text{f}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{pulg}}\cdot\text{pulg}\right)(\text{seg}^2)$$

$$= (\text{N por 1 lb}_\text{f})(\text{m por 1 pulg})(\text{lb}_\text{f}\text{-pulg-seg}^2)$$

$$= (4.448222)(0.0254)(\text{lb}_\text{f}\text{-pulg-seg}^2)$$

$$= 0.1129848\ (\text{lb}_\text{f}\text{-pulg-seg}^2)$$

■

Ejemplo E.2 Esfuerzo:

$$(\text{Esfuerzo en unidades SI}) = (\text{Esfuerzo en unidades inglesas}) \times \begin{pmatrix}\text{Factor de}\\ \text{multiplicación}\end{pmatrix}$$

$$(\text{Pa}) \equiv (\text{N/m}^2) = \left(\frac{\text{N}}{\text{lb}_\text{f}}\cdot\text{lb}_\text{f}\right)\frac{1}{\left(\frac{\text{m}}{\text{pulg}}\cdot\text{pulg}\right)^2} = \frac{\text{N}}{\text{lb}_\text{f}}\frac{1}{\left(\frac{\text{m}}{\text{pulg}}\right)^2}(\text{lb}_\text{f}/\text{pulg}^2)$$

$$= \frac{(\text{N por 1 lb}_\text{f})}{(\text{m por 1 pulg})^2}\ (\text{lb}_\text{f}/\text{pulg}^2)$$

$$= \frac{(4.448222)}{(0.0254)^2}(\text{lb}_\text{f}/\text{pulg}^2)$$

$$= 6894.757\ (\text{lb}_\text{f}/\text{pulg}^2)$$

■

Referencias

E.1 E. A. Mechtly, “The International System of Units”, (2a. ed. rev.), NASA SP-7012, 1973.

E.2 C. Wandmacher, *Metric Units in Engineering—Going SI*, Industrial Press, Nueva York, 1978.

APÉNDICE F

Introducción a MATLAB

Thomas Young
(1773-1829)

Físico y médico británico. Introdujo el módulo de Young y el principio de interferencia luminosa. Estudió medicina y se tituló en 1796. Fue nombrado profesor de Filosofía Natural en la Royal Institution en 1801, pero renunció en 1803 ya que sus conferencias eran decepcionantes para el grueso del público. En 1811 se unió al hospital St. George en Londres como médico, donde continuó hasta su muerte. Young hizo muchas contribuciones a la mecánica. Fue el primero en utilizar los términos "energía" y "trabajo consumido" (es decir, trabajo realizado) para las cantidades mv^2 y Fx, respectivamente, donde m es la masa del cuerpo, v es la velocidad, F es una fuerza y x es la distancia recorrida por F y para expresar que los dos términos son proporcionales entre sí. Definió el término *módulo* (el cual llegó a ser conocido como *módulo de Young*) como el peso que duplicaría la longitud de una barra de sección transversal unitaria.

MATLAB, derivado de MATriz LABoratory es un paquete de "software" que se puede utilizar para solucionar varios problemas científicos y de ingeniería, incluyendo ecuaciones algebraicas lineales, ecuaciones no lineales, diferenciación e integración numéricas, ajuste de curvas, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, optimización y trazo de gráficas. Utiliza notación matricial de forma extensa; de hecho, el único tipo de datos en MATLAB es una matriz de valores complejos. Por lo tanto, maneja escalares, vectores y matrices de valores reales y enteros como casos especiales de matrices complejas. El programa se puede utilizar para ejecutar una sola instrucción o una lista de instrucciones, llamada *archivo de comandos*. MATLAB ofrece excelentes capacidades de trazo de gráficas y programación. También se puede utilizar para resolver muchos tipos de problemas de forma simbólica. Se pueden realizar cálculos sencillos introduciendo una instrucción, semejante a lo que se hace con una calculadora en la ventana de comandos. Los símbolos que se deben utilizar para las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación son +, −, *, / y ^, respectivamente. En cualquier expresión, los cálculos se realizan de izquierda a derecha, con la exponenciación que tiene la más alta prioridad, seguida por la multiplicación y división (con igual prioridad) y luego la suma y la resta (con igual prioridad). Utiliza el símbolo *log* para indicar el logaritmo natural (ln). MATLAB utiliza una doble precisión durante los cálculos pero imprime los resultados en la pantalla en un formato más corto. Esta opción preestablecida se puede cambiar utilizando el comando *format*.

F.1 Variables

Los nombres de variables en MATLAB deben comenzar con una letra y pueden tener una longitud de hasta 31 caracteres con cualquier combinación de letras, dígitos y guiones bajos. Las letras mayúsculas y minúsculas se tratan por separado. Como ya antes se enunció, MATLAB trata todas las variables como matrices, aunque las cantidades escalares no se tienen que dar como arreglos.

F.2 Arreglos y matrices

El nombre de una matriz se debe iniciar con una letra y le puede seguir cualquier combinación de letras y dígitos. Las letras pueden ser mayúsculas o minúsculas. Antes de realizar operaciones aritméticas como suma, resta, multiplicación y división en matrices, habrá que crear las matrices aplicando instrucciones como las siguientes:

Vector fila

$$\gg A = [1 \quad 2 \quad 3];$$

Un vector fila se trata como una matriz 1 por *n*; sus elementos se encierran entre paréntesis rectangulares y se separan por espacios o comas. Observe que el indicador de línea de comandos en la versión profesional de MATLAB es ≫ en tanto que en la edición estudiantil de MATLAB es EDU ≫. Si al final de un renglón no se escribe un punto y coma, MATLAB muestra en pantalla los resultados del renglón.

Vector columna

$$\gg A = \begin{matrix}[1 \\ 2 \\ 3]\end{matrix} \quad \text{o} \quad A = [1; \;\; 2; \;\; 3] \quad \text{o} \quad A = [1 \quad 2 \quad 3]';$$

Un vector columna se trata como una matriz *n* por 1. Sus elementos pueden ser ingresados en renglones diferentes o en un solo renglón utilizando un punto y coma para separarlos, o en un solo renglón utilizando un vector fila con una prima en el paréntesis del lado derecho (para indicar la transpuesta).

Matriz

Para definir la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

se puede utilizar la siguiente especificación:

$$\gg A = \begin{matrix}[1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 9]\end{matrix} \quad \text{o} \quad \text{A} = [1 \quad 2 \quad 3; \;\; 4 \quad 5 \quad 6; \;\; 7 \quad 8 \quad 9];$$

F.3 Arreglos con estructura especial

En algunos casos se utiliza la estructura especial de un arreglo para especificarlo en una forma más simple. Por ejemplo, $A = 1{:}10$ indica un vector fila

$$A = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10]$$

y A = 2:0.5:4 representa el vector fila

$$A = [2.5\ \ 3.0\ \ 3.5\ \ 4.0]$$

F.4 Matrices especiales

Algunas de las matrices especiales se identifican como sigue:

$\gg A =$ eye (3); implica una matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\gg A =$ ones (3); implica una matriz cuadrada de orden 3 con todos los elementos iguales a uno,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\gg A =$ zeros(2, 3); implica una matriz 2×3 con todos los elementos iguales cero,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F.5 Operaciones con matrices

Para sumar las matrices [A] y [B] para obtener [C], utilizamos la instrucción

$$\gg C = A + B;$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales $[A]\vec{X} = \vec{B}$, definimos la matriz A y el vector B y utilizamos la siguiente instrucción:

$$\gg X = A \backslash B$$

F.6 Funciones en MATLAB

MATLAB contiene muchas funciones integradas, como las siguientes:

Raíz cuadrada de x: sqrt(x)

Seno de x: sen(x)

Logaritmo de x base 10: log10(x)

Función gama de x: gamma(x)

Para generar un nuevo vector de 11 valores dado por la función $y = e^{-2x} \cos x$ con $x = 0.0, 0.1, ..., 1.0$, escribimos lo siguiente:

$\gg x = [0{:}\ 0.1{:}\ 1];$
$\gg y = \exp(-2*x).*\cos(x).;$

F.7 Números complejos

MATLAB considera automáticamente el álgebra de números complejos. Se puede utilizar el símbolo i o j para representar la parte imaginaria sin necesidad de un asterisco entre i o j y un número. Por ejemplo, $a = 1 - 3i$ es un número complejo con partes real e imaginaria iguales a 1 y -3, respectivamente. La magnitud y ángulo de un número complejo se determinan por medio de las instrucciones

```
>> a = 1 - 3i;
>> abs (a)
ans =
    ...
>> angle (a)
ans =
    ... (en radianes)
```

F.8 Archivos M

MATLAB se puede utilizar de un modo interactivo escribiendo cada comando desde el teclado. En este modo, MATLAB realiza las operaciones como una calculadora. Sin embargo, hay situaciones en las que este modo de operación es deficiente. Por ejemplo, si los mismos conjuntos de comandos se tienen que repetir varias veces con diferentes valores de los parámetros de entrada, desarrollar un programa MATLAB será más rápido y más eficiente.

Un programa MATLAB se compone de una secuencia de instrucciones MATLAB escritas fuera de MATLAB y luego ejecutadas en MATLAB como un solo bloque de comandos. Dicho programa se conoce como *archivo de comandos* (*scrip file*) o *archivo M*. Es necesario nombrar el archivo de comandos. El nombre debe terminar con **.m** (un punto (.) seguido por la letra **m**). A continuación se presenta un archivo *M* típico (llamado **fibo.m**):

```
file "fibo.m"
% archivo-m para calcular números Fibonacci
f=[1 1];
i=1;
while f(i)+f(i+1)<1000
    f(i+2)=f(i)+f(i+1);
    i=i+1;
end
```

También se puede utilizar un archivo *M* para escribir subrutinas de función. Por ejemplo, la solución de una ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

se puede determinar utilizando el siguiente programa:

```
% roots_quadra.m (Nota: El renglón que comienza con % indica un renglón
de comentario)
function [x1, x2] = roots_quadra(A, B, C)
% det = determinant
det = ^2 - 4 * A * C;
if (det < 0.0);
    x1 = (-B + j * sqrt(-det))/(2 * A);
    x2 = (-B - j * sqrt(-det))/(2 * A);
    disp('Las raíces son conjugados complejos');
elseif (abs(det) < 1e-8); % det = 0.0
    x1 = -B / (2 * A);
    x2 = -B / (2 * A);
    disp('Las raíces son idénticas');
else (det > 0);
    x1 = (-B + sqrt(det))/(2 * A);
    x2 = (-B - sqrt(det))/(2 * A);
    disp('Las raíces son reales y distintas');
end
```

El programa **`roots_quadra.m`** se puede utilizar para determinar las raíces de una ecuación cuadrática con $A = 2$, $B = 2$, $C = 1$, por ejemplo, como sigue:

```
Las raíces son conjugados complejos

x1 =
   -0.5000 + 0.5000i

x2 =
   -0.5000 - 0.5000i
```

F.9 Trazo de gráficas

Para trazar una gráfica en MATLAB, definimos un vector de valores de la variable independiente *x* (matriz *x*) y un vector de valores de la variable dependiente correspondiente a los valores de *x* (matriz *y*). Entonces, la gráfica se puede trazar utilizando el comando

```
plot (x,y)
```

Como un ejemplo, se pueden utilizar los siguientes comandos para trazar la función $y = x^2 + 1$ en el rango $0 \leq x \leq 3$:

```
x = 0 : 0.2 : 3;
y = x² + 1;
plot (x,y);
hold on
x1 = [0 3];
y1 = [0 0];
plot (x1,y1);
grid on
hold off
```

Observe que los dos primeros renglones se utilizan para generar las matrices *x* y *y* (con incrementos de 0.2 para *x*); el tercer renglón traza la gráfica (utilizando líneas rectas entre los puntos indicados); los seis renglones siguientes permiten trazar los ejes *x* y *y* junto con el trazo de la cuadrícula (usando el comando **`grid on`**).

F.10 Raíces de ecuaciones no lineales

Para hallar las raíces de ecuaciones no lineales, se puede utilizar la función MATLAB **`fzero(y,x1).`** Aquí **`y`** define la función no lineal y **`x1`** indica el cálculo inicial (valor de inicio) de la raíz. Las raíces de polinomios se pueden determinar aplicando la función **`roots(p)`** donde **`p`** es un vector fila de coeficientes del polinomio en orden descendente de la potencia de la variable.

```
>> f='tan (x)-tanh (x)'

f =

tan (x)-tanh (x)

>> root=fzero(f,1.0)

root =

    1.5708

>> roots([1 0 0 0 0 0 -2])

ans =

   -1.1225
  -0.5612 +0.9721i
  -0.5612 -0.9721i
   0.5612 +0.9721i
   0.5612 -0.9721i
   1.1225

>>
```

F.11 Solución de ecuaciones algebraicas lineales

Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas $[A]\vec{x} = \vec{b}$ se puede resolver utilizando MATLAB de dos maneras diferentes: determinando $\vec{x}$ como $[A]^{-1}\vec{b}$ o hallar $\vec{x}$ directamente como se indica por los siguientes ejemplos:

```
>> A=[4 -3 2; 2 3 1; 5 4 7]
A =
      4   -3   2
      2    3   1
      5    4   7

>> b=[16; -1; 18]

b =

    16
   -1
    18
>> C=inv(A)
```

```
C =

   0.2099    0.3580    -0.1111
  -0.1111    0.2222     0.0000
  -0.0864   -0.3827     0.2222

>> x=C*b

x =

1.0000
-2.0000
3.0000

>> x=A\b

x =

1.0000
-2.0000
3.0000

>>
```

F.12 Solución del problema de valor eigen

Un problema algebraico de valor eigen se define como $[A]\vec{X} = \lambda\vec{X}$, donde $[A]$ es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, $\vec{X}$ es un vector columna de tamaño n y λ es un escalar. Para cualquier matriz dada $[A]$, la solución se puede hallar utilizando dos tipos de comandos. El uso del comando **`b = eig(A)`** proporciona los valores eigen de la matriz $[A]$ como elementos del vector d. El uso del comando **`[V,D] = eig(A)`** produce los valores eigen como elementos diagonales de la matriz $[D]$ y los vectores eigen como columnas correspondientes de la matriz $[V]$. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento:

```
>> A=[2 1 3 4; 1 -3 1 5; 3 1 6 -2; 4 5 -2 -1]

A =

      2     1     3     4
      1    -3     1     5
      3     1     6    -2
      4     5    -2    -1

>> b=eig(A)

b=

7.9329
5.6689
-1.5732
-8.0286

>> [V, d] = eig(A)

V =

0.5601    0.3787    0.6880    0.2635
0.2116    0.3624   -0.6241    0.6590
0.7767   -0.5379   -0.2598   -0.1996
0.1954    0.6602   -0.2638   -0.6756
```

```
d =

7.9329        0         0         0
     0   5.6689         0         0
     0        0   -1.5732         0
     0        0         0   -8.0286

>>
```

F.13 Solución de ecuaciones diferenciales

MATLAB contiene varias funciones o resolvedores, basados en el uso de métodos Runge-Kutta, que se pueden utilizar para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Observe que una ecuación diferencial ordinaria de orden *enésimo* se tiene que convertir en un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden antes de utilizar funciones MATLAB. La función MATLAB **ode23** ejecuta una combinación de métodos de Runge-Kutta de segundo y tercer orden, en tanto que la función **ode45** está basada en una combinación de métodos de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $\dot{y} = f(t, y)$ por medio de la función MATLAB **ode23**, se puede utilizar el siguiente comando:

```
>>[t,y] = ode('dfunc',tspan,y0)
```

donde **'dfunc'** es el nombre de la función **m-file** cuyos datos de entrada deben ser **t** y **y**, y cuyo resultado debe ser un vector columna que indique dy/dt, es decir, **f(t,y)**. La cantidad de filas en el vector columna debe ser igual a la de ecuaciones de primer orden. El vector **tspan** debe contener los valores iniciales y finales de la variable independiente **t** y, opcionalmente, cualesquiera valores intermedios de **t** a los cuales se desea la solución. El vector **y0** debe contener los valores iniciales de **y(t)**. Observe que la función **m-file** debe tener dos argumentos de entrada **t** y **y** incluso si la función **f(t,y)** no implicara **t.** Se puede seguir un procedimiento semejante con la función **ode45** de MATLAB**.**

Como un ejemplo, considere la solución de la ecuación diferencial con $c = 0.1$ y $k = 10.0$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c\,\frac{dy}{dt} + ky = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Esta ecuación se puede escribir como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden introduciendo

$$y_1 = y$$

y

$$y_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$$

ya que

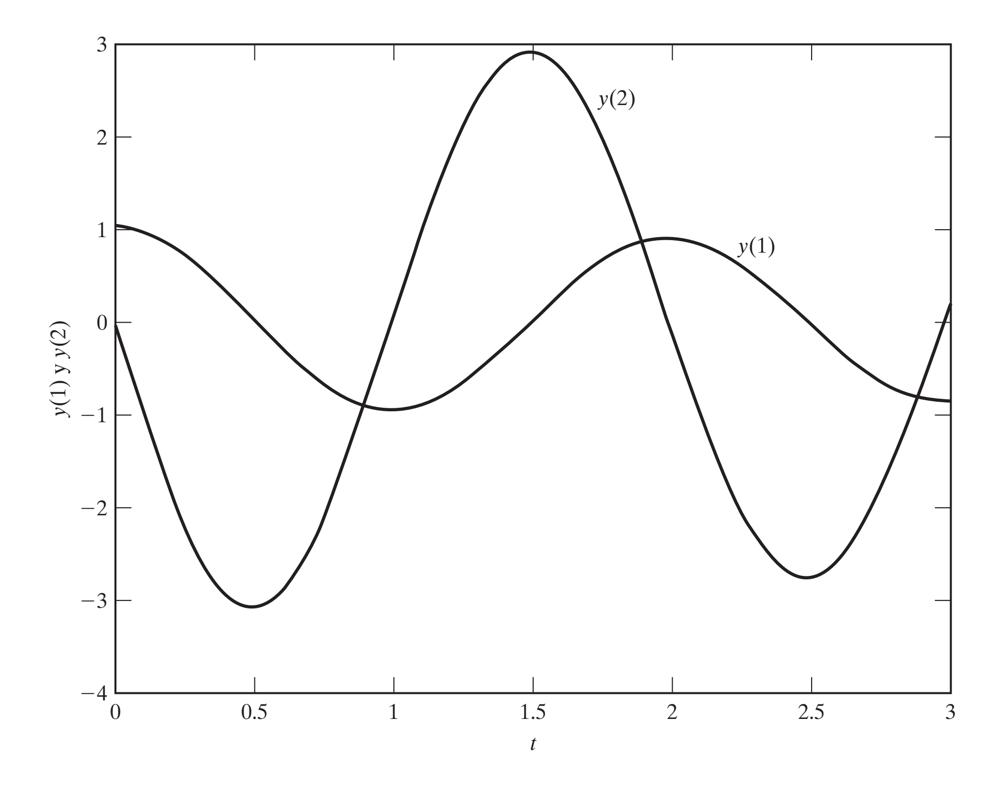
$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1(t, \vec{y}) \\ f_2(t, \vec{y}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ -cy_2 - ky_1 \end{Bmatrix}$$

con

$$\vec{y}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El siguiente programa MATLAB encuentra la solución de las ecuaciones diferenciales anteriores:

```
% ProbappendixF.m
tspan = [0: 0.05: 3];
y0 = [1; 0];
[t,y] = ode23 ('dfunc', tspan, y0);
[t y]
plot (t, y(:,1));
xlabel ('t');
ylabel ('y(1) and y(2)')
gtext ('y(1)');
hold on
plot (t,y (:,2));
gtext ('y(2)');

%dfunc.m
function f = dfunc(t,y)
f = zeros (2,1);

f(1) = y(2);
f(2) = -0.1 * y(2) - 10.0 * y(1);
>> ProbappendixF
ans =

       0    1.0000         0
  0.0500    0.9875   -0.4967
  0.1000    0.9505   -0.9785
  0.1500    0.8901   -1.4335
  0.2000    0.8077   -1.8505
  0.2500    0.7056   -2.2191
  0.3000    0.5866   -2.5308
  0.3500    0.4534   -2.7775
  0.4000    0.3098   -2.9540
  0.4500    0.1592   -3.0561
  0.5000    0.0054   -3.0818
  0.5500   -0.1477   -3.0308
  .
  .
  .
  2.7500   -0.6380   -1.8279
  2.8000   -0.7207   -1.4788
  2.8500   -0.7851   -1.0949
  2.9000   -0.8296   -0.6858
  2.9500   -0.8533   -0.2617
  3.0000   -0.8556    0.1667
```



y(2)
y(1)
y(1) y y(2)
t
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

1.7 $k_{eq} = \dfrac{k_2 k_3 k_4 k_5 + 2k_1 k_3 k_4 k_5 + k_1 k_2 k_4 k_5 + 2k_1 k_2 k_3 k_5}{(k_2 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_5 + 2k_1 k_3 k_4 + 2k_1 k_3 k_5 + k_1 k_2 k_4 + k_1 k_2 k_5 + 2k_1 k_2 k_3)}$

1.11 **(a)** $k = 37.08 \times 10^7$ N/m, **(b)** $k = 12.36 \times 10^7$ N/m, **(c)** $k = 4.12 \times 10^7$ N/m

1.15 $k_{eq} = 253.75$ lb/pulg **1.17** $k_{eq} = 3k\cos^2\alpha$ **1.21** $k_{eq} = 2\gamma A$

1.24 $l_{eq} = \dfrac{4t(d+t)}{Dd}$ **1.29** $k = \dfrac{p\gamma A^2}{v}$ **1.32** $k = 77.4414$ N/m **1.36** $F(x) = (32000x - 80)$ N

1.39 $k_{eq} = \dfrac{1}{l}(E_s A_s + E_a A_a)$ **1.43** **(a)** $k_{t_{eq}} = 5.54811 \times 10^6$ N-m/rad, **(b)** $k_{t_{eq}} = 5.59597 \times 10^6$ N-m/rad

1.45 **(a)** $k_{eq} = 89.931$ lb/pulg **(b)** $k_{eq} = 3.0124$ lb/pulg **1.47** $k_{axial} = 16{,}681.896$ lb/pulg; $k_{torsión} = 139.1652$ lb-pulg/rad

1.49 $m_{eq} = m_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + m_2 + J_0\left(\dfrac{1}{b^2}\right)$ **1.52** $m_{eq} = m_h + \dfrac{J_b}{l_3^2} + J_c\left[\dfrac{l_2}{l_3 r_c}\right]^2$

1.55 **(a)** $c_{eq} = c_1 + c_2 + c_3$, **(c)** $c_{eq} = c_1 + c_2\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2 + c_3\left(\dfrac{l_3}{l_1}\right)^2$,

(b) $\dfrac{1}{c_{eq}} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} + \dfrac{1}{c_3}$, **(d)** $c_{teq} = c_{t1} + c_{t2}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2 + c_{t_3}\left(\dfrac{n_1}{n_3}\right)^2$

1.59 $c_t = \dfrac{\pi\mu D^2(l-h)}{2d} + \dfrac{\pi\mu D^3}{32h}$ **1.64** $c = 3{,}225.8$ N-s/m **1.71** $c = 4205.64$ N-s/m

1.76 $A = 4.4721, \theta = -26.5651°$ **1.78** $z = 11.1803\, e^{0.1798\, i}$ **1.81** $X = 9.8082$ mm, $Y = 9.4918$ mm, $\phi = 39.2072°$

1.85 $x_2(t) = 6.1966 \operatorname{sen}(\omega t + 83.7938°)$ **1.87** No armónico

1.90 $X = 2.5$ mm, $\omega = 5.9092$ rad/seg, $\omega + \delta\omega = 6.6572$ rad/seg **1.92** $A = 0.5522$ mm, $\dot{x}_{máx} = 52.04$ mm/seg

1.104 $x_{rcm} = X/\sqrt{2}$ **1.108** $x(t) = \dfrac{A}{\pi} + \dfrac{A}{2}\operatorname{sen}\omega t - \dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\dfrac{\cos n\omega t}{(n^2-1)}$ **1.110** $x(t) = \dfrac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\operatorname{sen} n\omega t}{n^2}$

1.114 $p(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cos m\omega t + b_m \operatorname{sen} m\omega t]$ lb/pulg^2 donde $a_0 = 50, a_1 = 31.8309, a_2 = 0, a_3 = -10.6103$, $b_1 = 31.8309, b_2 = 31.8309, b_3 = 10.6103$

1.117 $a_0 = 19.92, a_1 = -20.16, a_2 = 3.31, a_3 = 3.77;\; b_1 = 23.52, b_2 = 12.26, b_3 = -0.41$

Capítulo 2

2.2 **(a)** 0.1715 seg, **(b)** 0.2970 seg **2.4** 0.0993 seg

2.6 **(a)** $A = 0.03183$ m, **(c)** $\ddot{x}_{máx} = 0.31415$ m/s^2,
(b) $\dot{x}_0 = 0.07779$ m/s, **(d)** $\phi_0 = 51.0724°$

2.8 $\omega_n = 22.1472$ rad/seg **2.10** $\omega_n = 4.8148$ rad/seg **2.13** $\omega_n = [k/(4m)]^{1/2}$

2.15 **(a)** $\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{M}}$, **(b)** $\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m + M}}$ **2.17** $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{W}\left(\frac{3E_1I_1}{l_1^3} + \frac{48E_2I_2}{l_2^3}\right)}$

2.19 $k = 52.6381$ N/m, $m = 1/3$ kg **2.21** **(a)** $\omega_n = \sqrt{\frac{kg \operatorname{cosec}^2 \theta}{W}}$, **(b)** $\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$

2.23 **(a)** $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$, **(b)** $\omega_n = \sqrt{\frac{8m}{b^2}\left[l^2 - \frac{b^2}{4}\right]}$ **2.26** **(a)** $m\ddot{x} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)Tx = 0$, **(b)** $\omega_n = \sqrt{\frac{T(a + b)}{mab}}$

2.28 $T = 1656.3147$ lb **2.30** **(a)** $N = 81.914$ rpm, **(b)** $\omega_n = 37.5851$ rad/seg **2.32** $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

2.34 $A = 0.9536 \times 10^{-4}$ m^2 **2.37** Torsión con respecto al eje z **2.39** $\omega_n = 2578.9157$ rad/seg

2.42 $\mu = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 Wc - 2kgc}{Wg + Wa\omega^2 - 2kga}\right)}$ **2.44** $m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$ **2.47** $\left(m + \frac{J_0}{r^2}\right)\ddot{x} + 16kx = 0$

2.49 $\omega_n = 359.6872$ rad/seg **2.51** $x(t) = 0.1 \cos 15.8114t + 0.3162 \operatorname{sen} 15.8114t$ m

2.53 $x_0 = 0.007864$ m; $\dot{x}_0 = -0.013933$ m/s **2.55** $\dot{x}_0 = 4$ m/s **2.57** $d = 0.1291$ pulg, $N = 29.58$

2.64 $\omega_n = 2$ rad/s, $l = 2.4525$ m **2.66** $\tau_n = 1.4185$ seg **2.68** $\omega_n = 13.4841$ rad/seg

2.70 $\tau_n = 0.04693$ seg **2.72** $\omega_n = 17.7902$ rad/seg **2.74** $\omega_n = \left\{\frac{(k_1 + k_2)(R + a)^2}{1.5mR^2}\right\}^{1/2}$

2.76 $\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + (k_t + k_1a^2 + k_2l^2)\theta = 0$ **2.86** $m_{eff} = \frac{17}{35}m$ **2.88** $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m}}$

2.91 45.1547 rad/seg **2.93** $\omega_n = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho_w h}}$ **2.95** $\omega_n = \sqrt{\frac{16kr^2}{mr^2 + J_0}}$ **2.98** **(a)** 14265.362, **(b)** 3.8296

2.100 $x_{máx} = \left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)e^{-(\dot{x}_0/(\dot{x}_0 + \omega_n x_0))}$ **2.103** **(a)** $c_c = 1000$ N-s/m, **(b)** $\omega_d = 8.6603$ rad/seg, **(c)** $\delta = 3.6276$

2.105 $\theta = 0.09541°$ **2.107** $\zeta = 0.013847$ **2.109** $m = 500$ kg, $k = 27066.403$ N/m

2.112 $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ **2.116** $\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = 0$ **2.118** $\rho_0 = 2682.8816$ kg/m^3

2.120 **(a)** $J_0 = 1.9436 \times 10^{-4}$ N-m-s^2, **(c)** $c_t = 5.3887 \times 10^{-4}$ N-m-s/rad,
(b) $\tau_n = 1.8297$ seg, **(d)** $k_t = 2.2917 \times 10^{-3}$ N-m/rad

2.121 **(a)** $\zeta = 0.75$, $\omega_d = 6.6144$ rad/s, **(b)** $\zeta = 1.0$, $\omega_d = 0$, **(c)** $\zeta = 1.25$

2.123 **(a)** 60.8368 J, **(b)** 124.6784 J **2.139** Coulomb, 5N, 14.1421 rad/seg **2.141** 5.8 mm

2.143 **(a)** 5 **(b)** 0.7025 seg **(c)** 1.9620 cm **2.145** $c_{eq} = \frac{4\,\mu N}{\pi\omega X}$ **2.148** 1.40497 s

2.150 1.7022 seg, 0.004 m **2.152** $\beta = 0.03032$, $c_{eq} = 0.04288$ N-s/m, $\Delta W = 19.05 \times 10^{-6}$ N-m **2.154** $h = 0.583327$ N/m

Capítulo 3

3.2 5 seg

3.4 **(a)** $x(t) = 0.1 \cos 20t + t \operatorname{sen} 20t$ **(b)** $x(t) = (0.5 + t)\operatorname{sen} 20t$ **(c)** $x(t) = 0.1 \cos 20t + (0.5 + t)\operatorname{sen} 20t$

3.6 **(a)** $x(t) = 0.18 \cos 20t - 0.08 \cos 30t$, **(b)** $x(t) = 0.08 \cos 20t + 0.5 \operatorname{sen} 20t - 0.08 \cos 30t$,
(c) $x(t) = 0.18 \cos 20t + 0.5 \operatorname{sen} 20t - 0.08 \cos 30t$

3.8 9.1189 kg **3.16** $X = \left|\frac{mrl^3 N^2}{22.7973\, Eba^3 - 0.2357\, \rho abl^4 N^2}\right|$ **3.18** $\omega = 743.7442$ Hz **3.22** 0.676 seg

3.24 $\theta_p(t) = \Theta \text{ sen } \omega t$ con $\Theta = -8.5718 \times 10^{-4}$ rad y $\omega = 104.72$ rad/seg

3.26 $x_p(t) = 0.06610 \cos(10t - 0.1325)$ m

$x_{total}(t) = 0.0345e^{-2t} \cos(19.8997t + 0.0267) + 0.0661 \cos(10t - 0.1325)$ m

3.28 $x_p(t) = 0.25 \cos\left(20t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ m

$x_{total}(t) = 0.2611e^{-2t} \cos(19.8997t + 1.1778) + 0.25 \cos\left(20t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ m

3.30 $k = 6.6673 \times 10^4$ lb/pulg, $c = 2.3983$ lb-seg/pulg **3.32** $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, $X_{máx} = \dfrac{\delta_{est}}{\zeta\, 2 \sqrt{1 - \zeta^2}}$ **3.34** $\zeta = 0.1180$

3.41 **(a)** 64.16 rad/seg, **(b)** 967.2 N-m

3.43 **(a)** $\zeta = 0.25$, **(b)** $\omega_1 = 22.2145$ rad/secg, $\omega_2 = 38.4766$ rad/seg **3.45** 169.5294×10^{-6} m

3.47 $k = 1.0070 \times 10^5$ N/m, $c = 633.4038$ N-s/m **3.53** 0.3339 sen 25 t mm **3.55** $X = 0.106$ m, $s = 246.73$ km/hr

3.57 $c = (k - m\omega^2)/\omega$ **3.59** $\theta(t) = 0.01311 \text{ sen }(10t - 0.5779)$ rad **3.63** $x_p(t) = 110.9960 \times 10^{-6} \text{ sen }(314.16t + 0.07072)$ m

3.66 0.4145×10^{-3} m, 1.0400×10^{-3} m **3.68** 1.4195 N-m **3.70** $\zeta = 0.1364$ **3.74** Fuerza máxima = 26.68 lb

3.82 $\mu = 0.1$ **3.85** **(a)** 10.2027 lb/pulg, **(b)** 40.8108 lb-pulg **3.88** $\dfrac{1}{\left\{\dfrac{4\,\mu N}{\pi X k} + \dfrac{3}{4k} c\omega^3 X^2\right\}}$

3.91 **(a)** 1.0623 Hz, **(b)** 1.2646 m/s, **(c)** 5.557×10^{-4} m

Capítulo 4

4.2 $x(t) = \dfrac{F_0}{2k} - \dfrac{4F_0}{\pi^2 k} \displaystyle\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{(1 - r^2n^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \cos(n\omega t - \phi_n)$

con $r = \omega/\omega_n$ y $\phi_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta nr}{1 - n^2r^2}\right)$

4.6 $\theta(t) = 0.0023873 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{318.3091 \text{ sen } 5.8905n \cos n\,\omega t + 318.3091\,(1 - \cos 5.8905n) \text{ sen } n\omega t}{n(392700.0 - 1096.6278n^2)}\right\}$ rad

4.13 $x_p(t) = 6.6389 \times 10^{-4} - 13.7821 \times 10^{-4} \cos(10.472t - 0.0172)$

$+ 15.7965 \times 10^{-4} \text{sen}(10.472t - 0.0172) + \ldots$ m

4.16 $x(t) = \dfrac{F_0}{k}\left\{1 + \dfrac{\text{sen }\omega_n(t - t_0) - \text{sen}\,\omega_n t}{\omega_n t_0}\right\}$; para $t \geq t_0$

4.19 $x(t) = \dfrac{F_0}{2k\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\left[2 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(1 - \cos\dfrac{\omega_n \pi}{\omega}\right)\right] + \dfrac{F_0}{k}\left[1 - \cos\omega_n\left(t - \dfrac{\pi}{\omega}\right)\right]$ para $t > \pi/\omega$.

4.25 $x(t) = 1.7689 \text{ sen } 6.2832\,(t - 0.018) - 0.8845 \text{ sen } 6.2832t$

$- 0.8845 \text{ sen } 6.2832\,(t - 0.036)$m; para $t > 0.036$ seg

4.29 $x_p(t) = 0.002667$ m **4.32** $\theta(t) = 0.3094e^{-t} + 0.05717 \text{ sen } 5.4127t - 0.3094 \cos 5.4127t$ rad

4.35 $x(t) = 0.04048e^{-t} + 0.01266 \text{ sen } 3.198t - 0.04048 \cos 3.198t$ m **4.37** $x(t) = 0.5164e^{-t} \text{ sen } 3.8729t$ m

4.50 $x_m = \dfrac{F_0}{k\omega_n t_0}[(1 - \cos\omega_n t_0)^2 + (\omega_n t_0 - \text{sen }\omega_n t_0)^2]^{1/2}$; para $t > t_0$ **4.53** $d = 0.6$ pulg **4.56** $k = 12771.2870$ lb/pulg

4.60 $x(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0}{m\omega_n^2}(1 - \cos\omega_n t); & 0 \leq t \leq t_0 \\ \dfrac{F_0}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t - t_0) - \cos\omega_n t]; & t \geq t_0 \end{cases}$

Capítulo 5

5.5 $\omega_1 = 3.6603$ rad/seg, $\omega_2 = 13.6603$ rad/seg **5.7** $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ **5.9** 1.1 pulg^2

5.10 $\omega_1 = 7.3892$ rad/s, $\omega_2 = 58.2701$ rad/s **5.11** $\omega_{1,2}^2 = \frac{48}{7}\frac{EI}{m_1 m_2}\left[(m_1 + 8m_2) \mp \sqrt{(m_1 - 8m_2)^2 + 25m_1 m_2}\right]$

5.13 $\omega_1 = 0.7654\sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_2 = 1.8478\sqrt{\frac{g}{l}}$ **5.16** $\omega_1 = 12.8817$ rad/seg, $\omega_2 = 30.5624$ rad/seg

5.19 $x_1(t) = 0.1046$ sen $40.4225t + 0.2719$ sen $58.0175t$,
$x_2(t) = 0.1429$ sen $40.4225t - 0.09952$ sen $58.0175t$

5.21 $\omega_1 = 3.7495\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}, \omega_2 = 9.0524\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$ **5.23** $\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.3029 \end{Bmatrix}, \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.3028 \end{Bmatrix}$

5.25 $x_2(0) = r_1\, x_1(0) = \frac{x_1(0)}{\sqrt{3} - 1}, \dot{x}_2(0) = r_1\, \dot{x}_1(0) = \frac{\dot{x}_1(0)}{\sqrt{3} - 1}$

5.29 $x_1(t) = 0.5\cos 2t + 0.5\cos\sqrt{12}t;\ x_2(t) = 0.5\cos 2t - 0.5\cos\sqrt{12}t$

5.36 $\omega_1 = 0.5176\sqrt{k_t/J_0}, \omega_2 = 1.9319\sqrt{k_t/J_0}$ **5.39** $\omega_1 = 0.38197\sqrt{k_t/J_0}, \omega_2 = 2.61803\sqrt{k_t/J_0}$

5.41 Ecuación de frecuencia:
$$\omega^4 (m_1 m_2 l_1^2 l_2^2) - \omega^2 \left\{ m_2 l_2^2 (W_1 l_1 + k l_1^2) + m_1 l_1^2 (W_2 l_2 + k l_2^2) \right\} + (W_1 l_1 W_2 l_2 + W_2 l_2 k l_1^2 + W_1 l_1 k l_2^2) = 0$$

5.43 $$\omega_{1,2}^2 = \left\{ \frac{(J_0 k + m k_t) \pm \sqrt{(J_0 k + m k_t)^2 - 4(J_0 - me^2) m k k_t}}{2m(J_0 - me^2)} \right\}$$

5.46 $1000\ddot{x} + 40000x + 15000\,\theta = 900$ sen $8.7267t$
$+ 1100$ sen $(8.7267t - 1.5708)$
$810\,\ddot{\theta} + 15000x + 67500\,\theta = 1650$ sen $(8.7267t - 1.5708) - 900$ sen $8.7267t$

5.49 **(a)** $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & kl/6 \\ kl/6 & 17kl^2/36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ l\,F(t)/3 \end{Bmatrix}$ donde $J_0 = ml^2/12$ y $F(t) = F_0$ sen ωt,
(b) Acoplamiento estático

5.53 **(a)** $\omega_1 = 12.2474$ rad/seg , $\omega_2 = 38.7298$ rad/seg

5.56 $x_j(t) = X_j e^{i\omega t}$
con $X_1 = (-40.0042 - 0.01919i) \times 10^{-4}$ pulg,
$X_2 = (0.9221 + 0.2948i) \times 10^{-4}$ pulg

5.57 $k_2 = m_2\omega^2$ **5.58** $x_2(t) = \left\{ \frac{k_2 F_0}{(-m_1\,\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\,\omega^2 + k_2) - k_2^2} \right\}$ sen ωt

5.60 $x_1(t) = (17.2915\, F_0 \cos\omega t + 6.9444\, F_0$ sen$\omega t)10^{-4}$
$x_2(t) = (17.3165\, F_0 \cos\omega t + 6.9684\, F_0$ sen $\omega t)10^{-4}$

5.62 $x_1(t) = 0.009773$ sen $4\pi t$ m, $x_2(t) = 0.016148$ sen $4\pi t$ m **5.64** $x_2(t) = (\frac{1}{60} - \frac{1}{40}\cos 10t + \frac{1}{120}\cos 10\sqrt{3}t)u(t)$

5.66 $\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$ **5.67** $b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$

5.69 $\ddot{\alpha} + \left(\frac{k_t}{J_1} + \frac{k_t}{J_2}\right)\alpha = 0$ donde $\alpha = \theta_1 - \theta_2$

5.71 $\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{6k\,(m + M)}{mM}}$

5.77 $k \geq \frac{mg}{2l}$

Capítulo 6

6.1 $\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$

6.3 $\frac{m}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \frac{c}{25} \begin{bmatrix} 6 & -10 & 4 \\ 9 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$

$+ \frac{k}{25}\begin{bmatrix} 6 & -10 & 29 \\ 34 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$

6.5 $I_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t_1}(\theta_1 - \theta_2) = M_1 \cos \omega t$

$\left(I_2 + I_3 \frac{n_2^2}{n_3^2}\right)\ddot{\theta}_2 + k_{t_1}(\theta_2 - \theta_1) + k_{t_2}\frac{n_2}{n_3}\left(\theta_2 \frac{n_2}{n_3} - \theta_3\right) = 0$

$\left(I_4 + I_5 \frac{n_4^2}{n_5^2}\right)\ddot{\theta}_3 + k_{t_2}\left(\theta_3 - \theta_2 \frac{n_2}{n_3}\right) + k_{t_3}\frac{n_4}{n_5}\left(\theta_3 \frac{n_4}{n_5} - \theta_4\right) = 0$

$I_6 \ddot{\theta}_4 + k_{t_3}\left(\theta_4 - \theta_3 \frac{n_4}{n_5}\right) = 0$

6.12 $k\begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ **6.14** $\frac{k}{25}\begin{bmatrix} 34 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \\ 6 & -10 & 29 \end{bmatrix}$

6.16 $\begin{bmatrix} k_{t_1} & -k_{t_1} & 0 & 0 \\ -k_{t_1} & k_{t_1} + k_{t_2}\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 & -k_{t_2}\left(\frac{n_2}{n_3}\right) & 0 \\ 0 & -k_{t_2}\left(\frac{n_2}{n_3}\right) & k_{t_2} + k_{t_3}\left(\frac{n_4}{n_5}\right)^2 & -k_{t_3}\left(\frac{n_4}{n_5}\right) \\ 0 & 0 & -k_{t_3}\left(\frac{n_4}{n_5}\right) & k_{t_3} \end{bmatrix}$ **6.18** $\begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} & \frac{1}{k_1 r} \\ \frac{1}{k_1 r} & \frac{1}{k_1 r^2} \end{bmatrix}$ **6.20** $\begin{bmatrix} \frac{2}{3k} & -\frac{1}{3kl} \\ -\frac{1}{3kl} & \frac{2}{3kl^2} \end{bmatrix}$

6.22 $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 4ml^2 \end{bmatrix}$ **6.24** $[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}$ **6.26** $[a] = \frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix} 9/64 & 1/6 & 13/192 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 13/192 & 1/6 & 9/64 \end{bmatrix}$ **6.30** $2k$

6.32 $\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$ **6.34** $\frac{m}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **6.36** $\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + I_3\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 + I_5\left(\frac{n_4}{n_5}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix}$

6.39 $2m\ddot{x} + kx = 0, l\ddot{\theta} + g\theta = 0$

6.41 $m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$

$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0$

$m_3\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + (k_3 + k_4)x_3 = 0$

6.44 $m_1\ddot{x}_1 + 7kx_1 - kx_2 - 5kx_3 = F_1(t)$

$m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = F_2(t)$

$m_3\ddot{x}_3 - 5kx_1 - kx_2 + 7kx_3 = F_3(t)$

6.47 $\left(M + \frac{J_0}{9r^2}\right)\ddot{x}_1 - \frac{J_0}{9r^2}\ddot{x}_2 + \frac{41}{9}kx_1 - \frac{8}{9}kx_2 - \frac{8}{3}kx_3 = F_1(t)$

$$-\frac{J_0}{9r^2}\ddot{x}_1 + \left(3m + \frac{J_0}{9r^2}\right)\ddot{x}_2 - \frac{8}{9}kx_1 + \frac{2}{9}kx_2 + \frac{2}{3}kx_3 = F_2(t)$$

$$m\ddot{x}_3 - \frac{8}{3}kx_1 + \frac{2}{3}kx_2 + 5kx_3 = F_3(t)$$

6.49 $\omega_1 = 0.44504\sqrt{k/m}, \omega_2 = 1.2471\sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.8025\sqrt{k/m}$

6.52 $\omega_1 = 0.533399\sqrt{k/m}, \omega_2 = 1.122733\sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.669817\sqrt{k/m}$

6.55 $\lambda_1 = 2.21398, \lambda_2 = 4.16929, \lambda_3 = 10.6168$ **6.58** $\omega_1 = 0.644798\sqrt{g/l}, \omega_2 = 1.514698\sqrt{g/l}, \omega_3 = 2.507977\sqrt{g/l}$

6.61 $\omega_1 = 0.562587\sqrt{\frac{P}{ml}}, \omega_2 = 0.915797\sqrt{\frac{P}{ml}}, \omega_3 = 1.584767\sqrt{\frac{P}{ml}}$ **6.64** $[X] = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2/3} \\ 1 & 1 & \sqrt{8/3} \end{matrix}\right]$

6.67 $\omega_1 = 0.7653\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = 1.8478\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_3 = 3.4641\sqrt{\frac{k}{m}}$

6.75 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0.752158\sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.329508\sqrt{k/m}$

6.77 $x_3(t) = x_{10}\left\{0.5 \cos 0.4821\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - 0.3838 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + 0.8838 \cos 1.1976\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right\}$

6.79 $x_3(t) = x_{20}\left\{0.1987 \cos 0.5626\sqrt{\frac{P}{lm}}\,t - 0.06157 \cos 0.9158\sqrt{\frac{P}{lm}}\,t - 0.1372 \cos 1.5848\sqrt{\frac{P}{lm}}\,t\right\}$

6.82 $x_1(t) = \dot{x}_0\left\{\frac{t}{3} + \sqrt{\frac{m}{4k}}\,\text{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \sqrt{\frac{m}{108k}}\,\text{sen}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right\}$

6.84 $x_1(t) = \frac{1}{2}\left[\cos 2t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + \cos\sqrt{12}t - \frac{1}{\sqrt{12}}\,\text{sen}\sqrt{12}t\right];\ x_2(t) = \frac{1}{2}\left[\cos 2t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t - \cos\sqrt{12}t + \frac{1}{\sqrt{12}}\,\text{sen}\sqrt{12}t\right]$

6.90 **(a)** $\omega_1 = 0.44497\sqrt{k_t/J_0}, \omega_2 = 1.24700\sqrt{k_t/J_0}, \omega_3 = 1.80194\sqrt{k_t/J_0}$ **(b)** $\vec{\theta}(t) = \begin{Bmatrix} -0.0000025 \\ 0.0005190 \\ -0.0505115 \end{Bmatrix} \cos 100t$ radianes

6.92 $\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} 5.93225 \\ 10.28431 \\ 12.58863 \end{Bmatrix}\frac{F_0}{k}\cos\omega t$ **6.95** $\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0.03944\,(1 - \cos 18.3013t) + 0.01057\,(1 - \cos 68.3015t) \\ 0.05387\,(1 - \cos 18.3013t) - 0.00387\,(1 - \cos 68.3015t) \end{Bmatrix}$

6.99 $x_3(t) = 0.0256357 \cos(\omega t + 0.5874^0)$ m

Capítulo 7

7.1 **(a)** $\omega_1 \simeq 2.6917\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$, **(b)** $\omega_1 \simeq 2.7994\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ **7.3** $3.5987\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ **7.5** $0.3015\sqrt{k/m}$

7.10 $0.4082\sqrt{k/m}$ **7.12** $1.0954\sqrt{\frac{T}{lm}}$ **7.19** $\omega_1 = 0, \omega_2 \simeq 6.2220$ rad/s, $\omega_3 \simeq 25.7156$ rad/s **7.22** $\omega_1 = \sqrt{k/m}$

7.27 $\omega_1 = 0.3104, \omega_2 = 0.4472, \omega_3 = 0.6869$ donde $\omega_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$

7.30 $\widetilde{\omega}_1 = 0.765366, \widetilde{\omega}_2 = 1.414213, \widetilde{\omega}_3 = 1.847759$ con $\omega_i = \widetilde{\omega}_i\sqrt{\frac{GJ}{lJ_0}}$

7.37 $\omega_1 = 0.2583, \omega_2 = 3.0, \omega_3 = 7.7417$ **7.41** $[U]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.44721359 & 0.083045475 & -0.12379687 \\ 0 & 0.41522738 & 1.1760702 \\ 0 & 0 & 1.7950547 \end{bmatrix}$

Capítulo 8

8.1 28.2843 m/seg **8.3** $\omega_3 = 9000$ Hz, ambas se incrementaron 9.54%

8.6 **(a)** 0.1248×10^6 N, **(b)** 3.12×10^6 N **8.8** $w(x,t) = \frac{8\,al}{\pi^3 c}\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n^3}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{l}$

8.11 $w\left(x, \frac{l}{c}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,9h}{2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l} + \frac{\sqrt{3}\,9h}{8\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x}{l} - \frac{\sqrt{3}\,9h}{32\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{4\pi x}{l} + \frac{\sqrt{3}\,9h}{50\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{l}$

8.17 $\tan\frac{\omega l}{c} = \frac{AE\omega c(k - M\omega^2)}{A^2E^2\omega^2 - M\omega^2 kc^2}$ **8.20** $\tan\frac{\omega l_1}{c_1}\tan\frac{\omega l_2}{c_2} = \frac{A_1E_1c_2}{A_2E_2c_1}$ **8.23** $\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

8.25 $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}\sqrt{\frac{G}{\rho l^2}}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ **8.28** 5030.59 rad/seg **8.31** $\cos\beta l\cosh\beta l = -1$

8.34 $\tan\beta l - \tanh\beta l = 0$ **8.36** 20.2328 N-m **8.39** $\cos\beta l\cosh\beta l = 1$, y $\tan\beta l - \tanh\beta l = 0$

8.41 $\omega \approx \sqrt{120}\left(\frac{EI_0}{\rho A_0 l^4}\right)^{1/2}$ **8.46** $w(x,t) = \frac{F_0}{2\rho A c^2}\left\{\cos\beta x + \cosh\beta x + \tan\frac{\beta l}{2}\operatorname{sen}\beta x - \tanh\frac{\beta l}{2}\operatorname{senh}\beta x - 2\right\}\operatorname{sen}\omega t$

8.49 $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)\, q_n(t)$ donde $q_n(t) = \frac{M_0}{\rho A l \omega_n^2}\left.\frac{dW_n}{dx}\right|_{x=l}(1 - \cos\omega_n t)$

8.60 $w(x,y,t) = \frac{\dot{w}_0}{\omega_{12}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{2\pi y}{b}\operatorname{sen}\omega_{12}t$ **8.62** $\omega_{mn}^2 = \frac{\gamma_n P}{\rho}$, donde $J_m(\gamma_n R) = 0$; $m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$

8.63 $22.4499\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$ **8.65** $\omega = 15.4510\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$ **8.67** $7.7460\sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 l^4}}$ **8.70** $2.4146\sqrt{\frac{EA_0}{m_0 l^2}}$ **8.72** $\omega \approx 13867.3328$ rad/seg

8.74 **(a)** $1.73205\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$, **(b)** $1.57669\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$, $5.67280\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$ **8.77** $\omega_1 = 3.142\sqrt{\frac{P}{\rho l^2}}$, $\omega_2 = 10.12\sqrt{\frac{P}{\rho l^2}}$

Capítulo 9

9.1 Alrededor de 46.78 km/hora **9.3** $m_c r_c = 3354.6361$ g-mm, $\theta_c = -25.5525°$ **9.5** $m_4 = 0.99$ oz, $\theta_4 = -35°$

9.8 1.6762 oz, $\alpha = 75.6261°$ CW

9.11 Quitar 0.1336 lb a 10.8377º en sentido contrario a las manecillas del reloj y 0.2063 lb en el sentido de las manecillas del reloj en el plano C en los radios de 4 pulg

9.14 **(a)** $\vec{R}_A = -28.4021\vec{j} - 3.5436\vec{k}$, $\vec{R}_B = 13.7552\vec{j} + 4.7749\vec{k}$, **(b)** $m_L = 10.44$ g, $\theta_L = 7.1141^0$

9.17 **(a)** 0.005124 m, **(b)** 0.06074 m, **(c)** 0.008457 m

9.20 **(a)** 0.5497×10^8 N/m^2 **(b)** 6.4698×10^8 N/m^2 **(c)** 0.9012×10^8 N/m^2

9.22 $F_{xp} = 0$, $F_{xs} = 3269.4495$ lb, $M_{zp} = M_{zs} = 0$ **9.25** El motor está completamente balanceado en cuanto a fuerza y momento

9.27 0.2385 mm **9.30** **(a)** $\omega < 95.4927$ rpm **(b)** $\omega > 276.7803$ rpm **9.32** $k = 152243.1865$ N/m

9.35 79.7808 rad/seg − 1419.8481 rad/seg **9.37** $\delta_{est} = 0.02733$ m **9.40** $k = 1332.6646$ lb/pie

9.43 **(a)** $X = 11.4188 \times 10^{-3}$ m **(b)** $F_T = 44.8069$ N **9.45** 98.996% **9.47** **(a)** 2,775.66 lb, **(b)** 40,145.81 lb

9.49 49,752.86 N/m **9.64** $\mu = 0.3403$; $m_2 = 102.09$ kg, $k_2 = 2.519$ MN/m; $X_2 = -0.1959$ mm

9.66 **(a)** 487.379 lb **(b)** $\Omega_1 = 469.65$ rpm, $\Omega_2 = 766.47$ rpm **9.68** Para $D/d = 4/3$, $d = 0.5732$ pulg, $D = 0.7643$ pulg

9.71 $0.9764 \le \frac{\omega}{\omega_2} \le 1.05125$ **9.73** $m_2 = 10$ kg, $k_2 = 0.19986$ MN/m **9.75** 165.6315 lb/pulg

Capítulo 10

10.2 18.3777 Hz **10.4** 3.6935 Hz **10.6** 0.53% **10.9** 35.2635 Hz **10.12** 73.16%

10.14 $k = 33623.85$ N/m, $c = 50.55$ N-seg/m **10.16** $m = 19.41$ g, $k = 7622.8$ N/m **10.19** 111.20 rad/seg − 2780.02 rad/seg

10.21 $r \approx 1$ **10.23** $\zeta = 0.1111$ **10.26** Jaula (51.93 Hz), Anillo de rodamiento interior (1078.97 Hz), Anillo de rodamiento exterior (830.88 Hz), Bola (193.31 Hz)

10.29 1.8 **10.30** 2.9630 **10.32** $\zeta = 0.2$

Capítulo 11

11.2 $\left.\frac{d^4x}{dt^4}\right|_i = \frac{x_i - 4x_{i-1} + 6x_{i-2} - 4x_{i-3} + x_{i-4}}{(\Delta t)^4}$ **11.4** $x(t = 5) = -1$ con $\Delta t = 1$ y -0.9733 con $\Delta t = 0.5$

11.6 $x_{10} = -0.0843078$, $x_{15} = 0.00849639$ **11.9** $x(t = 0.1) = 0.131173$, $x(t = 0.4) = -0.0215287$, $x(t = 0.8) = -0.0676142$

11.14 Con $\Delta t = 0.07854$, $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, $x_1(t = 0.2356) = 0.100111$, $x_2(t = 0.2356) = 0.401132$, $x_1(t = 1.5708) = 1.040726$, $x_2 = (t = 1.5708) = -0.378066$

11.20

t	x_1	x_2
0.25	0.07813	1.1860
1.25	2.3360	−0.2832
3.25	−0.6363	2.3370

11.23 $\omega_1 = 3.06147\sqrt{\dfrac{E}{\rho l^2}}, \omega_2 = 5.65685\sqrt{\dfrac{E}{\rho l^2}}, \omega_3 = 7.39103\sqrt{\dfrac{E}{\rho l^2}}$

11.26 $\omega_1 = 17.9274\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}, \omega_2 = 39.1918\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}, \omega_3 = 57.1193\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}$

11.38 Con $\Delta t = 0.24216267$,

t	x_1	x_2
0.2422	0.01776	0.1335
2.4216	0.7330	1.8020
4.1168	0.1059	0.8573

Capítulo 12

12.2 $[k] = \dfrac{EA_0}{l}(0.6321)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

12.3 3.3392×10^7 N/m^2

12.15 0.05165 pulg. bajo carga

12.18 Deflexión $= 0.002197\,\dfrac{Pl^3}{EI}$, pendiente $= 0.008789\,\dfrac{Pl^3}{EI}$

12.19 $\sigma^{(1)} = -2.5056$ lb/pulg^2, $\sigma^{(2)} = 2.6936$ lb/pulg^2

12.21 Esfuerzos de flexión máximos: −37218 lb/pulg^2, tanto en la biela como en la manivela, esfuerzos axiales máximos: − 6411 lb/pulg^2 (en la biela), − 5649 lb/pulg^2

12.26 $\omega_1 = 0.8587\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}, \omega_2 = 4.0965\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}, \omega_3 = 34.9210\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}$

12.29 $\omega_1 = 15.1357\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}, \omega_2 = 28.9828\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}$

12.32 $\omega_1 = 20.4939\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A l^4}}$

12.40 $\omega_1 = 6445$ rad/seg, $\omega_2 = 12451$ rad/seg

ÍNDICE

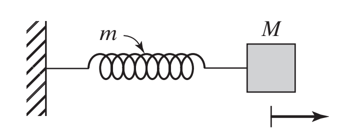
Las entradas en letra **negrita** indican títulos de capítulo y secciones; las entradas en letra cursiva, indican títulos de obras.

Tabla de equivalencias

Cantidad	Equivalencia en el sistema SI	Equivalencia en el sistema inglés
Trabajo o energía	1 pulg − lb_f = 0.11298484 J 1 pie− lb_f = 1.355818 J 1 Btu = 1055.056 J 1 kWh = 3.6 × 10^6 J	1 J = 8.850744 pulg − lb_f 1 J = 0.737562 pie− lb_f = 0.947817 × 10^{-3} Btu = 0.277778 kWh
Potencia	1 pulg − lb_f/seg = 0.1129848 W 1 pie − lb_f/seg = 1.355818 W = 0.0018182 hp 1 hp = 745.7 W	1 W = 8.850744 pulg.− lb_f/seg 1 W = 0.737562 pie− lb_f/seg = 1.34102 × 10^{-3} hp
Momento de área de inercia o momento segundo de área	1 $pulg^4$ = 41.6231 × 10^{-8} m^4 1 pie^4 = 86.3097 × 10^{-4} m^4	1 m^4 = 240.251 × 10^4 $pulg^4$ = 115.862 pie^4
Momento de inercia de masa	1 pulg − lb_f − seg^2 = 0.1129848 $m^2 \cdot$ kg	1 $m^2 \cdot$ kg = 8.850744 pulg.− lb_f − seg^2
Constante de resorte: translatorio torsional	1 lb_f/pulg = 175.1268 N/m 1 lb_f/pie = 14.5939 N/m 1 pulg − lb_f/rad = 0.1129848 m · N/rad	1 N/m = 5.71017 × 10^{-3} lb_f/pulg. = 68.5221 × 10^{-3} lb_f/pie 1 m · N/rad = 8.850744 pulg-lb $_f$/rad = 0.737562 lb_f − pie/rad
Constante de amortiguamiento: translatorio torsional	1 lb_f − seg/pulg = 175.1268 N · s/m 1 pulg − lb_f − seg/rad = 0.1129848 m · N · s/rad	1 N · s/m = 5.71017 × 10^{-3} lb_f − seg/pulg 1 m · N · s/rad = 8.850744 lb_f − pulg − seg/rad
Ángulos	1 rad = 57.295754 grados; 1 rpm = 0.0166667 rev/seg = 0.104720 rad/seg;	1 grados = 0.0174533 rad; 1 rad/seg = 9.54909 rpm

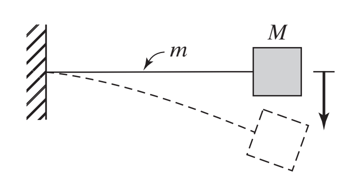
Masas equivalentes, resortes y amortiguadores

Masas equivalentes



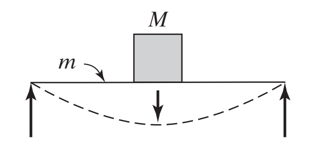
Masa (M) fija en el extremo de un resorte de masa m

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



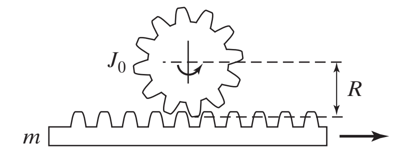
Viga en voladizo de masa m con una carga M en su extremo libre

$$m_{eq} = M + 0.23\,m$$



Viga simplemente apoyada de masa m con una carga M a la mitad

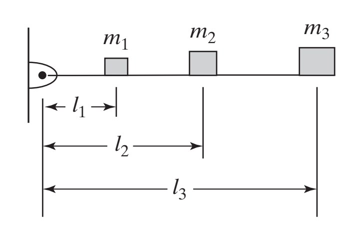
$$m_{eq} = M + 0.5\,m$$



Masas translacionales y rotacionales acopladas

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

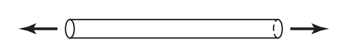
$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



Masas sobre una barra conectada a la bisagra

$$m_{eq_1} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$$

Resortes equivalentes

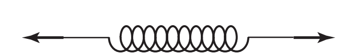


Varilla sometida a una carga axial (l = longitud, A = área de sección transversal)

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$

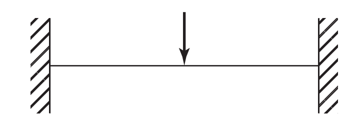
Varilla ahusada sometida a una carga axial (D, d = diámetros extremos)

$$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$$



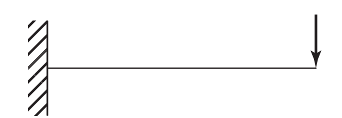
Resorte helicoidal sometido a una carga axial (d = diámetro del alambre, D = diámetro de espira medio, n = cantidad de vueltas activas)

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



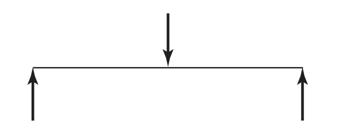
Viga doblemente empotrada con una carga a la mitad

$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$



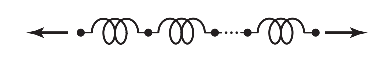
Viga en voladizo con una carga en su extremo libre

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$



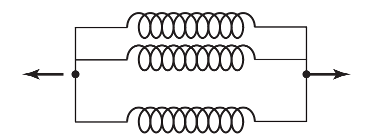
Viga simplemente apoyada con una carga a la mitad

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$



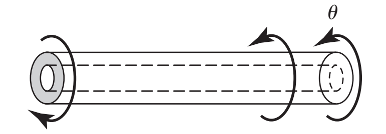
Resortes en serie

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$



Resortes en paralelo

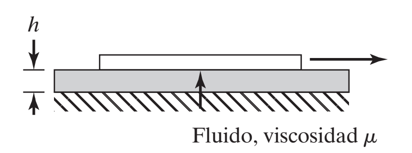
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$



Flecha hueca sometida a torsión (l = longitud, D = diámetro externo, d = diámetro interno)

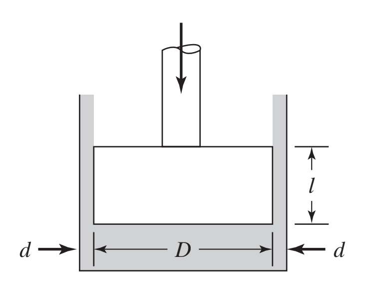
$$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l}(D^4 - d^4)$$

Amortiguadores viscosos equivalentes



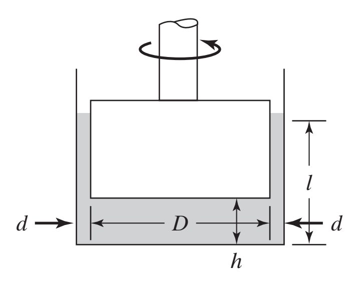
Movimiento relativo entre superficies paralelas (A = área de la placa más pequeña)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$



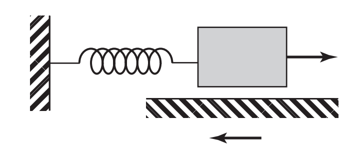
Amortiguador hidráulico (movimiento axial de un pistón en un cilindro)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{4d^3}\left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$



Amortiguador torsional

$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^2 (l - h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^3}{32h}$$



Fricción seca (amortiguamiento de Coulomb) (fN = fuerza de fricción, ω = frecuencia, X = amplitud de vibración)

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi \omega X}$$